openstax POLSKA

Fizy-ka

dla szkół wyższych

Tom 3

Fizyka dla szkół wyższych
Tom III

GŁÓWNI AUTORZY

Samuel J. Ling, Truman State University
Jeff Sanny, Loyola Marymount University
William Moebs

openstax POLSKA™

Katalyst Education
ul. Grzybowska 5a
00-132 Warszawa
www.openstax.pl

Adaptacja podręcznika została sfinansowana z grantu The Brian D. Patterson USA-International Foundation.

ISBN-13 wersji PDF **978-83-948838-5-0**
Rok pierwszej publikacji **2018**

Spis treści

PRZEDMOWA

Podręcznik *Fizyka dla szkół wyższych* powstał po to, by udostępnić studentom za darmo materiały dydaktyczne spełniające najwyższe standardy akademickie. Podręcznik stworzony został przez OpenStax, fundację non-profit działającą przy Rice University w Stanach Zjednoczonych.

Przedmowa do wydania polskiego

Wierzymy, że przyszłość edukacji to swobodny i wygodny dostęp do najlepszych treści, równy dla wszystkich. Fundacja OpenStax realizuje tę misję, tworząc wysokiej jakości podręczniki i udostępniając je studentom i wykładowcom. W ramach projektu opublikowano ponad 20 darmowych podręczników z różnych dziedzin nauki.

Fizyka dla szkół wyższych to polska adaptacja trzytomowej publikacji *University Physics*, wydanej jesienią 2016 roku. To najbardziej nowatorski i aktualny podręcznik fizyki na polskim rynku. Publikacja przygotowana została przez OpenStax Polska we współpracy z siedmioma czołowymi uczelniami w kraju i jest odpowiedzią na rosnące zapotrzebowanie na treści mające wysokie walory dydaktyczne, a zarazem atrakcyjne dla współczesnych studentów. Otwarta licencja Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe (CC BY 4.0) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl) gwarantuje całkowicie bezpłatny dostęp i niemal nieograniczone możliwości korzystania z publikacji.

Jedną z największych, w naszym przekonaniu, zalet podręcznika jest jego wersja cyfrowa. Plik w formacie PDF można pobrać ze strony OpenStax.org (http://openstax.org) . Aby jednak wykorzystać pełny potencjał, jaki daje otwarta licencja i nowe technologie informatyczne, udostępniamy tę publikację przede wszystkim na platformie OpenStax CNX (http://cnx.org) , którą specjalnie w tym celu przystosowaliśmy do obsługi języków innych niż angielski i przetłumaczyliśmy na język polski. Platforma, oprócz zapewnienia wygodnego dostępu do podręcznika, umożliwia również łatwą adaptację jego treści do indywidualnych potrzeb. Jeśli więc pomyślicie Państwo o wykorzystaniu fragmentów publikacji do przygotowania własnych materiałów, nie ma żadnych przeszkód prawnych ani technicznych, aby to uczynić.

Podziękowania

W pracę nad podręcznikiem zaangażowanych było 52 pracowników naukowych z siedmiu instytucji akademickich. Kilka osób z tego grona okazało nam szczególną pomoc, za co bardzo dziękujemy:

prof. dr hab. inż. Zbigniew Kąkol, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

prof. PWr dr hab. inż. Włodzimierz Salejda, Politechnika Wrocławska

prof. UZ dr hab. Maria Przybylska, Uniwersytet Zielonogórski

dr inż. Radosław Strzałka, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

dr Brygida Mielewska, Politechnika Gdańska

prof. UZ dr hab. Jarosław Piskorski, Uniwersytet Zielonogórski

Adaptacja podręcznika została sfinansowana z grantu The Brian D. Patterson USA-International Foundation. Serdecznie dziękujemy.

O projekcie OpenStax

OpenStax to fundacja charytatywna z siedzibą w Rice University w USA. Misją fundacji jest ułatwianie studentom dostępu do edukacji. Pierwszy otwarty podręcznik fundacja wydała w 2012 roku. Od tamtej pory jej oferta podręczników rozrosła się do ponad 20 pozycji. Korzystają z nich setki tysięcy studentów na całym świecie. Opracowane w ramach projektu oprogramowanie pomagające zwiększyć efektywność uczenia się poprzez adaptacyjną personalizację ścieżek edukacyjnych jest obecnie w fazie pilotażu w szkołach podstawowych i średnich. OpenStax realizuje swoją misję dzięki hojności innych organizacji charytatywnych. Darowizny te oraz usługi i zasoby otrzymywane na preferencyjnych warunkach od innych partnerów pozwalają nam pokonywać najczęściej występujące bariery utrudniające osiągnięcie sukcesu zarówno studentom jak i wykładowcom.

O zasobach OpenStax

Dostępne do modyfikacji

Fizyka dla szkół wyższych jest udostępniana na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 4.0 Międzynarodowe (CC BY 4.0) (https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.pl) , która zezwala każdemu na dowolne rozpowszechnianie, modyfikowanie i rozszerzanie treści pod warunkiem uznania autorstwa OpenStax i osób podpisanych pod oryginałem.

Jako że niniejszy podręcznik jest udostępniany na otwartej licencji, możecie Państwo wyjąć z tej publikacji tylko te rozdziały lub fragmenty, których potrzebujecie do zajęć. Stwórzcie własne treści modyfikując istniejące i układając je w dowolnej kolejności. Następnie prześlijcie studentom bezpośredni odnośnik do swojej publikacji na platformie OpenStax CNX (http://cnx.org) .

Platforma OpenStax CNX istnieje od 1999 roku i ma zapewnione stabilne finansowanie. Opublikowano na niej dziesiątki tysięcy zasobów edukacyjnych w wielu językach.

Istnieje także możliwość wydrukowania dostosowanej wersji podręcznika OpenStax za pośrednictwem usługi aerSelect. Dzięki niej można zaoferować studentom publikację w postaci niedrogiej, oprawionej książki lub e-booka. Odnośnik do usługi aerSelect znajduje się na stronie podręcznika na OpenStax.org (http://openstax.org) .

Zgłaszanie błędów

Wszystkie podręczniki OpenStax przechodzą rygorystyczny proces recenzji. Mimo to niektóre błędy mogły zostać przeoczone, co zdarza się w każdej profesjonalnej publikacji. Nasze książki są cyfrowe, dlatego możemy uaktualniać je, ilekroć zachodzi taka konieczność. Jeśli chcesz zaproponować poprawkę, zgłoś ją korzystając z odnośnika na stronie podręcznika na OpenStax.org (http://openstax.org) . Wszystkie zgłoszone poprawki są oceniane przez ekspertów. OpenStax kieruje się polityką otwartości również w tej dziedzinie, dlatego na stronie podręcznika można znaleźć pełną listę zgłoszonych poprawek.

Format

Niniejsza publikacja jest dostępna za darmo na stronie internetowej i w formacie PDF. Podręcznik zostanie również wydrukowany w małym nakładzie i będzie można go znaleźć w bibliotekach uczelni partnerskich.

O podręczniku

Fizyka dla szkół wyższych, podobnie jak podręcznik *University Physics*, na którym się opiera, przeznaczona jest dla zajęć z fizyki ogólnej z elementami analizy matematycznej, trwających 2-3 semestry. Treść dopasowano pod względem zakresu i kolejności do praktyki dydaktycznej większości uczelni prowadzących takie zajęcia. Wiedza fizyczna jest fundamentem we wszystkich zawodach związanych z naukami ścisłymi, przyrodniczymi, medycznymi i technicznymi. Niniejsza publikacja pomoże studentom poznać kluczowe pojęcia fizyczne i zrozumieć, jak te pojęcia odnoszą się do ich własnego życia oraz otaczającej ich rzeczywistości.

Z uwagi na rozległy zakres materiału, aby ułatwić korzystanie z podręcznika, podzielono go na trzy tomy.

Zakres materiału

Zakres wiedzy prezentowanej w podręczniku *Fizyka dla szkół wyższych* został dopasowany do typowych zajęć akademickich z fizyki ogólnej prowadzonych przez 2-3 semestry. Staraliśmy się zaprezentować fizykę jako dziedzinę ciekawą i zrozumiałą, zachowując zarazem niezbędny rygor matematyczny. Mając to na względzie, treść niniejszego podręcznika została ułożona w logicznej kolejności, od kwestii podstawowych do bardziej zaawansowanych, odwołuje się do wiedzy, jaką studenci uzyskali z dotychczasowych części, i podkreśla powiązania między zagadnieniami, a także między teorią a praktyką. Celem każdego podrozdziału jest nie tylko nauczenie pojęć, ale także zbudowanie umiejętności posługiwania się nimi – umiejętności, która przyda się studentom w przyszłej pracy zawodowej lub dalszej nauce. Układ i metodologia podręcznika powstały we współpracy z doświadczonymi wykładowcami fizyki.

TOM I

Część 1: Mechanika

- Rozdział 1: Jednostki i miary
- Rozdział 2: Wektory
- Rozdział 3: Ruch prostoliniowy
- Rozdział 4: Ruch w dwóch i trzech wymiarach
- Rozdział 5: Zasady dynamiki Newtona
- Rozdział 6: Zastosowania zasad dynamiki Newtona

Konstrukcja metodyczna

W całym podręczniku *Fizyka dla szkół wyższych* zagadnienia prezentowane są zarówno w sposób klasyczny, z uwzględnieniem historycznych metod i technik, jak i w aspekcie współczesnych zastosowań. Większość rozdziałów zaczyna się od obserwacji lub doświadczeń, które umieszczają materiał w kontekście praktycznym. Sposób prezentacji materiału i logikę wywodu oparto na wieloletnim doświadczeniu zebranym przez wykładowców fizyki. Zastosowane w podręczniku podejście, równoważące klarowność wyjaśnień z naukowym rygorem, sprawdziło się w trakcie ich pracy ze studentami. W tekście zamieszczono odnośniki do wcześniejszych treści, aby studenci mogli łatwo przypominać sobie poruszane zagadnienia, a potem wracać do bieżącego wywodu, co ułatwia zrozumienie powiązań między tematami. Najważniejsze postacie i eksperymenty historyczne omawiane są w głównym tekście, a nie w ramkach lub na marginesie, aby nie utrudniać czytelnikowi budowania intuicyjnego rozumienia prezentowanych kwestii. Najważniejsze pojęcia, definicje i wzory wyeksponowano w tekście i przytoczono je ponownie w podsumowaniu na końcu każdego rozdziału. Przykłady i zdjęcia starano się dobrać w taki sposób, aby w miarę możliwości dotyczyły współczesnych zastosowań fizyki lub nowoczesnych technologii znanych studentom z codziennego życia, od smartfonów przez internet po nawigację satelitarną.

Sprawdzanie wiedzy

Rozwiązania przykładowych zadań zamieszczonych w każdym rozdziale zazwyczaj podzielone są na trzy części: *Strategia rozwiązania*, *Rozwiązanie* i *Znaczenie*, które pokazują, jak podejść do zadania, jak przekształcić równania i wreszcie jak sprawdzić i zinterpretować wynik. Dodatkowo pod przykładami często znaleźć można sekcję **Sprawdź, czy rozumiesz**, która zawiera pytania i odpowiedzi pomagające studentom utrwalić sobie kluczowe wnioski z przykładu. Sekcja **Strategie rozwiązywania zadań** zamieszczona w każdym rozdziale rozbija sposoby podchodzenia do różnych problemów na łatwe do zapamiętania kroki. Na końcu każdego rozdziału znajduje się również zbiór różnorodnych zadań umożliwiający sprawdzenie zdobytej wiedzy.

> **Pytania** nie wymagają żadnych obliczeń. Sprawdzają, czy student rozumie najważniejsze pojęcia.
>
> **Zadania** przypisane do każdego podrozdziału sprawdzają umiejętność podejścia do problemu i zastosowania teorii do praktycznych sytuacji.
>
> **Zadania dodatkowe** wymagają zastosowania wiedzy z całego rozdziału, zmuszając studentów do wybrania właściwych równań i pojęć. Niektóre z tych zadań, opisane jako **Nieracjonalne wyniki**, żądają od studenta oceny wiarygodności uzyskanych wyników i wyjaśnienia, dlaczego są nieracjonalne i które z założeń mogły nie być prawidłowe.
>
> **Zadania trudniejsze** rozszerzają problematykę o intrygujące lecz trudne sytuacje.

Odpowiedzi do wszystkich zadań umieszczono na końcu podręcznika w sekcji **Rozwiązania zadań**.

Materiały dodatkowe

Zasoby dla studentów i wykładowców

Na stronie OpenStax.org (http://openstax.org) można znaleźć materiały dodatkowe w języku angielskim, przeznaczone zarówno dla studentów jak i wykładowców — między innymi przewodniki użytkownika, slajdy w formacie PowerPoint, a także arkusze odpowiedzi i rozwiązań dla prowadzących zajęcia i studentów. Aby uzyskać dostęp do materiałów dla wykładowców, należy posiadać zweryfikowane konto instruktorskie, o które można poprosić przy logowaniu na OpenStax.org (http://openstax.org) . Zasoby te są ściśle dopasowane do podręcznika.

Oferta partnerów OpenStax

Partnerzy projektu OpenStax pomagają dostarczać wysokiej jakości zasoby edukacyjne, w cenie dostępnej dla wszystkich studentów i wykładowców. Ich narzędzia zostały zintegrowane z podręcznikami dostępnymi w języku angielskim. Aby uzyskać dostęp do zasobów i usług oferowanych przez naszych partnerów, odwiedź stronę danego podręcznika na OpenStax.org (http://openstax.org) .

Autorzy *Fizyki dla szkół wyższych*

Openstax Polska

Podręcznik *Fizyka dla szkół wyższych* powstał w ramach projektu OpenStax Polska fundacji Katalyst Education. Więcej informacji: OpenStax.pl (http://openstax.pl) .

Misją fundacji Katalyst Education, opartą na filozofii Otwartych Zasobów Edukacyjnych, jest wyrównywanie szans wszystkich uczniów w Polsce, poprzez tworzenie cyfrowych narzędzi edukacyjnych i dostarczanie usług wspierających optymalne ich wykorzystanie.

Katalyst Education

Grzybowska 5a

00-132 Warszawa

Polska

www: katalysteducation.org (http://katalysteducation.org)

Katalyst Education jest częścią grupy White Star Foundations w Polsce. Więcej informacji: whitestarfoundations.org (http://whitestarfoundations.org) .

Tłumacze i autorzy adaptacji

prof. UW dr hab. Adam Bednorz, Uniwersytet Warszawski

lic. Anna Błachowicz, Politechnika Śląska

dr hab. Tomasz Błachowicz, Politechnika Śląska

dr inż. Beata Bochentyn, Politechnika Gdańska

mgr Juliusz P. Braun, Uniwersytet Warszawski

dr Bartosz Brzostowski, Uniwersytet Zielonogórski

dr inż. Roman Bukowski, Politechnika Śląska

prof UAM dr hab. Gotard Burdziński, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

inż. Robert Chudek, Politechnika Warszawska

dr hab. Roman Gołębiewski, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

prof. UAM dr hab. Krzysztof Grygiel, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

dr inż. Piotr Grygiel, Politechnika Gdańska

prof. dr hab. Marian Grynberg, Uniwersytet Warszawski

mgr Katarzyna Gwóźdź, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Grzegorz Harań, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Andrzej Janutka, Politechnika Wrocławska

dr Wojciech Kamiński, Uniwersytet Wrocławski

dr hab. Dobrosława Kasprowicz, Politechnika Poznańska

prof. dr hab. inż. Zbigniew Kąkol, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

prof. dr hab. Adam Lipowski, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

prof. dr hab. inż. Paweł Machnikowski, Politechnika Wrocławska

prof. dr hab. Jacek Majewski, Uniwersytet Warszawski

prof. UWr dr hab. Leszek Markowski, Uniwersytet Wrocławski

dr inż. Aleksandra Mielewczyk-Gryń, Politechnika Gdańska

dr Brygida Mielewska, Politechnika Gdańska

dr inż. Tadeusz Miruszewski, Politechnika Gdańska

prof. UZ dr hab. Jarosław Piskorski, Uniwersytet Zielonogórski

dr Krzysztof Pomorski, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

prof. dr hab. Ewa Popko, Politechnika Wrocławska

prof. dr hab. inż. Andrzej Radosz, Politechnika Wrocławska

dr hab. Tomasz Runka, Politechnika Poznańska

prof. PWr dr hab. inż. Włodzimierz Salejda, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Paweł Scharoch, Politechnika Wrocławska

dr inż. Kazimierz Sierański, Politechnika Wrocławska

dr inż. Piotr Sitarek, Politechnika Wrocławska

dr hab. inż. Gabriela Statkiewicz-Barabach, Politechnika Wrocławska

dr inż. Radosław Strzałka, Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

dr inż. Jan Szatkowski, Politechnika Wrocławska

dr Izabela Szyperska, Politechnika Poznańska

dr Agnieszka Tomaszewska, Akademia im. Jana Długosza w Częstochowie

dr inż. Bartłomiej Toroń, Politechnika Śląska

dr inż. Dominika Trefon-Radziejewska, Politechnika Śląska

dr inż. Sebastian Wachowski, Politechnika Gdańska

dr Jakub Wagner, Uniwersytet Warszawski

mgr Mateusz Wlazło, Uniwersytet Warszawski

prof. dr hab. Antoni Wójcik, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

mgr inż. Klaudia Żerańska, Politechnika Warszawska

Recenzenci

prof. dr hab. Kazimierz Fabisiak

dr Piotr Goldstein

prof. dr hab. inż. Zbigniew Kąkol

mgr inż. Michał Maciejewski

prof. dr hab. Paweł Machnikowski

dr Brygida Mielewska

prof. dr hab. Jan Mostowski

prof. AGH dr hab. Antoni Paja

prof. dr hab. Ewa Popko

Zespół redakcyjny

Redakcja merytoryczna

dr Agnieszka Tomaszewska

Waldemar Pławski

Korekta językowa

Daria Danilczyk

Monika Hryniewicka

Maria Kowalczyk

Małgorzata Kryska-Mosur

Marcin Kuźma

Aleksandra Marczuk

Aleksandra Sekuła

Korekta techniczna i merytoryczna

Adam Anglart

Mariusz Bardyn

Patryk Bojarski

Weronika Brzezińska

Alicja Kozłowska

Katarzyna Ludwiczak

Aleksandra Rafalak

Mateusz Saniewski

Cezary Turski

Natalia Wilkus

Autorzy *University Physics*

Autorzy prowadzący

Samuel J. Ling, Truman State University

Prof. Samuel Ling od 25 lat wykłada fizykę ogólną i specjalistyczną na Truman State University, będąc jednocześnie dyrektorem Wydziału Fizyki. Prof. Ling ma dwa stopnie doktorskie uzyskane na Boston University, jeden z chemii, a drugi z fizyki. Zanim rozpoczął pracę na Truman State University, był szefem zespołu badawczego w Indian Institute of Science w Bangalore. Prof. Ling jest również autorem podręcznika *A First Course in Vibrations and Waves*, wydanego przez Oxford University Press. Prof. Ling ma ogromny dorobek w dziedzinie badań nad kształceniem fizyków. Opublikował pracę na temat metod współpracy w nauczaniu fizyki. Za swój wkład w innowacyjne metody nauczania otrzymał nagrody Truman Fellow i Jepson Fellow. Jego publikacje dotyczyły dziedzin takich jak kosmologia, fizyka ciała stałego i optyka nieliniowa.

Jeff Sanny, Loyola Marymount University

Dr Jeff Sanny uzyskał licencjat w dziedzinie fizyki w Harvey Mudd College w 1974 roku, a następnie stopień doktora w dziedzinie fizyki ciała stałego na University of California w Los Angeles w 1980 roku. Jesienią 1980 roku rozpoczął pracę na Loyola Marymount University, gdzie pełnił funkcję dyrektora wydziału oraz prodziekana. Nauczanie podstaw fizyki to jedno z jego ulubionych zajęć na uniwersytecie. Jest także wielkim propagatorem uczestnictwa studentów w badaniach naukowych i od wielu lat prowadzi studenckie koło naukowe zajmujące się fizyką przestrzeni kosmicznej.

Bill Moebs, PhD

Dr William Moebs uzyskał licencjat i doktorat w dziedzinie fizyki (w latach 1959 i 1965) na University of Michigan. Następnie na tej samej uczelni przez rok zajmował się pracą naukową, kontynuując swoje badania w dziedzinie fizyki cząstek elementarnych. W 1966 roku przeszedł na uniwersytet Indiana Purdue Fort Wayne (IPFW), gdzie w latach 1971-1979 piastował stanowisko dyrektora Wydziału Fizyki. W 1979 roku podjął pracę na Loyola Marymount University (LMU), kierując tamtejszym Wydziałem Fizyki w latach 1979-1986. Od 2000 roku jest na emeryturze. Publikował prace z zakresu fizyki cząstek elementarnych, kinetyki reakcji chemicznych, podziałów komórkowych, fizyki atomowej oraz nauczania fizyki.

Pozostali autorzy

David Anderson, Albion College

Daniel Bowman, Ferrum College

Dedra Demaree, Georgetown University

Gerald Friedman, Santa Fe Community College

Lev Gasparov, University of North Florida

Edw. S. Ginsberg, University of Massachusetts

Alice Kolakowska, University of Memphis

Lee LaRue, Paris Junior College

Mark Lattery, University of Wisconsin

Richard Ludlow, Daniel Webster College

Patrick Motl, Indiana University–Kokomo

Tao Pang, University of Nevada–Las Vegas

Kenneth Podolak, Plattsburgh State University

Takashi Sato, Kwantlen Polytechnic University

David Smith, University of the Virgin Islands

Joseph Trout, Richard Stockton College

Kevin Wheelock, Bellevue College

Recenzenci

Salameh Ahmad, Rochester Institute of Technology–Dubai
John Aiken, University of Colorado–Boulder
Anand Batra, Howard University
Raymond Benge, Terrant County College
Gavin Buxton, Robert Morris University
Erik Christensen, South Florida State College
Clifton Clark, Fort Hays State University
Nelson Coates, California Maritime Academy
Herve Collin, Kapi'olani Community College
Carl Covatto, Arizona State University
Alexander Cozzani, Imperial Valley College
Danielle Dalafave, The College of New Jersey
Nicholas Darnton, Georgia Institute of Technology
Robert Edmonds, Tarrant County College
William Falls, Erie Community College
Stanley Forrester, Broward College
Umesh Garg, University of Notre Dame
Maurizio Giannotti, Barry University
Bryan Gibbs, Dallas County Community College
Mark Giroux, East Tennessee State University
Matthew Griffiths, University of New Haven
Alfonso Hinojosa, University of Texas–Arlington
Steuard Jensen, Alma College
David Kagan, University of Massachusetts
Jill Leggett, Florida State College–Jacksonville
Sergei Katsev, University of Minnesota–Duluth
Alfredo Louro, University of Calgary
James Maclaren, Tulane University
Ponn Maheswaranathan, Winthrop University
Seth Major, Hamilton College
Oleg Maksimov, Excelsior College
Aristides Marcano, Delaware State University
Marles McCurdy, Tarrant County College
James McDonald, University of Hartford
Ralph McGrew, SUNY–Broome Community College
Paul Miller, West Virginia University
Tamar More, University of Portland
Farzaneh Najmabadi, University of Phoenix
Richard Olenick, The University of Dallas
Christopher Porter, Ohio State University
Liza Pujji, Manakau Institute of Technology
Baishali Ray, Young Harris University
Andrew Robinson, Carleton University

Aruvana Roy, Young Harris University
Abhijit Sarkar, The Catholic University of America
Gajendra Tulsian, Daytona State College
Adria Updike, Roger Williams University
Clark Vangilder, Central Arizona University
Steven Wolf, Texas State University
Alexander Wurm, Western New England University
Lei Zhang, Winston Salem State University
Ulrich Zurcher, Cleveland State University

1 | NATURA ŚWIATŁA



Rysunek 1.1 Z powodu zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia pod powierzchnią wody powstaje obraz pływaczki znajdującej się pod wodą, co zarejestrował aparat. Koliste zagłębienie w środkowej części zdjęcia to zakrzywiona powierzchnia wody. Ze względu na zbyt duży kąt obserwacji całkowite wewnętrzne odbicie nie występuje w górnej części zdjęcia, gdzie widać otoczenie basenu nad powierzchnią wody. Źródło: „jayhem”/Flickr

Treść rozdziału

Wstęp

Zwykle rozważania dotyczące światła wiążą się z dwoma podstawowymi pytaniami: (1) jaka jest natura światła i (2) jak światło zachowuje się w różnych warunkach. Odpowiedzi na te pytania można znaleźć w równaniach Maxwella (rozdział Fale elektromagnetyczne (https://cnx.org/content/m65888/latest/)), które przewidują istnienie fal elektromagnetycznych i ich zachowanie. Światło widzialne obejmuje pewien zakres fal elektromagnetycznych, do których zaliczamy również fale radiowe i podczerwone, promieniowanie ultrafioletowe i rentgenowskie. Co ciekawe, nie wszystkie zjawiska związane ze światłem dają się wytłumaczyć na gruncie teorii Maxwella. Doświadczenia wykonane na początku XX wieku dowodzą korpuskularnych (podobnych do cząstek) właściwości światła. Idea, że światło może posiadać obie właściwości – falową i korpuskularną – nazywana jest dualizmem korpuskularno-falowym i omawiamy ją w rozdziale Fotony i fale materii.

W tej części omówione zostaną podstawowe właściwości światła. W następnych podrozdziałach wyjaśnimy, jak zachowuje się światło, kiedy napotka na swojej drodze różne elementy optyczne, np. zwierciadła, soczewki czy szczeliny.

1.1 | Rozchodzenie się światła

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

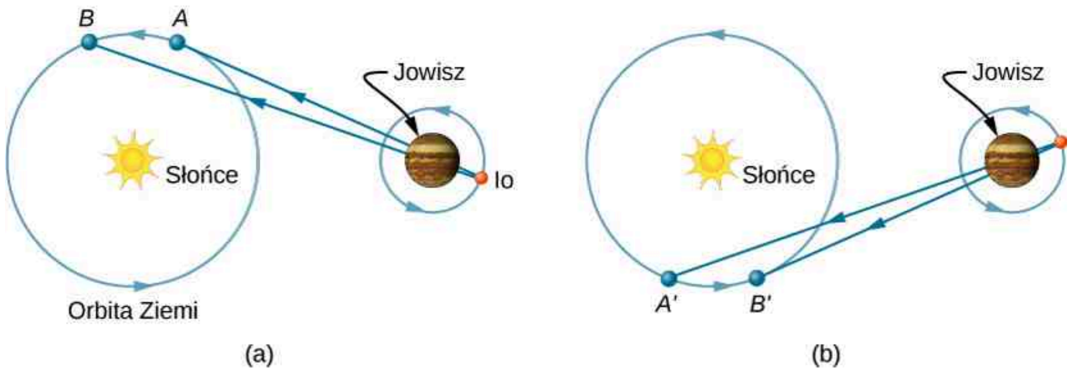
- wyznaczać współczynnik załamania na podstawie prędkości światła w ośrodku;
- opisywać możliwe sposoby rozchodzenia się światła.

Prędkość światła w próżni c jest jedną z podstawowych stałych fizycznych. W rozdziale Teoria względności przekonamy się, że jest to podstawowe założenie teorii względności Alberta Einsteina. W miarę zwiększania dokładności pomiarów prędkości światła stwierdzono, że różni obserwatorzy, nawet ci poruszający się z dużymi prędkościami względem siebie, rejestrują tę samą wartość prędkości światła. Natomiast w ośrodkach materialnych prędkość światła zmienia się w ściśle określony sposób, zależny od ośrodka. W dalszych rozdziałach przekonamy się o znaczeniu i konsekwencjach powyższych faktów.

Prędkość światła: pierwsze pomiary

Pierwszy pomiar prędkości światła został wykonany przez duńskiego astronoma **Olego Rømera (1644–1710)** w 1675 roku. Obserwując orbitę Io, jednego z czterech największych księżyców Jowisza, odkrył, że jego okres obiegu dookoła planety wynosi $42{,}5\,\text{h}$. Odkrył on także, że wartość ta zmienia się w zakresie kilku sekund w zależności od położenia Ziemi na orbicie. Rømer zorientował się, że powodem tych wahań jest skończona wartość prędkości światła i można na tej podstawie wyznaczyć jej wartość c.

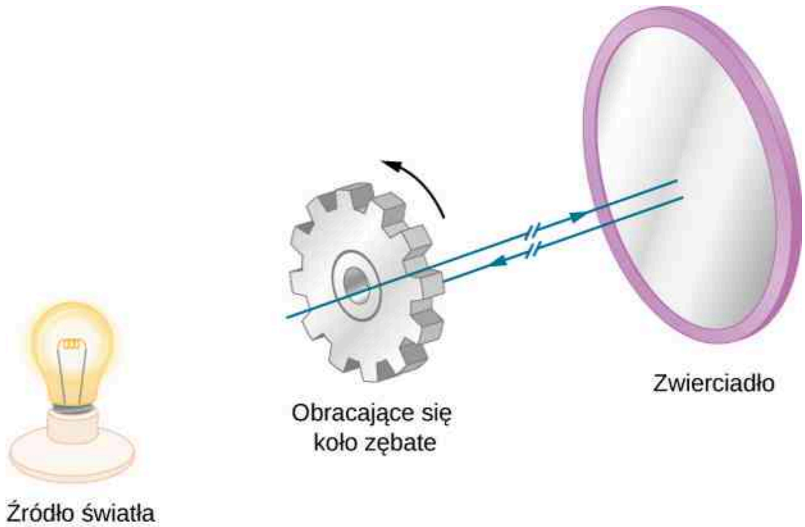
Rømer wyznaczył okres obiegu Io, dokonując pomiaru odstępów czasu pomiędzy kolejnymi jego zaćmieniami przez Jowisza. Rysunek 1.2 (a) przedstawia układ planet, gdy dokonywany jest pomiar z Ziemi w takich miejscach orbity, w których Ziemia oddala się od Jowisza. W punkcie A ona, Jowisz i Io leżą w jednej linii (wyrównanie). Po pewnym czasie taka sytuacja nie ulega zmianie, Ziemia znajduje się w punkcie B, a światło musi do niej dotrzeć. Ponieważ punkt B znajduje się dalej od Jowisza niż punkt A, światło potrzebuje więcej czasu na dotarcie do naszej planety, gdy znajduje się ona w punkcie B. Wyobraźmy sobie, że minęło 6 miesięcy i planety są ustawione tak jak pokazano na Rysunku 1.2 (b). Pomiar okresu dla Io rozpoczyna się, gdy Ziemia znajduje się w punkcie A', a Io jest zaćmiony przez Jowisza. Kolejne zaćmienie następuje, kiedy Ziemia znajduje się w punkcie B'. W tym przypadku światło potrzebuje mniej czasu, aby do niej dotrzeć, ponieważ punkt B' leży bliżej Jowisza niż A'. Zatem przedział czasu pomiędzy następującymi po sobie zaćmieniami Io widzianymi z punktów A' i B' jest mniejszy niż przedział czasu pomiędzy zaćmieniami widzianymi z punktów A i B. Różnica w pomiarze wspomnianych przedziałów czasu oraz znajomość odległości pomiędzy Ziemią i Jowiszem pozwoliły Rømerowi obliczyć prędkość światła równą $2 \cdot 10^8\,\text{m}/\text{s}$, co jest wartością mniejszą o 33% od obecnie przyjętej wartości prędkości światła (tablicowej).



Rysunek 1.2 Astronomiczna metoda Rømera służąca do wyznaczenia prędkości światła. Pomiary okresu Io wykonane w konfiguracjach przedstawionych w części (a) i (b) rysunku różnią się, ponieważ długość drogi i czas potrzebny do jej pokonania zwiększają się z A do B (a), ale maleją z A' do B' (b).

Pierwszego zakończonego sukcesem laboratoryjnego pomiaru prędkości światła dokonał **Armand Fizeau (1819–1896)** w 1849 roku za pomocą obracającego się koła zębatego umieszczonego na wierzchołku jednego wzgórza oraz zwierciadła umieszczonego na wierzchołku drugiego wzgórza oddalonego o $8633\,\text{m}$ (Rysunek 1.3). Silne źródło światła zostało umieszczone za kołem w taki sposób, żeby obracające się koło przesłaniało wiązkę światła, tworząc następu-

jące po sobie impulsy światła. Prędkość koła była dobrana tak, żeby powracające światło nie docierało do obserwatora znajdującego się za kołem. Było to możliwe tylko wtedy, gdy koło obracało się o kąt odpowiadający przemieszczeniu równemu $n + 1 / 2$ zębów w czasie, gdy impulsy światła poruszały się do zwierciadła i z powrotem. Znając prędkość kątową koła, liczbę zębów i odległość do zwierciadła, Fizeau wyznaczył prędkość światła równą $3{,}15 \cdot 10^8 \text{ m / s}$, która jest większa tylko o 5% od wartości tablicowej.



Rysunek 1.3 Metoda pomiaru prędkości światła zastosowana przez Fizeau. Prędkość koła jest dobrana w taki sposób, że zęby koła przesłaniają promień światła odbitego od zwierciadła.

Francuski fizyk **Jean Foucault (1819–1868)** zmodyfikował aparaturę Fizeau, zastępując koło zębate obracającym się lustrem. Zmierzona przez niego w 1862 roku prędkość światła wynosiła $2{,}98 \cdot 10^8 \text{ m / s}$ i różniła się tylko o $0{,}6\%$ od wartości tablicowej. Metody Foucaulta użył **Albert Michelson (1852–1931)**, udoskonalając technikę pomiaru począwszy od pierwszych doświadczeń wykonanych w 1878 roku, by w 1926 roku wyznaczyć wartość prędkości światła c równą $(2{,}997 \pm 0{,}004) \cdot 10^8 \text{ m / s}$.

Dzisiaj prędkość światła jest określona z bardzo dużą dokładnością. Prędkość światła w próżni c jest tak istotną wielkością, że uznaje się ją za jedną z podstawowych stałych fizycznych, a jej dokładna wartość wynosi

$$c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m / s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}. \tag{1.1}$$

Przybliżonej wartości $3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$ używa się zawsze wtedy, gdy trzycyfrowa dokładność jest wystarczająca.

Prędkość światła w ośrodku materialnym

Prędkość światła w ośrodku materialnym jest mniejsza niż w próżni, ponieważ światło oddziałuje z atomami w danym ośrodku. Prędkość światła zależy silnie od rodzaju ośrodka, ponieważ jego oddziaływanie z materią zmienia się dla różnych atomów, sieci krystalicznych i innych struktur. Można zdefiniować stałą materiałową, która opisuje prędkość światła w danym ośrodku, zwaną **współczynnikiem załamania** n (ang. **index of refraction**)

$$n = \frac{c}{v}, \tag{1.2}$$

gdzie v jest prędkością światła w danym ośrodku.

Ponieważ prędkość światła w ośrodku materialnym jest zawsze mniejsza od c i równa c tylko w próżni, współczynnik załamania jest zawsze większy od jeden lub równy jeden dla próżni ($n \geq 1$). W Tabeli 1.1 podano współczynniki załamania dla wybranych substancji. Wartości te wyznaczone zostały dla określonej długości fali światła ($589\ \text{nm}$); należy pamiętać, że wartość współczynnika załamania zmienia się wraz z długością fali. Może to mieć ważne konsekwencje np. przy przejściu światła przez pryzmat, kiedy obserwujemy rozszczepienie światła białego na barwy składowe. Zauważmy, że dla gazów n jest bliskie 1. Wynika to z tego, że atomy w gazach znajdują się w dużych odległościach od siebie i światło porusza się z prędkością c w próżni występującej pomiędzy atomami. Gdy nie jest wymagana duża dokładność, przyjmuje się, że współczynnik załamania dla gazów $n = 1$. Chociaż prędkość światła v w różnych ośrodkach znacznie różni się od wartości prędkości światła c w próżni, to i tak przyjmuje dużą wartość.

Ośrodek	n
Gazy w temperaturze $0\ ^\circ\text{C}$, 1 atm	
Powietrze	1,000 293
Dwutlenek węgla	1,000 450
Wodór	1,000 139
Tlen	1,000 271
Ciecze w temperaturze $20\ ^\circ\text{C}$	
Benzen	1,501
Dwusiarczek węgla	1,628
Czterochlorek węgla	1,461
Etanol	1,361
Gliceryna	1,473
Woda (słodka)	1,333
Ciała stałe w temperaturze $20\ ^\circ\text{C}$	
Diament	2,419
Fluoryt	1,434
Szkło kronowe	1,520
Szkło typu flint	1,660
Lód (w temperaturze $0\ ^\circ\text{C}$)	1,309
Polistyren	1,490
Szkło akrylowe (pleksi)	1,510
Kwarc krystaliczny	1,544
Kwarc topiony	1,458
Chlorek sodu (sól)	1,544
Cyrkon (minerał)	1,923

Tabela 1.1 Współczynniki załamania światła różnych ośrodków. Współczynniki załamania wyznaczone dla światła o długości fali 589 nm (w próżni).

Przykład 1.1

Prędkość światła w biżuterii

Obliczmy prędkość światła w cyrkonie – materiale, który w jubilerstwie imituje diament.

Strategia rozwiązania

Możemy obliczyć prędkość światła v w ośrodku o znanym współczynniku załamania n dla tego materiału, używając równania $n = c / v$.

Rozwiązanie

Przekształcając powyższe równanie, otrzymujemy

$$v = \frac{c}{n}.$$

Współczynnik załamania dla cyrkonu podany w Tabeli 1.1 wynosi $1{,}923$, a wartość prędkości światła w próżni podana jest w Równaniu 1.1. Podstawiając te wartości, otrzymujemy

$$v = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m} / \text{s}}{1{,}923} = 1{,}56 \cdot 10^8 \text{ m} / \text{s}.$$

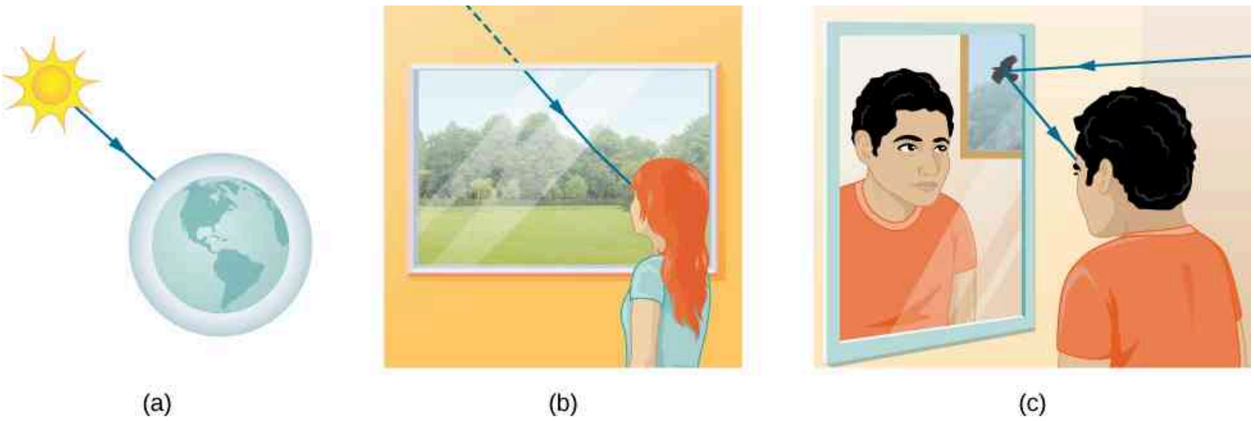
Znaczenie

Obliczona prędkość jest tylko nieznacznie większa od połowy prędkości światła w próżni, ale i tak bardzo duża w porównaniu z prędkościami, jakich doświadczamy w życiu codziennym. Jedyną substancją wymienioną w Tabeli 1.1, która ma większy współczynnik załamania od cyrkonu, jest diament. W dalszej części przekonamy się, że duży współczynnik załamania cyrkonu powoduje występowanie silniejszych rozbłysków światła niż w szkle, ale słabszych niż w diamencie.

1.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Tabela 1.1 pokazuje, że etanol i czysta woda mają bardzo podobne wartości współczynników załamania. O ile procent różnią się prędkości światła w tych cieczach?

Światło jako promień

W rozdziale Fale elektromagnetyczne (https://cnx.org/content/m65888/latest/) omówiono już właściwości falowe światła. W niniejszym rozdziale skupimy się głównie na opisie światła, posługując się pojęciem promienia. Istnieją trzy sposoby rozchodzenia się światła (Rysunek 1.4). Światło może poruszać się w próżni po linii prostej bezpośrednio ze źródła, tak jak w przypadku światła słonecznego docierającego do Ziemi. Może również poruszać się w kierunku obserwatora, przenikając przez różne ośrodki, takie jak powietrze i szkło. Ponadto światło może dotrzeć do obserwatora po odbiciu np. od zwierciadła. We wszystkich tych przypadkach możemy odwzorować drogę światła jako linię prostą, zwaną **promieniem** (ang. **ray**).



Rysunek 1.4 Trzy przypadki poruszania się światła ze źródła do innego miejsca. (a) Światło dociera do górnej części atmosfery Ziemi, poruszając się w próżni po linii prostej bezpośrednio ze źródła. (b) Światło dociera do osoby, poruszając się w powietrzu i szkle. (c) Światło może także odbijać się od różnych przedmiotów np. lustra (zwierciadła). W sytuacjach przedstawionych na rysunkach światło oddziałuje z wystarczająco dużymi obiektami, można więc przyjąć, że porusza się po liniach prostych, zwanych promieniami.

Różne doświadczenia pokazują, że gdy światło oddziałuje z przedmiotami o rozmiarach kilkakrotnie większych niż długość fali, to porusza się po liniach prostych i może być traktowane jak promień. Falowa natura światła nie ujawnia się w takich sytuacjach. Ponieważ długość fali światła widzialnego jest mniejsza od 1 μm (tysięczna część milimetra), to w wielu codziennych sytuacjach, kiedy napotykane obiekty są większe od mikrometra, światło może być traktowane jak promień. Na przykład, gdy światło napotyka na swojej drodze wystarczająco duży przedmiot, który możemy zobaczyć „gołym okiem” (np. monetę), zachowuje się jak promień z pominięciem właściwości falowych.

W tych wszystkich przypadkach możemy odwzorować drogę światła jako linię prostą. Światło może zmieniać kierunek, gdy napotyka na swojej drodze przedmioty (np. zwierciadło) lub przechodzi z jednego ośrodka materialnego do drugiego (np. przechodząc z powietrza do szkła), ale wtedy nadal porusza się wzdłuż linii prostej, czyli jako promień. Słowo „promień” ma swoje źródło w matematyce i oznacza linię prostą wychodzącą z pewnego punktu. Dobrym przykładem jest promień światła laserowego. Model promienia świetlnego opisuje drogę, po której biegnie światło.

Ponieważ światło porusza się po liniach prostych, a zmiana jego kierunku wynika z oddziaływania z ośrodkami materialnymi, sposób jego poruszania można opisać, sięgając do geometrii i prostej trygonometrii. Dział optyki, w którym zjawiska optyczne tłumaczy się przy użyciu pojęcia promienia, nazywany jest **optyką geometryczną** (ang. **geometric optics**). Zmianę kierunku światła wynikającą z oddziaływania z materią opisują dwa prawa. Są to: prawo odbicia, w sytuacji gdy światło odbija się od materii, i prawo załamania, w sytuacji gdy światło przechodzi przez materię. Prawa te zostaną omówione w dalszej części niniejszego rozdziału.

1.2 | Prawo odbicia

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

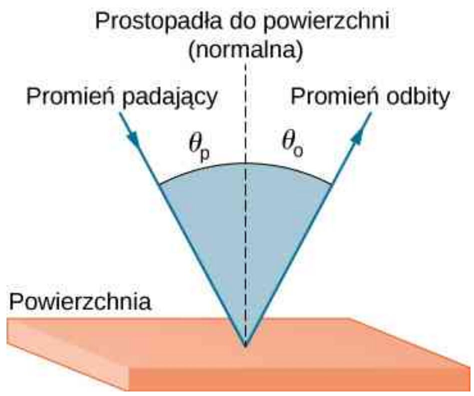
- rozumieć, jak światło odbija się od gładkiej, a jak od chropowatej powierzchni;
- opisywać działanie i zastosowania reflektorów narożnych (retroreflektorów).

Kiedy patrzymy w lustro lub dostrzegamy błysk światła słonecznego na tafli jeziora, mamy do czynienia z odbiciem. Gdy patrzymy na kawałek białego papieru, widzimy światło rozproszone na jego powierzchni. Duże teleskopy w celu uzyskania obrazu gwiazd i innych obiektów astronomicznych wykorzystują zjawisko odbicia.

Prawo odbicia (ang. **law of reflection**) mówi, że kąt odbicia jest równy kątowi padania

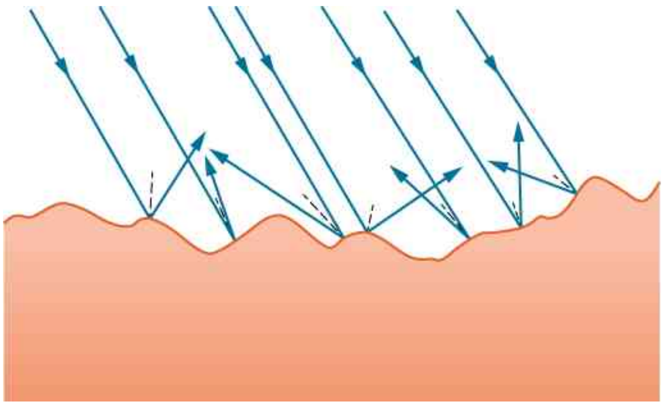
$$\theta_{\mathrm{o}} = \theta_{\mathrm{p}}. \tag{1.3}$$

Prawo odbicia ilustruje Rysunek 1.5, na którym widać, że kąt padania (odbicia) to kąt zawarty między **normalną** (ang. **normal**) do powierzchni odbijającej (załamującej) a promieniem padającym (odbitym). Kąt załamania to kąt zawarty między normalną do powierzchni między ośrodkami o różnych właściwościach optycznych (współczynnikach załamania) a promieniem załamanym.

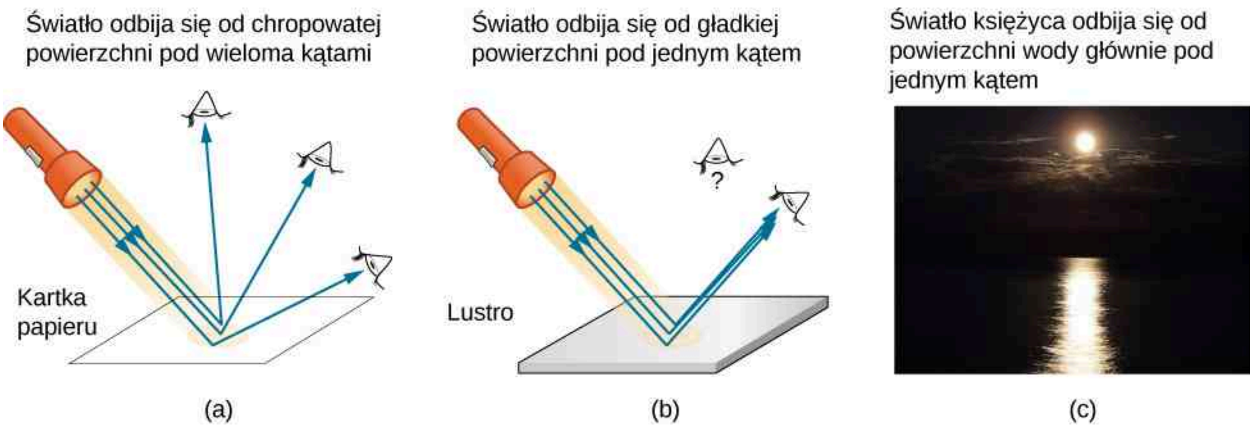


Rysunek 1.5 Prawo odbicia mówi, że kąt odbicia jest równy kątowi padania: $\theta_o = \theta_p$. Kąty są mierzone względem prostej prostopadłej do powierzchni (normalnej) w punkcie, w którym promień pada na powierzchnię.

Wiadomo, że światło odbija się od gładkich powierzchni. Rysunek 1.6 pokazuje natomiast, jak światło jest odbijane przez chropowatą powierzchnię. Ponieważ światło pada na różne części chropowatej powierzchni pod różnymi kątami, jest również odbijane w wielu różnych kierunkach, tzn. jest rozpraszane. Dzięki **rozpraszaniu światła** (ang. **scattering of light**) możemy zobaczyć kartkę papieru pod różnymi kątami i z każdej strony, jak pokazano na Rysunku 1.7 (a). Ludzie, ubrania, liście, ściany, jak wiele innych przedmiotów posiadają chropowate powierzchnie i dzięki temu mogą być widoczne ze wszystkich kierunków. Zwierciadło natomiast ma gładką powierzchnię (nierówności porównywalne z długością fali światła) i odbija światło pod określonym kątem, jak pokazano na Rysunku 1.7 (b). Nałożenie się tych efektów możemy zobaczyć, gdy światło Księżyca odbija się od powierzchni jeziora, jak pokazano na Rysunku 1.7 (c).

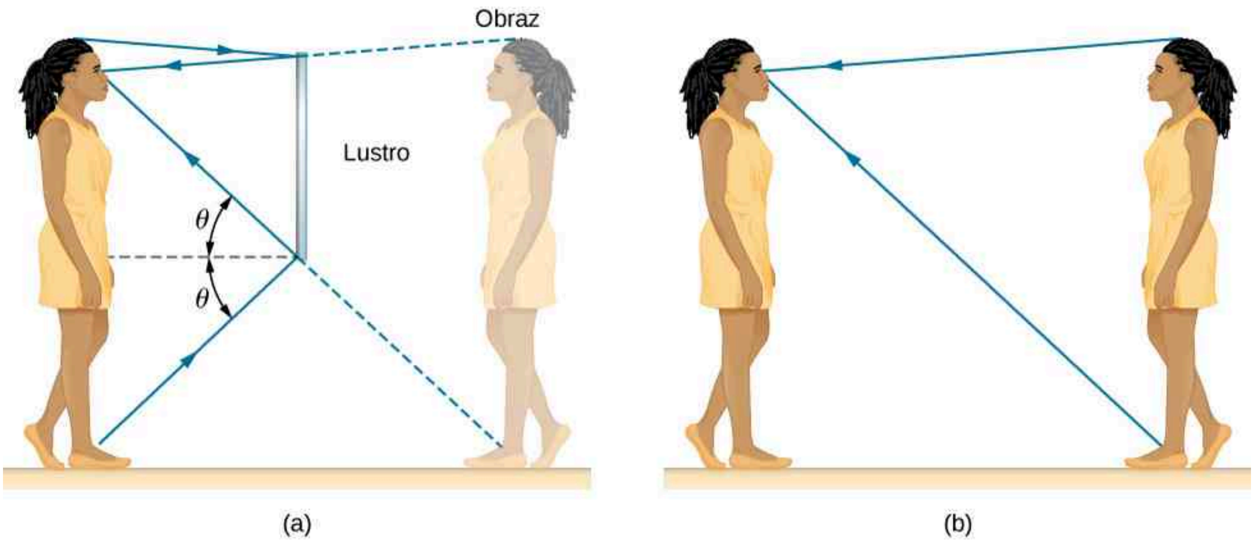


Rysunek 1.6 Światło jest rozpraszane, gdy odbija się od chropowatej powierzchni. Na powierzchnię pada wiele równoległych promieni, ale są one odbijane pod wieloma rożnymi kątami, ponieważ powierzchnia jest chropowata tzn. różne części powierzchni mają inne normalne, które nie są do siebie równoległe.



Rysunek 1.7 (a) Gdy oświetlamy kartkę papieru wieloma równoległymi promieniami, będą one widoczne pod wieloma różnymi kątami, ponieważ powierzchnia kartki jest chropowata i rozprasza światło. (b) Zwierciadło oświetlone przez wiele równoległych promieni odbija te promienie tylko w jednym kierunku, ponieważ jego powierzchnia jest bardzo gładka. Tylko obserwator znajdujący się pod pewnym ściśle określonym kątem widzi światło odbite. (c) Światło Księżyca nie jest odbijane punktowo od lustra wody jeziora, ponieważ jego powierzchnia, chociaż odbija światło, jest równocześnie nieregularna, pofalowana. Źródło (c): modyfikacja pracy Diega Torresa Silverstra

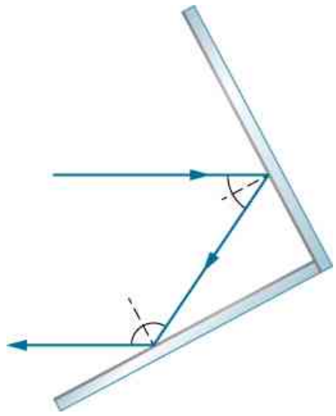
Gdy widzimy swoje odbicie w zwierciadle, mamy wrażenie, że powstały obraz znajduje się po jego drugiej stronie (Rysunek 1.8). Widzimy światło przychodzące z kierunku określonego przez prawo odbicia. Zaznaczone na rysunku kąty mają wartości zgodne z prawem odbicia. Z praw geometrii wynika, że powstały obraz znajduje się w tej samej odległości za zwierciadłem co przedmiot przed zwierciadłem (w tym przypadku obiektem jest dziewczyna oglądająca się w lustrze). Jeżeli zwierciadło umieszczone jest na ścianie w pokoju, wtedy wszystkie powstające w nim obrazy znajdują się za zwierciadłem, co sprawia wrażenie, że pokój wydaje się większy. Chociaż wytworzone obrazy przedmiotów pojawiają się w miejscach, gdzie fizycznie być nie mogą (za ścianą, na której umieszczone jest zwierciadło), nie są wytworem naszej wyobraźni – urojeniem. Obrazy wytworzone przez zwierciadła mogą być fotografowane oraz filmowane przez aparat fotograficzny czy kamerę i wyglądają dokładnie jak te widziane naszymi oczami (które również są przyrządami optycznym). Metody pozwalające zrozumieć powstawanie obrazów wytworzonych przez zwierciadła i soczewki omówione zostaną w rozdziale Optyka geometryczna i tworzenie obrazu.



Rysunek 1.8 (a) Obraz osoby stojącej przed zwierciadłem powstaje za nim. Dwa promienie padające na zwierciadło pod odpowiednimi kątami są przez nie odbijane i docierają do oczu osoby. Powstały obraz znajduje się za zwierciadłem w takiej samej odległości od nas, z jakiej patrzylibyśmy bezpośrednio na swoją siostrę bliźniaczkę bez zwierciadła (b).

Reflektory narożne (retroreflektory)

Promień świetlny padający na układ składający się z dwóch wzajemnie prostopadłych odbijających powierzchni jest odbity wstecz tak, że jego kierunek jest dokładnie równoległy do promienia padającego (Rysunek 1.9). Takie zjawisko zachodzi wtedy, gdy odbijające powierzchnie są wzajemnie prostopadłe, i nie zależy ono od kierunku padania (dowód na końcu tego modułu). Taki układ zwierciadeł jest nazywany **reflektorem narożnym** lub **retroreflektorem** (ang. **corner reflector**), ponieważ światło odbija się od zwierciadeł wewnątrz naroża. Reflektory narożne są podgrupą retroreflektorów, które odbijają promienie wstecz w kierunkach, z których promienie padające dotarły. Reflektor narożny może być także zbudowany z trzech wzajemnie prostopadłych powierzchni odbijających i chociaż przebieg promieni w takim układzie jest dużo bardziej złożony, znajdują one zastosowania w trójwymiarowych układach optycznych.



Rysunek 1.9 Promień świetlny, który pada na dwie wzajemnie prostopadłe powierzchnie odbijające, jest odbijany wstecz dokładnie równolegle względem kierunku promienia padającego.

Wiele niedrogich świateł odblaskowych mocowanych do rowerów, samochodów, jak również znaki ostrzegawcze zawierają układy reflektorów narożnych, które projektowane są tak, żeby zawracały promienie światła wstecznie, a więc w kierunku, z którego światło dotarło. Zamiast zwykłego odbijania światła w szerokim zakresie kątowym, retroreflektory stosowane w światłach odblaskowych zapewniają bardzo dobrą widoczność, jeśli obserwator i źródło światła znajdują się blisko siebie, tak jak kierowca i przednie światła jego samochodu. Astronauci z programu Apollo pozostawili reflektor narożny na Księżycu (Rysunek 1.10). Wiązka laserowa wysłana z Ziemi odbija się od pozostawionego na Księżycu reflektora narożnego, co umożliwia precyzyjny pomiar stopniowo wzrastającej, o kilka centymetrów rocznie, odległości Ziemi do Księżyca.



(a) (b)

Rysunek 1.10 (a) Astronauci pozostawili reflektor narożny na Księżycu w celu pomiaru stopniowo wzrastającej odległości orbitalnej Księżyca. (b) Na zdjęciu rowerowych elementów odblaskowych zrobionym w nocy widać jasne rozbłyski będące efektem oświetlenia lampą błyskową aparatu fotograficznego podczas robienia zdjęcia. Źródła: (a) NASA; (b) „Julo”/Wikimedia Commons

Reflektory narożne, które działają na takiej samej zasadzie jak inne optyczne elementy odbijające są rutynowo używane jako elementy odbijające promieniowanie radarowe (Rysunek 1.11) z zakresu częstotliwości radiowych. Małe łodzie są zazwyczaj wykonane z włókien szklanych lub drewna i słabo odbijają fale radiowe emitowane przez układy radarowe. Aby łodzie takie stały się widoczne dla radarów (w celu uniknięcia kolizji), elementy odbijające promieniowanie radarowe (reflektory radarowe) są zwykle umieszczane w miejscach znajdujących się względnie wysoko nad pokładem.



Rysunek 1.11 Reflektor radarowy podwieszony na olinowaniu jachtu jest rodzajem zwierciadła narożnego. Źródło: Tim Sheerman-Chase

Ciekawostką jest to, że w przypadku konstrukcji tajnych samolotów szpiegowskich, w przeciwieństwie do omówionych wcześniej łodzi, odbicia promieniowania radarowego powinny być jak najmniejsze, aby uniknąć wykrycia ich przez radary. Ważne jest, żeby przy projektowaniu kadłubów takich samolotów unikać kątów prostych.

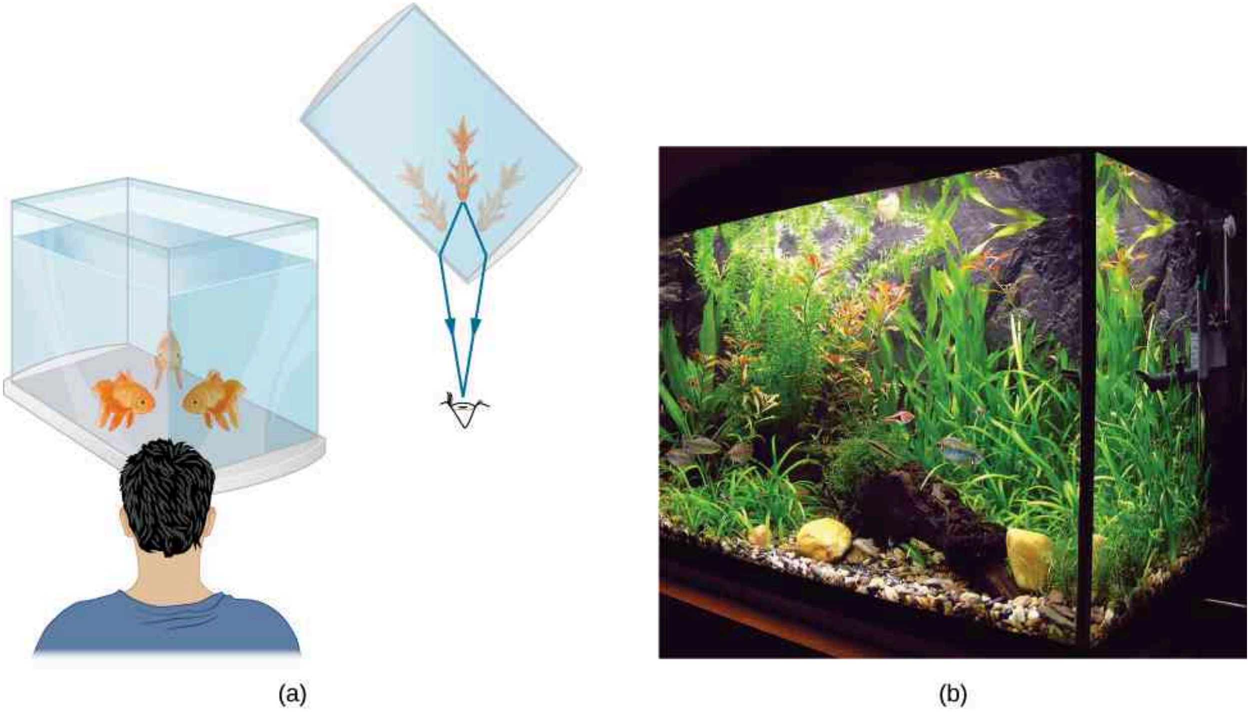
1.3 | Załamanie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

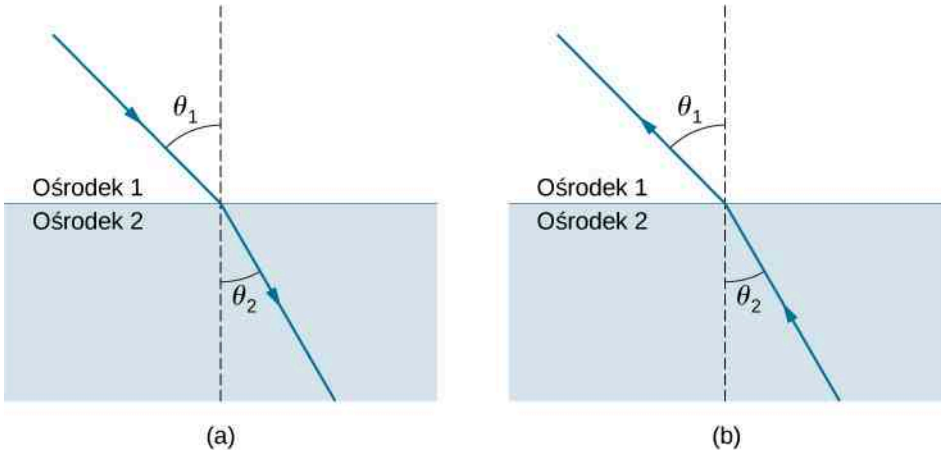
- opisywać, jak zmienia się kierunek promienia światła przy przejściu przez granicę dwóch ośrodków;
- stosować prawo załamania światła w rozwiązywaniu zadań.

Patrząc na akwarium, często dostrzegamy zadziwiające zjawiska. Na przykład może nam się wydawać, że ta sama ryba znajduje się w dwóch miejscach (Rysunek 1.12). Dzieje się tak, ponieważ światło biegnące od ryby do obserwatora zmienia swój kierunek, gdy wychodzi z akwarium. W tym przypadku światło, aby dotrzeć do naszych oczu, może poruszać się dwoma różnymi drogami. Zmiana kierunku biegu promienia światła wynikająca ze zmiany współczynnika załamania nazywa się **załamaniem** (ang. **refraction**) i zależy od zmiany prędkości światła $v = c / n$. Za wiele zjawisk optycznych, począwszy od najprostszych, takich jak przejście światła przez soczewkę, kończąc na transmisji danych w światłowodach, odpowiada załamanie światła.



Rysunek 1.12 (a) Patrząc na akwarium, widzimy tę samą rybę w dwóch różnych położeniach, ponieważ kierunek wiązki światła zmienia się, gdy przechodzi ona z wody do powietrza. W tym przypadku światło może dotrzeć do obserwatora dwoma różnymi drogami, więc ryba zdaje się znajdować w dwóch różnych miejscach. Takie ugięcie wiązki światła jest nazywane załamaniem i odpowiada za wiele innych zjawisk optycznych. (b) Zdjęcie przedstawia załamanie światła dla ryby znajdującej się w pobliżu górnej części akwarium.

Rysunek 1.13 pokazuje, jak promień światła zmienia kierunek, kiedy przechodzi z jednego ośrodka do drugiego. Tak jak wcześniej, kąty są mierzone względem prostej prostopadłej do powierzchni (normalnej) w punkcie, w którym promień światła przechodzi przez granicę ośrodków. (Część padającego światła zostaje odbita od powierzchni, jednakże w tej chwili skupimy się na świetle, które przechodzi do drugiego ośrodka). Zmiana kierunku promienia światła zależy od wartości współczynników załamania światła (podrozdział Rozchodzenie się światła) ośrodków, na granicy których zachodzi załamanie. W rozważanej sytuacji ośrodek 2 ma większy współczynnik załamania światła niż ośrodek 1, tzn. światło w ośrodku 2 rozchodzi się wolniej niż w ośrodku 1. Na Rysunku 1.13 (a) widzimy, że kierunek załamanego promienia światła odchyla się w stronę normalnej, kiedy światło przechodzi z ośrodka o mniejszym współczynniku załamania światła do ośrodka o większym współczynniku załamania. W sytuacji odwrotnej, jak pokazuje Rysunek 1.13 (b), kierunek promienia światła odchyla się od normalnej, gdyż światło przechodzi z ośrodka o większym współczynniku załamania do ośrodka o mniejszym współczynniku załamania. Przebieg promieni światła w obu przypadkach jest taki sam, ale poruszają się w przeciwną stronę.



Rysunek 1.13 Zmiana kierunku promienia światła zależy od tego, jak współczynnik załamania zmienia się przy przejściu z jednego ośrodka do drugiego. W sytuacjach pokazanych powyżej współczynnik załamania jest większy dla ośrodka 2 niż dla ośrodka 1. (a) Promień światła odchyla się w kierunku do normalnej, wnikając do ośrodka o większym współczynniku załamania światła. (b) Promień światła odchyla się od normalnej, wchodząc do ośrodka o mniejszym współczynniku załamania światła.

Zmiana kierunku promienia światła towarzysząca przejściu do innego ośrodka zależy zarówno od kąta padania, jak i wartości, o jaką zmienia się prędkość światła. Dla promienia światła o określonym kącie padania duża zmiana prędkości światła w ośrodku powoduje dużą zmianę kąta załamania. **Prawo załamania światła** (ang. **law of refraction**) znane również jako **prawo Snella** (ang. **Snell's law**; holenderski matematyk **Willebrord Snell (1580–1626)** odkrył je w 1621 r.) przyjmuje postać

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2, \tag{1.4}$$

gdzie n_1 i n_2 to współczynniki załamania światła w ośrodkach 1 i 2, a θ_1 i θ_2 to kąty pomiędzy promieniami światła a normalną do powierzchni w ośrodkach 1 i 2. Promień przychodzący jest nazywany promieniem padającym, promień wychodzący jest nazywany promieniem załamanym, a związane z nimi kąty nazwano odpowiednio kątem padania i kątem załamania.

Doświadczenia wykonane przez Snella dowiodły spełnienia prawa załamania, a charakterystyczna wielkość – współczynnik załamania n – może być przypisany do danego ośrodka, a jego wartość zmierzona. Snell nie wiedział wtedy, że prędkość światła zmienia się w różnych ośrodkach, a ma to kluczowe znaczenie, na przykład wtedy, gdy będziemy wyprowadzać teoretycznie prawo załamania, korzystając z zasady Huygensa w podrozdziale Zasada Huygensa.

Przykład 1.2

Wyznaczanie współczynnika załamania światła

Wyznaczmy współczynnik załamania światła dla ośrodka 2 z Rysunku 1.13 (a), przyjmując, że ośrodkiem 1 jest powietrze, kąt padania wynosi $30°$, a kąt załamania $22°$.

Strategia rozwiązania

Współczynnik załamania światła dla powietrza przyjmuje wartość 1 w większości przypadków (przy zaokrągleniu do czterech cyfr znaczących jest to $1{,}000$). Z tego wynika, że $n_1 = 1$. Z treści odczytujemy wartości kątów $\theta_1 = 30°$ i $\theta_2 = 22°$. Biorąc pod uwagę powyższe dane, widzimy, że jedyną niewiadomą w prawie Snella jest n_2. Korzystając z prawa Snella, wyznaczamy n_2.

Rozwiązanie

Z prawa Snella wiemy, że

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \Rightarrow n_2 = n_1 \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}.$$

Podstawiając dane liczbowe, otrzymujemy

$$n_2 = 1 \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 22°} = \frac{0{,}5}{0{,}375} = 1{,}33.$$

Znaczenie

Jest to współczynnik załamania światła w wodzie, który Snell mógł wyznaczyć, mierząc kąty i wykonując obliczenia. Wyznaczona wartość wynosi $1{,}33$, co jest odpowiednią wartością współczynnika załamania dla wody w każdej sytuacji, np. gdy promień światła przechodzi ze szkła do wody. Dzisiaj możemy łatwo sprawdzić, że współczynnik załamania zależy od prędkości światła w ośrodku, mierząc tę prędkość bezpośrednio.

Korzystając z symulacji (https://phet.colorado.edu/sims/html/bending-light/latest/bending-light_pl.html) , zbadaj ugięcie (załamanie) światła pomiędzy dwoma ośrodkami o różnych współczynnikach załamania. Zobacz, jak zmiana ośrodków z powietrza na wodę i szkło wpływa na kąt załamania. Skorzystaj z kątomierza, by zmierzyć kąty, i zobacz, czy jesteś w stanie odtworzyć układ z Przykładu 1.2. Dodatkowo, wykonując pomiar, potwierdź, że kąt odbicia jest równy kątowi padania.

Przykład 1.3

Większe kąty załamania

Przyjmijmy, że w sytuacji z Przykładu 1.2 światło przechodzi z powietrza do diamentu, a kąt padania wynosi $30°$. Obliczmy kąt załamania θ_2 w diamencie.

Strategia rozwiązania

Ponownie współczynnik załamania światła w powietrzu przyjmujemy jako $n_1 = 1$, oprócz tego dany jest kąt $\theta_1 = 30°$. Współczynnik załamania dla diamentu znajdujemy w Tabeli 1.1, $n_2 = 2{,}419$. Jedyną niewiadomą w prawie Snella jest kąt θ_2, który chcemy wyznaczyć.

Rozwiązanie

Z prawa Snella wyznaczamy $\sin\theta_2$

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1.$$

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\sin\theta_2 = \frac{1}{2{,}419}\sin 30° = 0{,}413 \cdot 0{,}5 = 0{,}207.$$

Zatem kąt załamania wynosi

$$\theta_2 = \arcsin(0{,}207) = 11{,}9°.$$

Znaczenie

Dla tego samego kąta padania $30°$ wyznaczony kąt załamania w diamencie jest znacznie mniejszy niż w wodzie ($11{,}9°$ zamiast $22°$ – zob. Przykład 1.2). Oznacza to większą zmianę kierunku biegu promienia w diamencie. Powodem dużej zmiany kierunku promienia jest duża zmiana współczynnika załamania światła (lub prędkości). Podsumowując, im większa jest zmiana prędkości światła w ośrodku, tym większa zmiana kierunku biegu promienia.

1.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** W Tabeli 1.1 widzimy, że kolejnym ciałem po diamencie o największym współczynniku załamania jest cyrkon. Jaki będzie nowy kąt załamania, jeśli diament z Przykładu 1.3 zostanie zastąpiony cyrkonem?

1.4 | Całkowite wewnętrzne odbicie

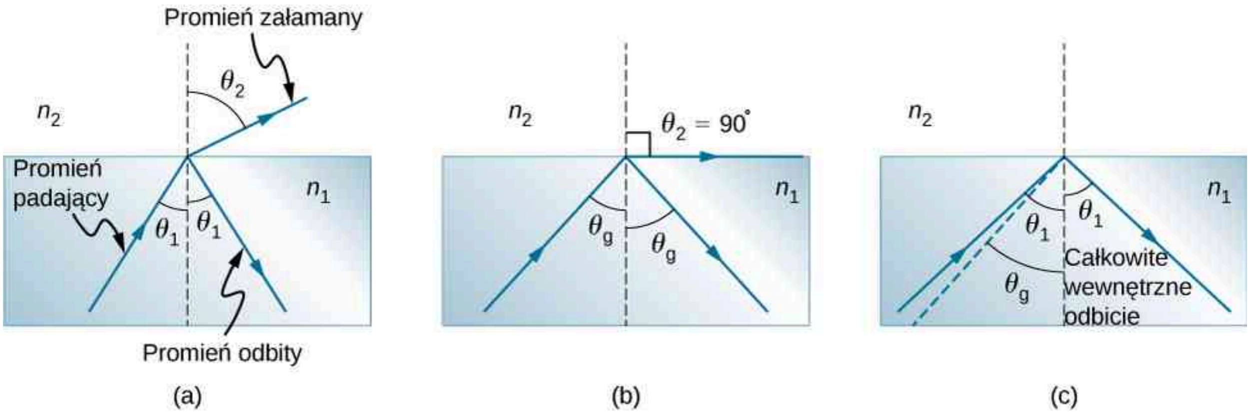
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia;
- opisywać zasadę działania i zastosowania światłowodów;
- tłumaczyć przyczynę pojawiających się rozbłysków światła w diamentach.

Wysokiej jakości zwierciadło potrafi odbić 90% padającego na nie światła, pochłaniając pozostałą część. Bardziej przydatne byłoby zwierciadło, które całkowicie odbija padające na nie światło. Co ciekawe, możemy osiągnąć całkowite odbicie światła, wykorzystując zjawisko załamania.

Rozważmy, co się dzieje, gdy promień światła pada na granicę pomiędzy dwoma ośrodkami, jak pokazano na Rysunku 1.14 (a). Część światła przechodzącego przez granicę ośrodków zostaje załamana; reszta ulega odbiciu. Jeżeli współczynnik załamania światła drugiego ośrodka jest mniejszy niż współczynnik załamania pierwszego ośrodka, promień odchyla się w kierunku **od** prostej prostopadłej (normalnej). (Ponieważ $n_1 > n_2$, kąt załamania jest większy od kąta padania, czyli $\theta_2 > \theta_1$). Teraz wyobraźmy sobie, co stanie się, jeżeli kąt padania θ_1 wzrośnie. Spowoduje to, że kąt załamania θ_2 również wzrośnie. Największym możliwym kątem załamania θ_2 jest kąt $90°$, jak pokazano na Rysunku 1.14 (b). **Kąt graniczny** (ang. **critical angle**) θ_g dla układu materiałów jest definiowany jako kąt padania θ_1, przy którym wartość kąta załamania θ_2 wynosi $90°$. To znaczy, że kąt θ_g jest kątem padania, dla którego kąt załamania $\theta_2 = 90°$. Jeżeli kąt padania θ_1 jest większy od kąta granicznego, jak pokazano na Rysunku 1.14 (c), całe światło ulega odbiciu na granicy ośrodków, a zjawisko to jest nazywane **całkowitym wewnętrznym odbiciem** (ang. **total internal reflection**; jak widać na rysunku, promienie odbite spełniają prawo odbicia, więc kąt odbicia jest równy kątowi padania we wszystkich trzech przypadkach).



Rysunek 1.14 (a) Promień światła przechodzi przez granicę, gdzie następuje zmniejszenie współczynnika załamania światła, to znaczy $n_2 < n_1$. Promień odchyla się od prostej prostopadłej (normalnej). (b) Kąt graniczny θ_g jest kątem padania, dla którego kąt załamania wynosi $90°$. (c) Całkowite wewnętrzne odbicie zachodzi wtedy, gdy kąt padania jest większy od kąta granicznego.

Prawo Snella określa zależność pomiędzy kątami i współczynnikami załamania światła. Opisuje je równanie w postaci

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 .$$

Gdy kąt padania jest równy kątowi granicznemu ($\theta_1 = \theta_g$), wtedy kąt załamania wynosi $90°$ ($\theta_2 = 90°$). Ponieważ $\sin 90° = 1$, prawo Snella w tym przypadku można zapisać w postaci

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 .$$

Kąt graniczny θ_g dla danego układu materiałów wynosi

$$\theta_g = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) \text{ dla } n_1 > n_2. \tag{1.5}$$

Całkowite wewnętrzne odbicie zachodzi dla dowolnego kąta padania większego od kąta granicznego θ_g i może zajść jedynie wtedy, gdy drugi ośrodek ma mniejszy współczynnik załamania niż pierwszy. Zauważmy, że to równanie zostało zapisane dla promienia światła, który przechodzi przez ośrodek 1 i odbija się od ośrodka 2, jak pokazano na Rysunku 1.14.

Przykład 1.4

Określanie kąta granicznego

Jaki jest kąt graniczny dla światła przechodzącego przez polistyrenową (rodzaj plastiku) rurę znajdującą się w powietrzu? Współczynnik załamania dla polistyrenu wynosi $1{,}49$.

Strategia rozwiązania

Współczynnik załamania światła w powietrzu, jak założyliśmy wcześniej, wynosi 1. Warunek mówiący, że współczynnik załamania światła drugiego ośrodka musi być mniejszy niż pierwszego, jest spełniony, więc możemy skorzystać z równania

$$\theta_g = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right),$$

by wyznaczyć kąt graniczny θ_g, gdzie $n_2 = 1$, a $n_1 = 1{,}49$.

Rozwiązanie

Po podstawieniu danych otrzymujemy

$$\theta_g = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}49}\right) = \arcsin\,(0{,}671) = 42{,}2°.$$

Znaczenie

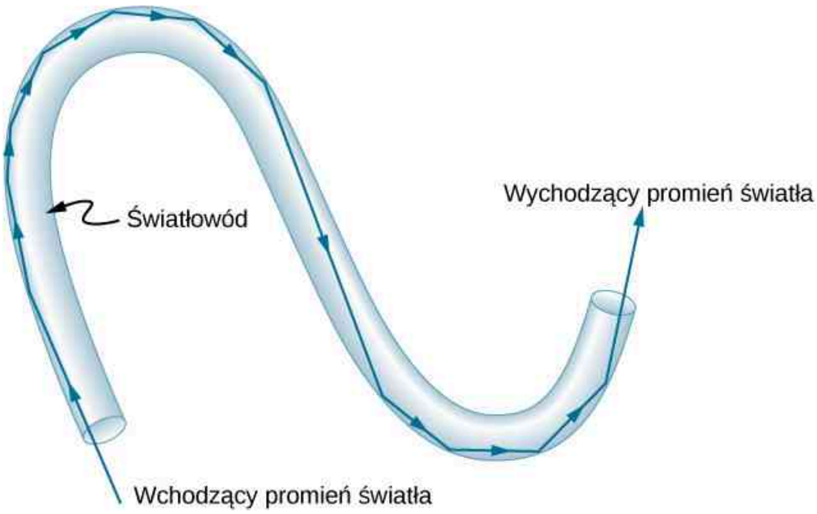
Otrzymany wynik oznacza, że każdy promień światła poruszający się wewnątrz polistyrenowej rury, który pada na wewnętrzną powierzchnię pod kątem większym niż $42{,}2°$, jest całkowicie odbijany. To sprawia, że wewnętrzna powierzchnia przezroczystego plastiku (polistyrenu) staje się idealną powierzchnią zwierciadlaną dla promieni światła, bez potrzeby pokrywania jej warstwą srebra, jak w przypadku zwykłych luster. Różne układy materiałów mają różne kąty graniczne, ale każdy układ, dla którego $n_1 > n_2$, może spowodować efekt całkowitego wewnętrznego odbicia. Wykonując takie same obliczenia jak wyżej, przekonamy się, że kąt graniczny dla promienia przechodzącego z wody do powietrza wynosi $48{,}6°$, z diamentu do powietrza $24{,}4°$, natomiast ze szkła flint do szkła kronowego $66{,}3°$.

1.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Na granicy pomiędzy powietrzem i wodą promienie światła mogą przechodzić z powietrza do wody i z wody do powietrza. W którym przypadku zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia nie może wystąpić?

We wstępie do tego rozdziału widzieliśmy zdjęcie pływaczki wykonane przez aparat fotograficzny znajdujący się pod wodą. Obraz pływaczki widoczny w górnej części fotografii, pozornie skierowanej ku górze, w istocie jest odbiciem pływaczki znajdującej się w dolnej części zdjęcia. Koliste zagłębienie w środkowej części zdjęcia znajduje się w rzeczywistości na powierzchni wody. Gdy patrzymy od dołu, niewzburzona powierzchnia wody wokół zagłębienia staje się idealną powierzchnią odbijającą dzięki całkowitemu wewnętrznemu odbiciu. Jednakże w pobliżu górnej krawędzi tego zdjęcia promienie padają na granicę ośrodków woda-powietrze pod kątami mniejszymi od kąta granicznego, pozwalając aparatowi uchwycić również obraz pływalni nad powierzchnią wody.

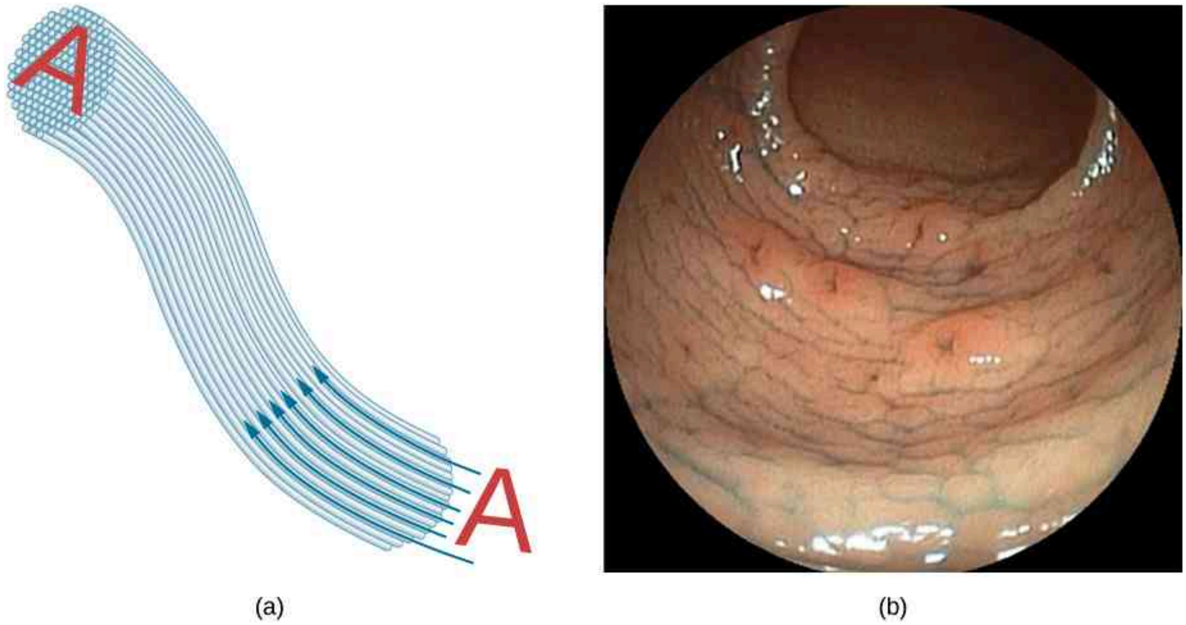
Światłowody – od endoskopów do telefonów

Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia znalazło powszechne zastosowanie w technologii **światłowodów** (ang. **optical fiber**). W telekomunikacji światłowody używane są do transmisji sygnałów telefonicznych, internetowych i telewizyjnych. W światłowodach do transmisji światła wykorzystywane są lekkie włókna plastikowe lub szklane. Ponieważ włókna te są cienkie, światło wchodzące do nich z dużym prawdopodobieństwem padać będzie na wewnętrzną powierzchnię pod kątem większym od kąta granicznego, a to oznacza, że zostanie całkowicie odbite (Rysunek 1.15). Współczynnik załamania światła poza włóknem musi być mniejszy niż w środku. Większość włókien światłowodowych cechuje zmienny współczynnik załamania światła, co pozwala wprowadzić więcej światła do światłowodu dzięki zjawisku całkowitego wewnętrznego odbicia. Promienie są odbijane w miejscach zagięć, jak pokazano na Rysunku 1.15, co sprawia, że światło wydaje się płynąć światłowodem, jak woda rurą.



Rysunek 1.15 Światło wchodzące do cienkiego światłowodu pada na jego wewnętrzną powierzchnię pod dużymi kątami (często bliskimi $90°$ względem normalnej) i zostaje całkowicie odbite, jeżeli kąty te przekraczają wartość kąta granicznego. Takie promienie biegną dalej wzdłuż włókna, nawet wzdłuż zagięć, ponieważ kąty padania i odbicia pozostają duże.

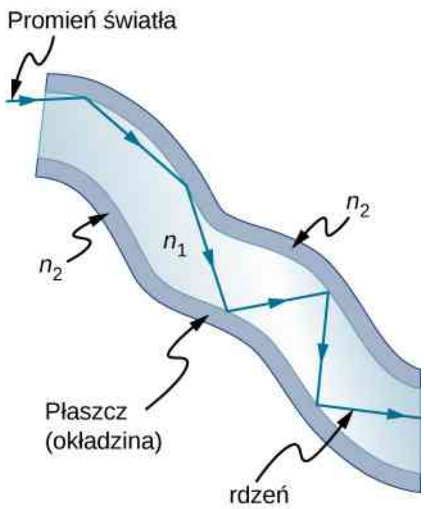
Wiązki światłowodów mogą być użyte do przekazu obrazu bez stosowania soczewek, jak pokazano na Rysunku 1.16. Obraz uzyskany przy użyciu urządzenia nazywanego **endoskopem** (ang. **endoscope**) przedstawia Rysunek 1.16 (b). Endoskopy są wykorzystywane do badania narządów wewnętrznych ciała człowieka. Sonda światłowodowa jest wprowadzana do organizmu przez naturalne otwory (gardło, nos) lub małe nacięcia chirurgiczne. Światło jest przekazywane przy użyciu jednej wiązki włókien, by oświetlić narządy wewnętrzne, natomiast światło odbite wraca do aparatury pomiarowej dzięki innej wiązce włókien.



Rysunek 1.16 (a) Obraz „A” jest przesyłany przez wiązkę światłowodów. (b) Endoskop służy do badania narządów wewnętrznych. Sonda światłowodowa zarówno wprowadza światło do wnętrza, jak i wyprowadza uzyskany obraz na zewnątrz, w tym przypadku badanym narządem jest ludzka nagłośnia (ruchoma chrząstka krtani) widoczna na zdjęciu obok. Źródło (b): „Med_Chaos”, CCBY.2.0 Wikimedia Commons

Światłowody zrewolucjonizowały techniki chirurgiczne i badania wewnętrznych organów ciała człowieka, poszerzając metody diagnostyki medycznej wraz z wykorzystaniem terapeutycznym. Na przykład zabieg operacyjny kolana czy stawu barkowego można wykonać techniką artroskopową, w której przez nacięcia wprowadzony zostaje do ciała endoskop, co umożliwia obserwację zabiegu na monitorze. Przy użyciu tego urządzenia można również pobierać wycinki tkanek do badań zewnętrznych (bez konieczności operacji). Elastyczność wiązki światłowodowej pozwala lekarzom poruszać się w małych i trudno dostępnych obszarach ciała, takich jak jelita, serce, naczynia krwionośne czy stawy. Transmisja wiązki laserowej o dużym natężeniu jest wykorzystywana do wypalania płytek utrudniających przepływ krwi w głównych tętnicach, jak również do dostarczania światła w celu uaktywnienia leków w chemioterapii. Światłowody przyspieszyły rozwój mikrochirurgii, dając możliwość operowania przez bardzo małe nacięcia, oraz chirurgii zdalnej, w której palce chirurgów nie muszą być w kontakcie z chorą tkanką.

Światłowody w wiązkach są otoczone materiałem okładzinowym tzw. płaszczem, który ma mniejszy współczynnik załamania światła niż rdzeń (Rysunek 1.17). Płaszcz zapobiega przechodzeniu światła pomiędzy włóknami w wiązce. Brak płaszcza mógłby sprawić, że światło przenikałoby pomiędzy włóknami znajdującymi się obok siebie, ponieważ ich współczynniki załamania są takie same. Światło nie przedostaje się do płaszcza (zachodzi całkowite wewnętrzne odbicie w rdzeniu) i dlatego żaden sygnał nie może przechodzić pomiędzy stykającymi się włóknami. W zamian światło propaguje się wzdłuż włókna, minimalizując straty sygnału i zapewniając uzyskanie wysokiej jakości obrazu na drugim końcu światłowodu. Płaszcz i dodatkowa powłoka ochronna sprawiają, że światłowody są giętkie i wytrzymałe.



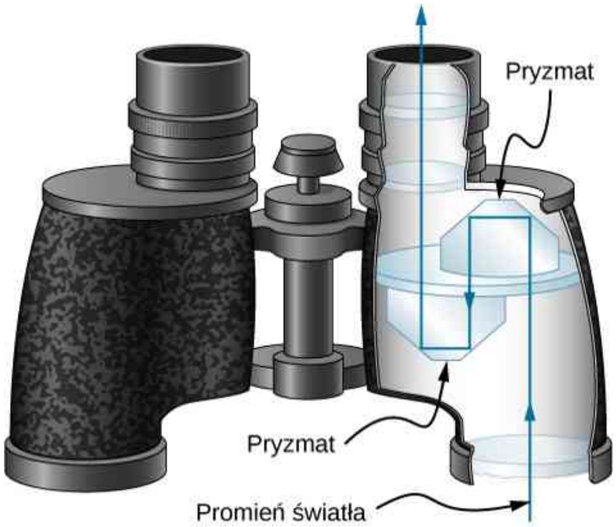
Rysunek 1.17 Włókna w wiązkach są otulane materiałem o mniejszym współczynniku załamania od rdzenia, by zapewnić całkowite wewnętrzne odbicie, nawet gdy włókna stykają się ze sobą.

Zaprojektowano i wytworzono na potrzeby światłowodów specjalne, małe soczewki, które mogą być przymocowane do końców wiązek włókien. Światło wychodzące z wiązki włókien może być ogniskowane przez takie soczewki w postaci małej plamki. W niektórych przypadkach plamka może być wykorzystana do skanowania, pozwalając na uzyskanie obrazu obszaru wewnątrz ciała o wysokiej rozdzielczości. Specjalne miniaturowe filtry optyczne umieszczone na końcu wiązki włókien umożliwiają obrazowanie wnętrza narządów na głębokość kilkudziesięciu mikrometrów bez konieczności nacinania ich powierzchni – to obszar medycyny znany jako diagnostyka nieinwazyjna. Jest to metoda szczególnie ważna przy określaniu rozległości nowotworów żołądka i jelit.

Inną dziedziną, w której światłowody znajdują powszechne zastosowanie, jest telekomunikacja, w której używane są do przenoszenia sygnałów telefonicznych i internetowych. Aby umożliwić komunikację optyczną, na dnie oceanów i pod ziemią ułożono rozległą sieć kabli światłowodowych. Systemy komunikacji światłowodowej mają wiele zalet w porównaniu z systemami elektrycznymi (bazującymi na miedzi), zwłaszcza przy wykorzystaniu ich na dużych odległościach. Wytwarzane włókna optyczne są na tyle przezroczyste (transparentne), że światło może pokonywać odległości kilkukilometrowe, zanim zostanie wytłumione do tego stopnia, że wymaga wzmocnienia. Przesyłanie sygnału za pomocą światłowodów przebiega znacznie bardziej efektywnie niż za pomocą przewodników miedzianych. Ta właściwość światłowodów jest nazywana małą **stratnością transmisyjną** (ang. **loss**). Światło emitowane przez lasery ma cechy, które pozwalają na przesyłanie znacznie większej ilości informacji w jednym włóknie, niż jest to możliwe w przypadku sygnałów elektrycznych w jednym przewodniku. Ta właściwość jest nazywana dużą **przepustowością** (ang. **bandwidth**). Sygnały optyczne przesyłane w jednym włóknie nie generują zakłóceń w przylegających do niego innych włóknach. Ta właściwość światłowodów jest nazywana zredukowanym **przesłuchem** (ang. **crosstalk**). W dalszej części podręcznika te wyjątkowe właściwości promieniowania laserowego zostaną przedstawione bardziej szczegółowo.

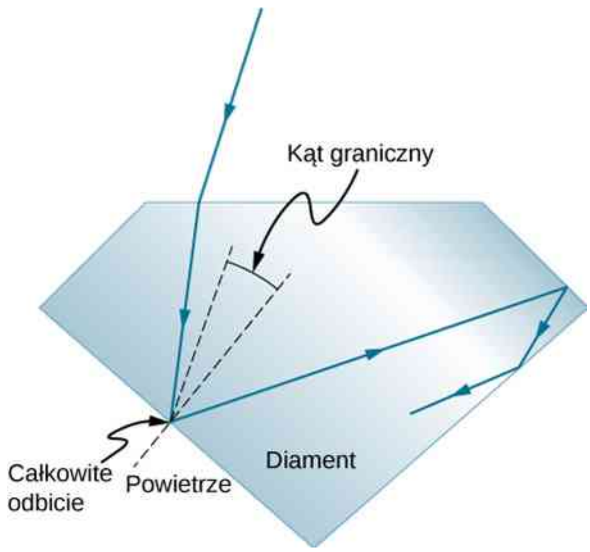
Reflektory narożne i diamenty

Reflektory narożne (zob. Prawo odbicia) charakteryzują się bardzo wysoką wydajnością, jeżeli spełnione są warunki całkowitego wewnętrznego odbicia. Do tego rodzaju reflektorów narożnych zaliczamy pryzmaty narożne. Dla powszechnie stosowanych materiałów łatwo jest uzyskać kąt graniczny mniejszy niż $45°$. Jednym z zastosowań pryzmatów narożnych jest lornetka, jak pokazano na Rysunku 1.18. Innym przykładem zastosowania jest peryskop – podstawowe wyposażenie okrętów podwodnych.



Rysunek 1.18 W lornetce użyte są pryzmaty narożne wykorzystujące zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia, dzięki czemu światło dociera do oczu obserwatora.

Zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia powiązane z dużym współczynnikiem załamania światła wyjaśnia, dlaczego w **diamentach** (ang. **diamond**) pojawiają się silniejsze rozbłyski światła niż w innych materiałach. Kąt graniczny dla układu diament-powietrze wynosi tylko $24{,}4°$, więc kiedy światło wchodzi do diamentu, ma trudności z wydostaniem się z niego (Rysunek 1.19). Światło z łatwością wchodzi do diamentu, lecz może wyjść z niego tylko wtedy, gdy padnie na powierzchnię pod kątem mniejszym od $24{,}4°$. Symetryczne płaszczyzny oszlifowanych diamentów (brylantów), potocznie nazywane fasetkami, są ułożone w taki sposób, że utrudniają wyjście światła z diamentu. Dobrej jakości diamenty są bardzo przezroczyste, więc światło ulega wielu wewnętrznym odbiciom i zostaje skupione przed wyjściem – czego efektem są pojawiające się rozbłyski (cyrkon jest naturalnym kamieniem szlachetnym o wyjątkowo dużym współczynniku załamania światła, lecz nie jest on tak duży jak w diamencie, więc minerał ten nie jest równie wysoko ceniony; cyrkonia, sztucznie wytwarzany kryształ tlenku cyrkonu, ma jeszcze większy współczynnik załamania światła od cyrkonu, około $2{,}17$, ale wciąż mniejszy od diamentu). Kolorowe rozbłyski obserwowane w czystych diamentach nie są spowodowane ich zabarwieniem, ponieważ zwykle diament jest prawie bezbarwny. Powstają one w wyniku rozszczepienia (dyspersji) światła, która omówiona zostanie w podrozdziale Rozszczepienie. Kolorowe diamenty zawdzięczają swój kolor defektom struktury sieci krystalicznej oraz wtrąceniom (inkluzjom) niewielkich ilości grafitu i innych minerałów. Około 90% światowego wydobycia różowych, czerwonych, szampańskich i koniakowych diamentów pochodzi z kopalni Argyle w Zachodniej Australii, natomiast aż 50% czystych diamentów pochodzi ze środkowej i południowej Afryki.



Rysunek 1.19 Światło nie może łatwo wydostać się z diamentu, ponieważ kąt graniczny dla układu diament-powietrze jest bardzo mały. Większość odbić to całkowite wewnętrzne odbicia, a powierzchnie (fasetki) w brylancie są ustawione w taki sposób, że światło może wydostać się tylko w określonych miejscach – skupiając światło i sprawiając, że diament jasno rozbłyskuje.

Zbadaj załamanie i odbicie światła (https://phet.colorado.edu/sims/html/bending-light/latest/bending-light_pl.html) pomiędzy dwoma ośrodkami o różnych współczynnikach załamania światła. Postaraj się sprawić, by załamany promień zniknął za sprawą całkowitego wewnętrznego odbicia. Użyj narzędzia „kątomierz” i zmierz kąt graniczny, następnie porównaj go z wartością obliczoną na podstawie Równania 1.5.

1.5 | Rozszczepienie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać przyczynę rozszczepienia światła w pryzmacie;
- opisywać rolę zjawiska rozszczepienia światła w powstawaniu tęczy;
- zestawiać zalety i wady rozszczepienia światła.

Każdego cieszy przepiękny widok tęczy barwnie jaśniejącej na tle ciemnego, burzowego nieba. Jak to się dzieje, że światło słoneczne, padając na przezroczyste krople deszczu, zamienia się w barwną tęczę? Ten sam proces powoduje, że białe światło po przejściu przez szklany pryzmat lub diament rozszczepia się na kolory (Rysunek 1.20).

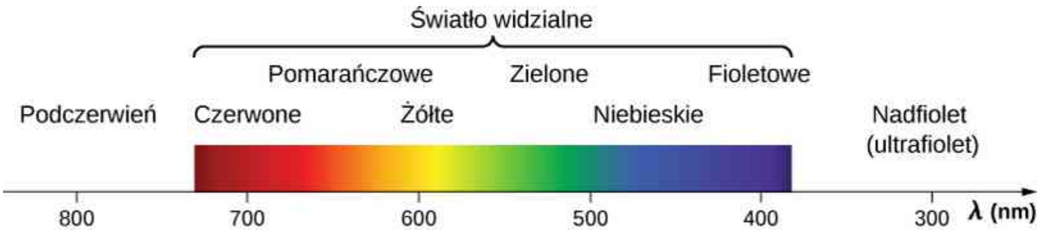


(a) (b)

Rysunek 1.20 Kolory tęczy (a) oraz te tworzone przez pryzmat (b) są identyczne. Źródła: (a) „Alfredo55”/Wikimedia Commons; (b) NASA

Widzimy sześć kolorów tęczy: czerwony, pomarańczowy, żółty, zielony, niebieski i fioletowy, czasem wymienia się dodatkowy siódmy kolor – indygo. Te barwy są ściśle związane z długościami fal światła, jak pokazano na Rysunku

1.21. Gdy nasze oko widzi światło o jednej długości fali, postrzega je jako jeden z tych kolorów, zależnie od długości fali. W realnym świecie występują tysiące barw i odcieni; to zmieszane ze sobą fale o różnych długościach. Światło białe jest dość jednolitą mieszaniną wszystkich barw (o w przybliżeniu jednakowych natężeniach) z zakresu widzialnego widma. Światło słoneczne, uważane za białe, sprawia wrażenie trochę żółtego ze względu na swoistą mieszaninę długości fal, zawiera jednak wszystkie długości fal z zakresu widzialnego. Kolejność kolorów w tęczy jest taka sama, jak pokazano na Rysunku 1.21. To wskazuje, że światło białe w wyniku rozszczepienia układa się w tęczy kolorami zgodnie z długością fali. **Rozszczepienie światła** lub **dyspersję** (ang. **dispersion**) definiujemy jako rozkład światła białego dający pełne widmo długości fal. Ujmując to bardziej technicznie, powiemy, że dyspersja występuje zawsze wtedy, gdy prędkość propagacji światła zależy od długości fali.



Rysunek 1.21 Mimo że z tęczą związanych jest sześć barw, stanowi ona pełny rozkład światła białego zgodnie z odpowiadającymi im długościami fal.

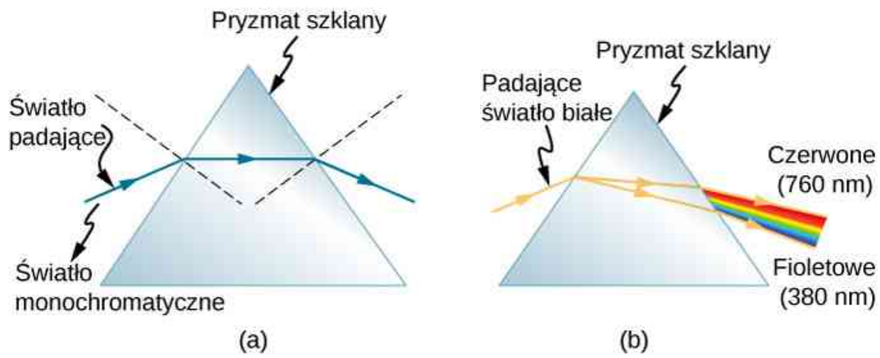
Każdy rodzaj fal może ulegać rozszczepieniu. Na przykład: fale dźwiękowe, wszystkie rodzaje fal elektromagnetycznych i fale na wodzie także mogą być rozszczepiane na fale składowe o różnych długościach. Dyspersja w szczególnych okolicznościach może ujawniać się w postaci widowiskowych obrazów, jak wspomniana już tęcza. Zjawisko dyspersji dotyczy również fal dźwiękowych, ponieważ fale o różnych częstotliwościach zwykle propagują się z taką samą prędkością. Jeśli słuchamy dźwięków przez długą rurę, na przykład od odkurzacza, można z łatwością usłyszeć efekt dyspersji dźwięku w wyniku oddziaływania z rurą. Dyspersja może dostarczyć informacji o obiektach, które fala napotkała na swojej drodze, a które spowodowały jej rozszczepienie na składowe o różnej długości. Na przykład dyspersja promieniowania elektromagnetycznego docierającego z dalekiego kosmosu ujawniła wiele informacji o tym, co występuje pomiędzy gwiazdami – o tak zwanym ośrodku międzygwiazdowym.

W swoim filmie (https://openstaxcollege.org/l/21nickmoorevid) Nick Moore omawia dyspersję drgań wytwarzanych w długiej sprężynie, pokazując w zwolnionym tempie, jak fale o wyższej częstotliwości wyprzedzają fale o niższej częstotliwości.

Zjawisko załamania odpowiada za rozszczepienie światła w kroplach deszczu i powstawanie tęczy oraz wielu innych efektów. Jak wiemy z prawa Snella, kąt załamania zależy od współczynnika załamania. Wiemy też, że współczynnik załamania n zależy od ośrodka. Dla danego ośrodka n zależy także od długości fali (Tabela 1.2); zwróćmy uwagę, że wzrasta, gdy długość fali maleje. Tak więc światło fioletowe jest załamywane bardziej niż czerwone, co widać po przejściu światła przez pryzmat na Rysunku 1.22 (b). Światło białe jest rozszczepiane w tej samej kolejności długości fal, jak pokazują Rysunek 1.20 i Rysunek 1.21.

Ośrodek	**Czerwony** (660 nm)	**Pomarańczowy** (610 nm)	**Żółty** (580 nm)	**Zielony** (550 nm)	**Niebieski** (470 nm)	**Fioletowy** (410 nm)
Woda	1,331	1,332	1,333	1,335	1,338	1,342
Diament	2,410	2,415	2,417	2,426	2,444	2,458
Szkło kronowe	1,512	1,514	1,518	1,519	1,524	1,530
Szkło flint	1,662	1,665	1,667	1,674	1,684	1,698
Polistyren	1,488	1,490	1,492	1,493	1,499	1,506
Kwarc topiony	1,455	1,456	1,458	1,459	1,462	1,468

Tabela 1.2 Współczynnik załamania n dla fal o różnej długości w wybranych ośrodkach.

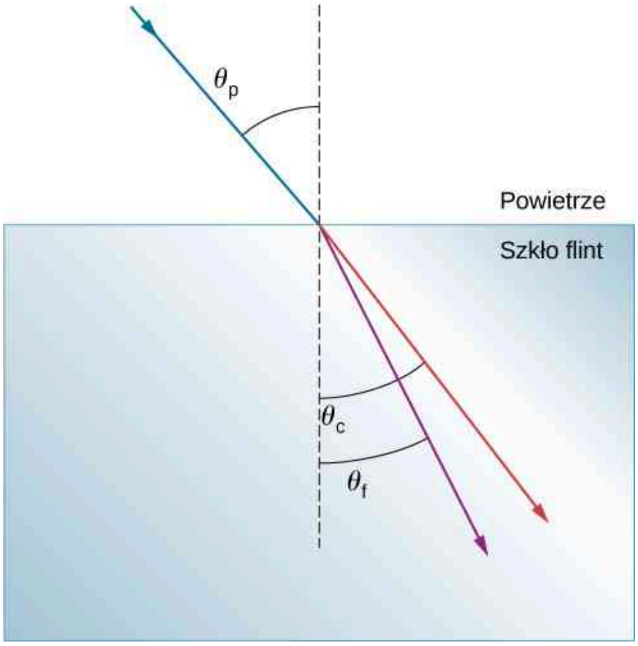


Rysunek 1.22 (a) Światło monochromatyczne pada na pryzmat i jest załamywane na obu powierzchniach. (b) Światło białe jest rozszczepiane przez pryzmat (zobrazowano to przesadnie). Ponieważ współczynnik złamania zmienia się wraz z długością fali, wraz z nią zmieniają się również kąty załamania. Kolejność barw od czerwonej do fioletowej wynika z faktu, że współczynnik załamania rośnie, gdy długość fali maleje.

Przykład 1.5

Dyspersja światła białego w szkle flint

Wiązka światła białego przechodzi z powietrza do szkła flint pod kątem padania $43{,}2°$. Jaki jest kąt pomiędzy czerwonym ($660\ \text{nm}$) i fioletowym ($410\ \text{nm}$) promieniem załamanego światła?



Strategia rozwiązania

Wartości współczynnika załamania szkła flint dla różnych długości fal są podane w Tabeli 1.2. Użyjmy tych wartości, aby obliczyć kąt załamania dla obu kolorów, a następnie obliczmy kąt rozszczepienia.

Rozwiązanie

Stosując prawo załamania dla promienia czerwonego

$$n_p \sin\theta_p = n_c \sin\theta_c,$$

wyznaczamy kąt załamania

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_p \sin\theta_p}{n_c}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 43{,}2°}{1{,}662}\right) = 27°.$$

Analogicznie wyznaczamy kąt załamania dla promienia fioletowego

$$\theta_f = \arcsin\left(\frac{n_p \sin\theta_p}{n_f}\right) = \arcsin\left(\frac{\sin 43{,}2^\circ}{1{,}698}\right) = 26{,}4^\circ.$$

Kąt rozszczepienia obliczamy jako różnicę pomiędzy tymi kątami, otrzymując

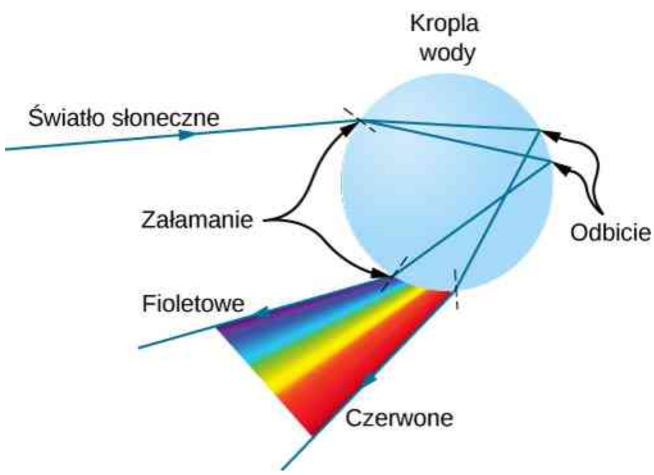
$$\theta_c - \theta_f = 27^\circ - 26{,}4^\circ = 0{,}6^\circ.$$

Znaczenie

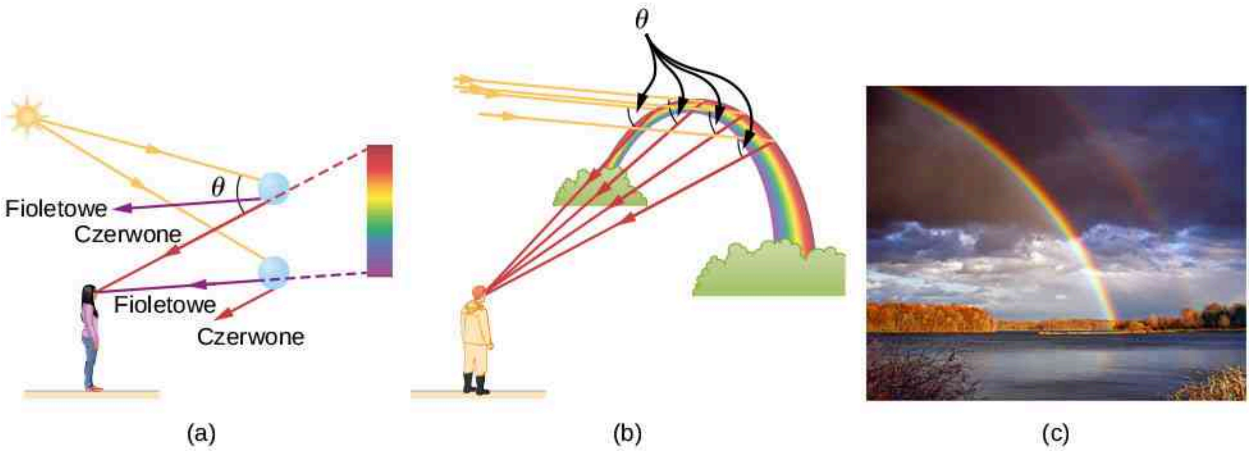
Chociaż kąt $0{,}6^\circ$ może wydawać się zaniedbywalnie małym kątem, to w przypadku, gdy wiązka będzie obserwowana z dużej odległości, rozszczepienie kolorów stanie się zauważalne.

1.4 Sprawdź, czy rozumiesz. Rozważając poprzedni przykład, określ, jak długa musi być droga światła w bloku szkła flint, aby promienie czerwony i fioletowy były oddzielone od siebie o 1 mm.

Tęcza (ang. **rainbow**) jest efektem dwóch zjawisk: załamania i odbicia. Może zauważyłeś, że widzisz tęczę tylko wtedy, gdy patrzysz w niebo, stojąc tyłem do Słońca. Światło wnika do kropli wody, odbija się od jej tylnej, wewnętrznej powierzchni i wychodzi na zewnątrz kropli (Rysunek 1.23). Światło jest załamywane dwukrotnie przy wejściu i wyjściu z kropli. Ponieważ współczynnik załamania światła dla wody zależy od długości fali, światło jest rozszczepiane, w wyniku czego obserwujemy tęczę (Rysunek 1.24 (a); rozszczepienie nie występuje na tylnej powierzchni kropli, ponieważ prawo odbicia nie zależy od długości fali). Kolorowa tęcza widziana przez obserwatora jest efektem skumulowania bardzo dużej liczby promieni, które są załamywane i odbijane w kierunku oczu obserwatora od wielu kropel wody. Zjawisko to jest najbardziej widowiskowe i efektowne w burzową pogodę, kiedy niebo jest ciemne. Może być również obserwowane w okolicy wodospadów, fontann i zraszaczy ogrodowych. Kolisty kształt tęczy wynika z konieczności patrzenia pod określonym kątem względem położenia Słońca, jak zilustrowano w części (b) Rysunku 1.24. Jeżeli w kropli wody wystąpią dwa odbicia światła, powstaje tęcza wtórna. To zjawisko występuje rzadko. Łuk tęczy wtórnej tworzy się powyżej łuku tęczy pierwotnej, jak pokazano w części (c) Rysunku 1.24. Układ kolorów tęczy wtórnej jest odwrotny niż w tęczy pierwotnej, czyli czerwona barwa występuje przy najmniejszym, a fioletowa przy największym kącie.



Rysunek 1.23 Promień światła pada na kroplę wody, wnika do niej i jest odbijany od wewnętrznej powierzchni kropli. Światło jest załamywane i rozszczepiane dwukrotnie, gdy wnika i wychodzi z kropli.



Rysunek 1.24 (a) Aby zobaczyć różne barwy tęczy, trzeba patrzeć w różnych kierunkach, ponieważ promienie poszczególnych barw poruszają się w różnych kierunkach. (b) Kształt łuku tęczy wynika z faktu, że linia pomiędzy obserwatorem i dowolnym punktem tęczy musi tworzyć odpowiedni kąt z padającymi równolegle promieniami słonecznymi, aby obserwator mógł zobaczyć załamane promienie światła. (c) Podwójna tęcza – pierwotna i wtórna. Źródło (c): „Nicholas”/Wikimedia Commons

Rozszczepienie światła z jednej strony powoduje powstawanie tak efektownych zjawisk jak tęcza, a z drugiej może być źródłem problemów w układach optycznych. Białe światło użyte do transmisji informacji w światłowodach jest rozszczepiane, wskutek czego przesyłane sygnały mogą wzajemnie się zakłócać. Ponieważ laser generuje prawie monochromatyczne światło (jedna długość fali), jego światło ulega tylko nieznacznej dyspersji, co sprawia, że zastosowanie go do transmisji danych jest znacznie korzystniejsze niż użycie światła białego. Ale bywa też odwrotnie. Dyspersja fal elektromagnetycznych napływających do nas z kosmosu może być wykorzystana do określenia ilości materii, przez którą przeszły, docierając do Ziemi.

1.6 | Zasada Huygensa

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać zasadę Huygensa;
- wyjaśniać prawo odbicia, wykorzystując zasadę Huygensa;
- wyjaśniać prawo załamania, wykorzystując zasadę Huygensa;
- używać zasady Huygensa do wyjaśnienia dyfrakcji.

Dotychczas w tym rozdziale omawialiśmy zjawiska optyczne, używając pojęcia promienia świetlnego. Jednakże opis pewnych zjawisk wymaga analizy i wyjaśnienia w kontekście falowych właściwości światła. Jest to szczególnie ważne, gdy długość fali jest porównywalna z wymiarem przyrządów optycznych, takich jak szczelina w przypadku dyfrakcji. Teoria wprowadzona przez Huygensa pozwala opisać takie sytuacje.

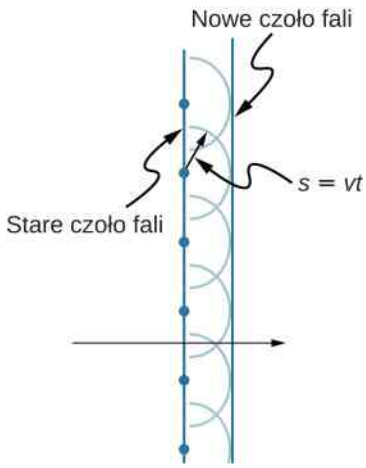
Rysunek 1.25 pokazuje, jak wygląda fala poprzeczna widziana z góry i z boku. Można wyobrazić sobie światło jako falę propagującą się w sposób pokazany na rysunku, chociaż w rzeczywistości nie widać jej drgań w przestrzeni. Z góry widać czoła fali (grzbiety fali), podobnie jak w przypadku oglądanych z góry fal morskich. Widok z boku byłby wykresem pola elektrycznego lub magnetycznego. Widok z góry wydaje się wygodniejszy przy wprowadzaniu pojęć z zakresu **optyki falowej** (ang. **wave optics**).



Rysunek 1.25 Fala poprzeczna, na przykład fala elektromagnetyczna, widziana z góry i z boku. Kierunek rozchodzenia się (propagacji) fali jest prostopadły do czół fali (grzbietów fali) i opisany przez promień.

Holenderski fizyk **Christiaan Huygens (1629–1695)** opracował przekonującą teorię, która szczegółowo opisuje sposób rozchodzenia się fal. **Zasada Huygensa** (ang. **Huygens' principle**) mówi, że dla pewnego znanego położenia czoła fali wszystkie jego punkty są źródłami kulistych fal wtórnych rozprzestrzeniających się w tym samym kierunku i z tą samą prędkością co fala pierwotna. Nowe czoło fali jest wyznaczone przez powierzchnię styczną do powierzchni fal wtórnych.

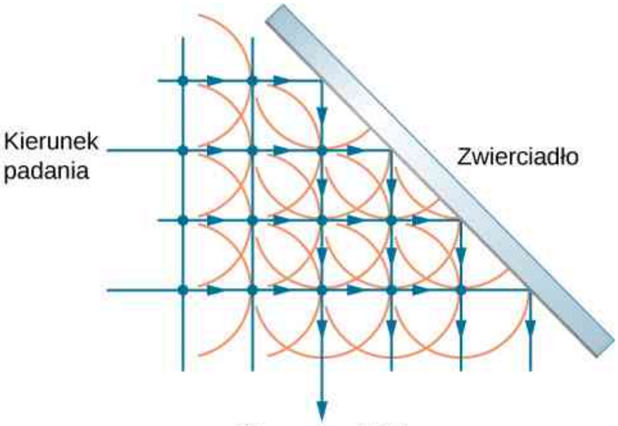
Rysunek 1.26 pokazuje konstrukcję geometryczną wykorzystującą zasadę Huygensa. Czoło fali ma postać prostej, która się przemieszcza; może ono odpowiadać zarówno grzbietowi, jak i dolinie fali. Każdy punkt czoła fali jest źródłem półkolistej fali wtórnej, która porusza się z prędkością v. Możemy narysować tę falę po upływie czasu t, w którym przebędzie ona drogę $s = vt$. Nowe czoło fali jest płaszczyzną styczną do powierzchni fal wtórnych i znajduje się w miejscu, w którym znajdzie się fala po upływie czasu t. Zasada Huygensa jest słuszna dla wszystkich typów fal, włączając w to fale wytwarzane na powierzchni wody, fale dźwiękowe i świetlne. Zasada ta tłumaczy nie tylko to, w jaki sposób rozchodzą się fale świetlne, ale także wyjaśnia prawa odbicia i załamania. Ponadto przekonamy się, że zasada Huygensa wyjaśnia warunki interferencji promieni świetlnych.



Rysunek 1.26 Zasada Huygensa została zastosowana do czoła fali płaskiej. Każdy punkt czoła fali jest źródłem półkolistych fal wtórnych, które pokonują drogę $s = vt$. Nowe czoło fali jest linią styczną do czół fal wtórnych.

Odbicie

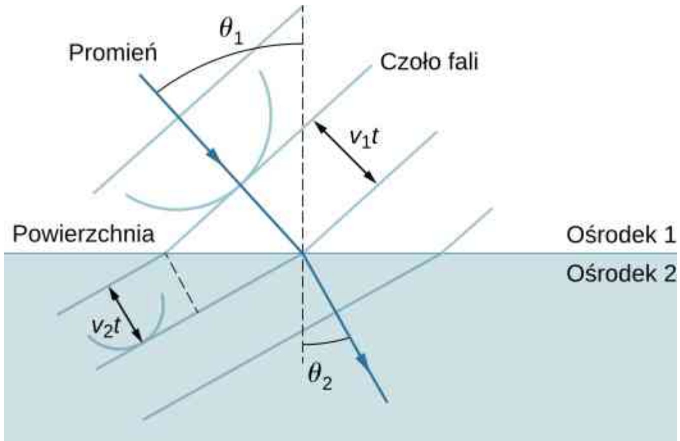
Rysunek 1.27 pokazuje, w jaki sposób zwierciadło odbija padającą falę pod kątem równym kątowi padania, potwierdzając prawo odbicia. Gdy czoło fali pada na zwierciadło, fale wtórne najpierw są wytwarzane po lewej stronie zwierciadła, a następnie po prawej. Fale wtórne wytwarzane bliżej lewej strony zdążyły przemieścić się dalej w określonym czasie, tworząc czoło fali poruszające się w pokazanym kierunku.



Rysunek 1.27 Zasada Huygensa została zastosowana do czoła fali płaskiej padającej na zwierciadło. Fale koliste (wtórne) powstają wtedy, gdy dany punkt czoła fali dociera do zwierciadła. Styczna do powierzchni powstających fal kolistych wytycza nowe czoło fali odbitej pod kątem równym kątowi padania. Kierunek rozchodzenia się fali jest prostopadły do czoła fali i przedstawiony jako strzałka skierowana pionowo w dół.

Załamanie

Na gruncie zasady Huygensa możemy również wyjaśnić prawo załamania (Rysunek 1.28). Każda fala kolista pokazana na rysunku była wytworzona w momencie, gdy czoło fali przekraczało granicę między ośrodkami. Ponieważ prędkość światła w drugim ośrodku jest mniejsza, fale przebywają w tym samym czasie krótszą drogę, w konsekwencji nowe czoło fali zmienia kierunek. To wyjaśnia, dlaczego promień zmienia kierunek (przesuwa się w stronę normalnej), kiedy światło zmniejsza swoją prędkość w drugim ośrodku. Z zależności geometrycznych przedstawionych na Rysunku 1.28 (Przykład 1.6) da się wyprowadzić prawo Snella.



Rysunek 1.28 Zasada Huygensa zastosowana dla fali płaskiej przemieszczającej się z jednego ośrodka do drugiego, w którym prędkość fali jest mniejsza. Promień ugina się w kierunku normalnej, ponieważ fale poruszające się w drugim ośrodku mają mniejszą prędkość.

Przykład 1.6

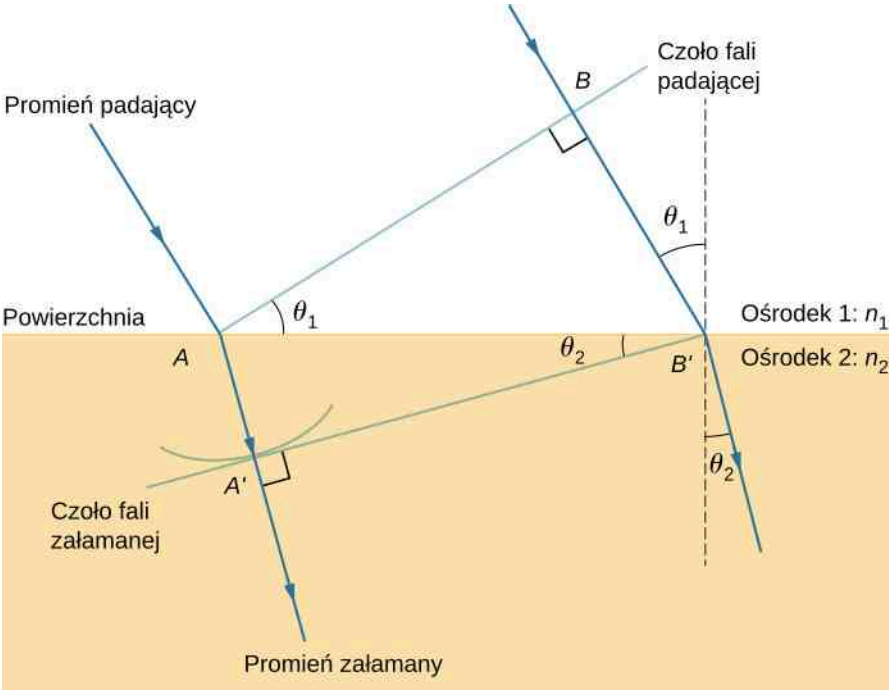
Wyprowadzenie prawa załamania

Rozpatrując geometrię czoła fali w ośrodku pierwszym i drugim, wyprowadźmy prawo załamania.

Strategia rozwiązania

Przypatrzmy się Rysunkowi 1.29, który jest powiększeniem Rysunku 1.28. Widać na nim, że padające czoło fali właśnie dociera do punktu A na powierzchni ośrodka 2, podczas, gdy punkt B tego samego czoła fali wciąż znajduje się w ośrodku 1. W czasie Δt potrzebnym do przemieszczenia się czoła fali z punktu

B do punktu B' znajdującego się na powierzchni ośrodka 2 fala poruszała się z prędkością $v_1 = c / n_1$, natomiast fale koliste poruszające się w ośrodku 2 przebywają drogę $AA' = v_2 \Delta t$, gdzie $v_2 = c / n_2$. Zauważmy, że w tym przypadku prędkość v_2 jest mniejsza od v_1, ponieważ $n_1 < n_2$.



Rysunek 1.29 Geometryczne przedstawienie prawa załamania przy przejściu promienia z ośrodka 1 do ośrodka 2.

Rozwiązanie

Fragment o długości AB' jest wspólny dla dwóch trójkątów: ABB' w ośrodku 1 i $AA'B'$ w ośrodku 2. Z geometrii rysunku wynika, że kąt $\angle BAB'$ jest równy kątowi padania θ_1, natomiast $\angle AB'A'$ jest równy kątowi załamania θ_2.

Długość odcinka AB' można wyznaczyć na dwa sposoby (dwa trójkąty)

$$AB' = \frac{BB'}{\sin\theta_1} = \frac{AA'}{\sin\theta_2}.$$

Przekształcając powyższe równanie oraz podstawiając $AA' = c\Delta t / n_2$ i $BB' = c\Delta t / n_1$, otrzymujemy

$$\frac{\sin\theta_1}{c\Delta t / n_1} = \frac{\sin\theta_2}{c\Delta t / n_2}.$$

Skracając czynnik $c\Delta t$, otrzymujemy wyrażenie

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2.$$

Znaczenie

Prawo załamania, omówione w podrozdziale Rozszczepienie, zostało sformułowane przez Snella na podstawie doświadczeń. Wyprowadzenie go wymaga jednak zastosowania zasady Huygensa i zrozumienia, że prędkość światła jest różna w różnych ośrodkach.

1.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** W Przykładzie 1.6 przyjęliśmy $n_1 < n_2$. Jeżeli n_2 zmalałoby tak, że $n_1 > n_2$ i prędkość światła w ośrodku 2 byłaby większa niż w ośrodku 1, co stałoby się długością odcinka AA'? Co stałoby się z czołem fali $A'B'$ i jaki byłby kierunek promienia załamanego?

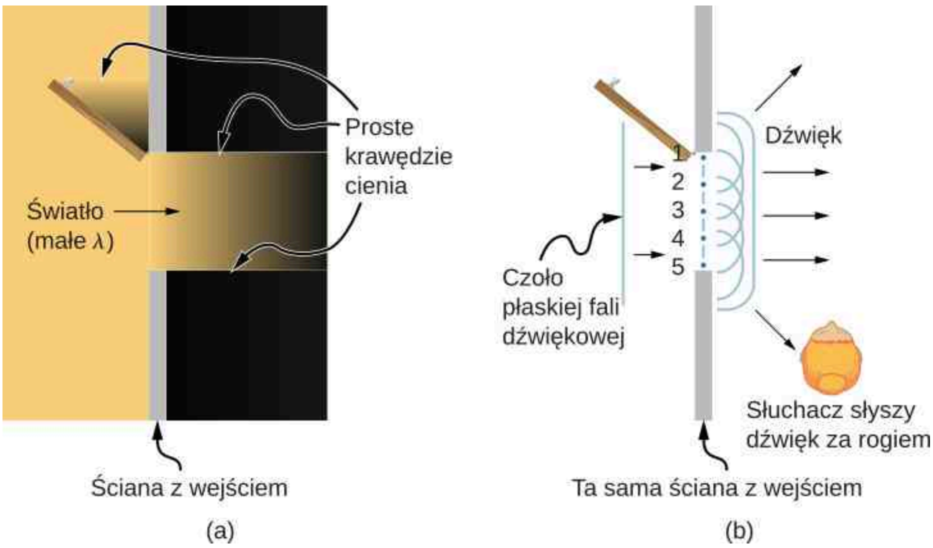
Ta aplikacja (https://openstaxcollege.org/l/21walfedaniref) autorstwa Waltera Fendta przedstawia procesy odbicia i załamania, wykorzystujące fale koliste Huygensa, z możliwością zmiany parametrów. Nie zapomnij nacisnąć „Next step”, aby wyświetlić fale koliste. Zobaczysz tworzące się czoła fal: odbitej i załamanej.

Dyfrakcja

Co się wydarzy, gdy fala świetlna przejdzie przez otwarte drzwi do ciemnego pomieszczenia? Dla światła obserwujemy wyraźny, jasny obszar o szerokości wejścia na podłodze pokoju, ale nie występuje ugięcie fali świetlnej na krawędziach drzwi, więc światło nie dociera do innych miejsc pokoju. Natomiast kiedy dźwięk przechodzi przez drzwi pokoju, słyszymy go wszędzie, czyli odczuwamy, że dźwięk rozchodzi się w każdym kierunku (Rysunek 1.30). Z czego wynika różnica w zachowaniu fal dźwiękowych i fal świetlnych w tym przypadku? Odpowiedź jest następująca: światło ma bardzo małą długość fali i z tego względu zachowuje się jak promień (nie ulega ugięciu). Natomiast dźwięk ma długość fali porównywalną z rozmiarem drzwi, w związku z czym ugina się na otworze drzwiowym i dociera do wszystkich miejsc w pokoju. Dla częstotliwości $1000\ \mathrm{Hz}$ przy prędkości dźwięku c długość fali wynosi

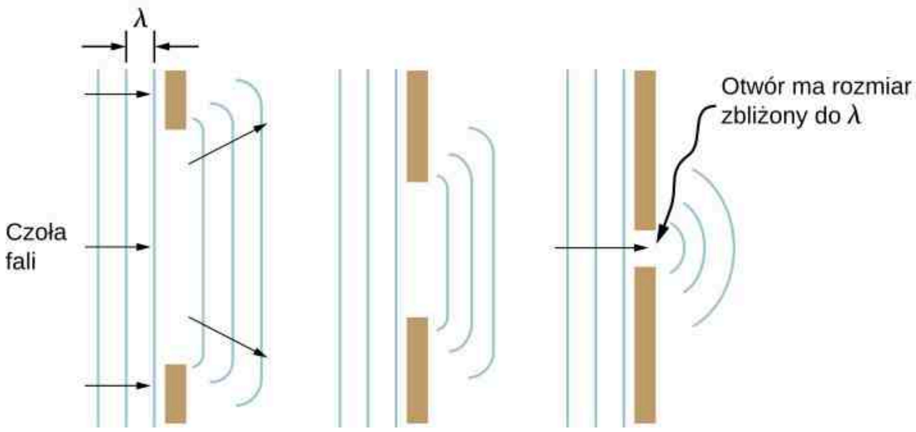
$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{330\ \mathrm{m/s}}{1000\ \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}33\ \mathrm{m},$$

zatem jest około trzy razy mniejsza niż szerokość wejścia.



Rysunek 1.30 (a) Światło, przechodząc przez otwór drzwiowy, wytwarza wyraźny kontur cienia na podłodze. Ponieważ długość fali światła jest bardzo mała w porównaniu do rozmiaru drzwi, traktowane jest ono jak promień. (b) Fale dźwiękowe uginają się i docierają do wszystkich miejsc w pokoju, ujawnia się falowa natura dźwięku, ponieważ długości fal dźwiękowych są porównywalne do rozmiarów drzwi.

Jeśli światło przechodzi przez mniejsze otwory, takie jak szczeliny, możemy użyć zasady Huygensa, aby przekonać się, że światło ugina się jak fala dźwiękowa (Rysunek 1.31). Ugięcie fali na krawędziach otworu lub na przeszkodzie nazywane jest **dyfrakcją** (ang. **diffraction**). Dyfrakcja jest zjawiskiem falowym i zachodzi dla wszystkich rodzajów fal. Jeżeli obserwujemy dyfrakcję dla pewnych zjawisk, jest to dowód, że mamy do czynienia z falą. Zatem pozioma dyfrakcja wiązki laserowej po przejściu przez szczeliny na Rysunku 1.31 jest dowodem, że światło jest falą. Więcej szczegółów na temat dyfrakcji poznamy w rozdziale Dyfrakcja.



Rysunek 1.31 Zasada Huygensa została zastosowana dla czoła fali płaskiej padającej na otwór. Krawędzie czoła fali uginają się po przejściu przez otwór; zjawisko to nazywamy dyfrakcją. Wielkość ugięcia zwiększa się, gdy wielkość otworu maleje, zgodnie z faktem, że falowe właściwości są bardziej zauważalne przy oddziaływaniu z obiektami o rozmiarze porównywalnym do długości fali.

1.7 | Polaryzacja

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zmianę natężenia światła spolaryzowanego po przejściu przez polaryzator;
- opisywać zjawisko polaryzacji światła przez odbicie oraz obliczać kąt Brewstera;
- opisywać zjawisko polaryzacji światła przez rozproszenie;
- wyjaśniać konieczność użycia materiałów polaryzujących w takich urządzeniach jak wyświetlacze LCD.

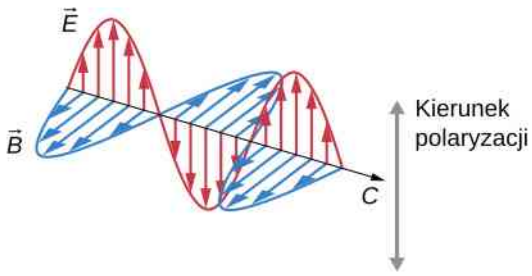
Przeciwsłoneczne okulary polaryzacyjne są znane większości z nas. Mają one szczególną właściwość polegającą na eliminowaniu światła odbijającego się od powierzchni wody, szkła i innych obiektów (Rysunek 1.32) dzięki zjawisku polaryzacji, które związane jest z falową naturą światła. Co to jest polaryzacja? Jak można ją uzyskać? Jakie ma zastosowanie? Odpowiedzi na te pytania znajdziemy przyjmując, że światło ma naturę falową.



Rysunek 1.32 Zamieszczone zdjęcia rzeki przedstawiają wpływ filtru polaryzacyjnego na redukcję światła odbijającego się od powierzchni wody. Zdjęcie (b) zostało wykonane z użyciem, natomiast (a) bez użycia filtru polaryzacyjnego. W rezultacie odbicie chmur i nieba widoczne na zdjęciu (a) nie jest widoczne na zdjęciu (b). Okulary przeciwsłoneczne z filtrem polaryzacyjnym są szczególnie przydatne, gdy w słoneczny dzień promienie słoneczne odbijają się od wody czy śniegu.

Prawo Malusa

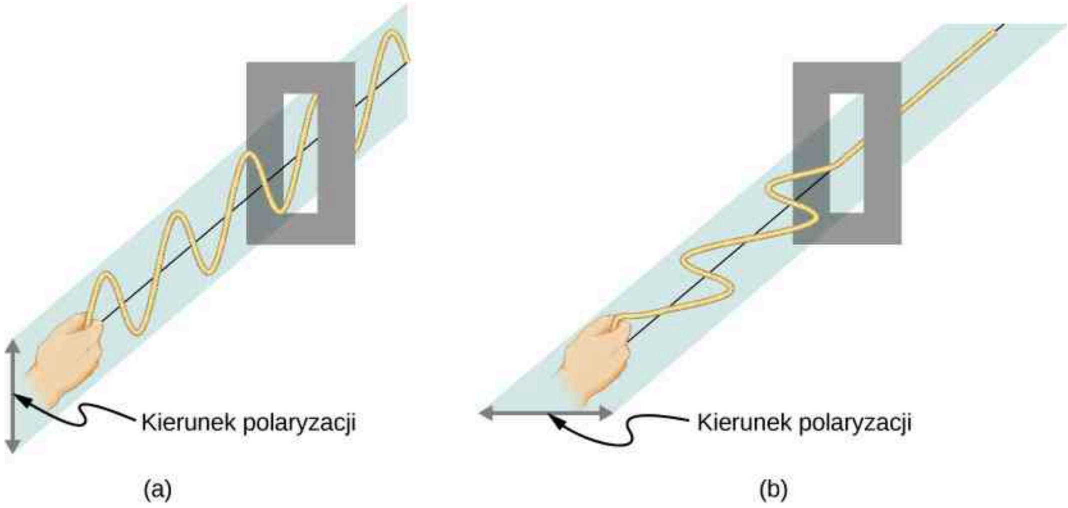
Światło jest jednym z rodzajów fal elektromagnetycznych (EM). Jak wspomniano w poprzednim rozdziale (Fale elektromagnetyczne (https://cnx.org/content/m65888/latest/)), fale EM są **falami poprzecznymi** (ang. **transverse wave**) składającymi się ze zmieniających się w czasie pól elektrycznego i magnetycznego, które wykonują drgania w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali (Rysunek 1.33). Kierunki drgań wektorów opisujących pola elektryczne ($\vec{E}$) i magnetyczne ($\vec{B}$) nie są w żaden sposób wyróżnione w przestrzeni, ale płaszczyzny, w których drgają, są zawsze prostopadłe względem siebie. **Polaryzacja** (ang. **polarization**) określa kierunek drgań fali względem kierunku jej rozchodzenia (propagacji; pamiętajmy, że nie jest to ten sam typ polaryzacji, która występuje przy rozsuwaniu ładunków w dielektryku). Fale posiadające wyróżniony kierunek drgań nazywane są **spolaryzowanymi** (ang. **polarized wave**). Dla fal EM **kierunek polaryzacji** (ang. **direction of polarization**) definiuje się jako równoległy do wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$. Jak pokazano na Rysunku 1.33, przyjmujemy, że strzałki wektora natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ określają kierunek polaryzacji fali.



Rysunek 1.33 Fale EM, takie jak światło, są falami poprzecznymi. Wektory natężenia pola elektrycznego ($\vec{E}$) i indukcji pola magnetycznego ($\vec{B}$) są prostopadłe względem siebie i prostopadłe do kierunku rozchodzenia fali. Kierunek polaryzacji fali jest jednocześnie kierunkiem wektora natężenia pola elektrycznego.

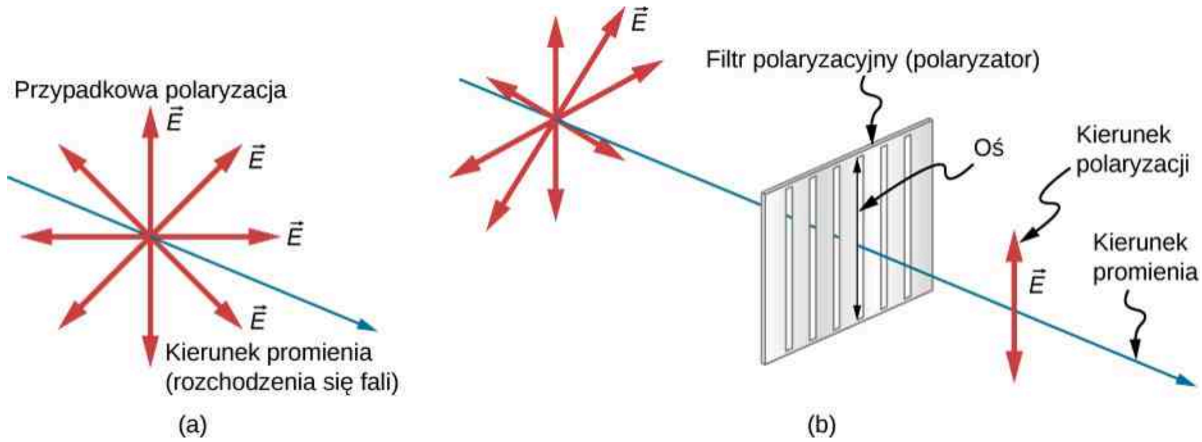
Zanim przejdziemy do dalszego omawiania fal EM, rozważmy poprzeczne fale wytwarzane za pomocą kawałka liny (Rysunek 1.34). Drgania wytworzone w pierwszej linie zachodzą w płaszczyźnie pionowej, zatem możemy mówić o **polaryzacji pionowej** (ang. **vertically polarized**). Natomiast drgania w drugiej linie zachodzą w płaszczyźnie poziomej, czyli mówimy o **polaryzacji poziomej** (ang. **horizontally polarized**). Jeżeli na drodze fali wytworzonej w pierwszej

linie ustawimy pionową szczelinę, fala przejdzie przez nią. W przypadku fali wytworzonej w drugiej linie, pionowa szczelina wytłumi spolaryzowaną poziomo falę. Dla fal EM kierunek pola elektrycznego jest analogiczny do zaburzeń występujących w kawałku liny.



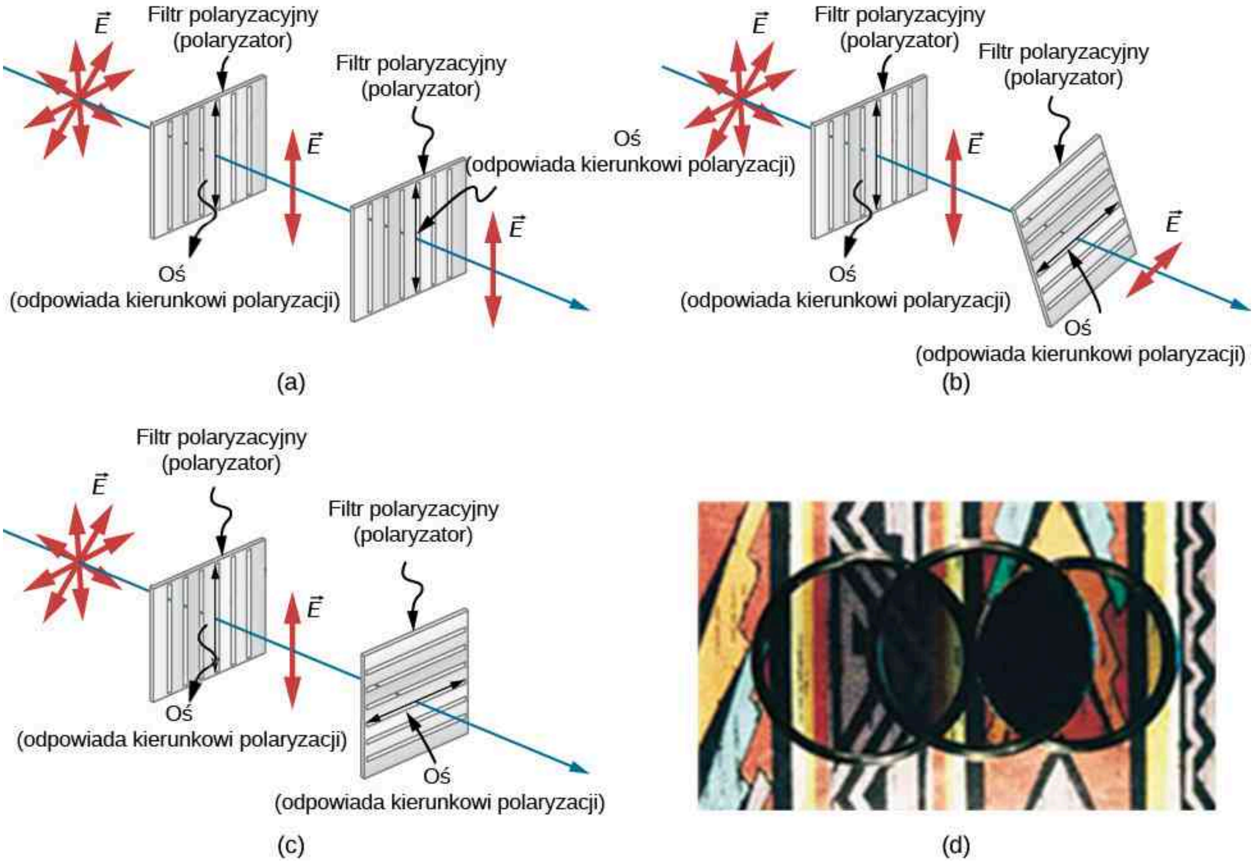
Rysunek 1.34 Drgania poprzeczne w pierwszej linie (a) zachodzą w płaszczyźnie pionowej, a wytworzone w drugiej linie (b) w płaszczyźnie poziomej. Pierwsze nazwiemy spolaryzowanymi pionowo, a drugie spolaryzowanymi poziomo. Pionowa szczelina przepuszcza fale spolaryzowane pionowo, a nie przepuszcza fal spolaryzowanych poziomo.

Słońce oraz wiele innych źródeł światła wytwarzają fale, których wektor natężenia pola elektrycznego $\vec{E}$ drga w przypadkowych kierunkach – Rysunek 1.35 (a). Takie światło nazywamy **niespolaryzowanym** (ang. **unpolarized wave**), ponieważ składa się z wielu fal o wszystkich możliwych kierunkach polaryzacji. Materiały polaryzujące światło, wynalezione przez Edwina Landa, założyciela firmy Polaroid, działają jak szczelina, pozwalając przejść tylko światłu o określonej polaryzacji (jednym kierunku). Filtry polaryzacyjne, zwane polaryzatorami, są zbudowane z długich cząsteczek ułożonych w jednym kierunku na plastikowej folii. Jeśli pomyślimy o cząsteczkach jak o przegródkach, między którymi są szczeliny analogiczne do tych omawianych przy oscylujących linach, zrozumiemy, dlaczego tylko światło o określonej polaryzacji, zgodnej z kierunkiem szczelin, może przejść przez polaryzator. Oś polaryzatora nazywana jest kierunkiem polaryzacji, ponieważ wzdłuż osi przepuszczana jest składowa elektryczna fali elektromagnetycznej.



Rysunek 1.35 Cienka strzałka reprezentuje promień światła niespolaryzowanego (niebieska). Pogrubione strzałki (czerwone) przedstawiają kierunek polaryzacji pojedynczych fal składających się na promień. (a) Jeśli światło jest niespolaryzowane, pogrubione strzałki wskazują wszystkie kierunki. (b) Polaryzator ma określony kierunek polaryzacji, działa jak szczelina, przez którą przechodzą tylko te składowe wektora natężenia pola elektrycznego, które są do niego równoległe. Kierunkiem polaryzacji fali EM jest kierunek drgań wektora natężenia pola elektrycznego.

Na Rysunku 1.36 przedstawiono efekt przejścia światła niespolaryzowanego przez układ dwóch polaryzatorów. Pierwszy polaryzuje światło zgodnie z ze swoim kierunkiem polaryzacji. Gdy kierunki polaryzacji obu polaryzatorów są równoległe, całe światło spolaryzowane przez pierwszy polaryzator przechodzi również przez drugi polaryzator. Jeżeli kierunek polaryzacji drugiego polaryzatora zostanie obrócony, wtedy może przejść przez niego tylko część spolaryzowanego światła równoległa do kierunku polaryzacji tego polaryzatora. Gdy kierunki polaryzacji obu polaryzatorów są prostopadłe względem siebie, wówczas przez drugi polaryzator nie przechodzi światło.

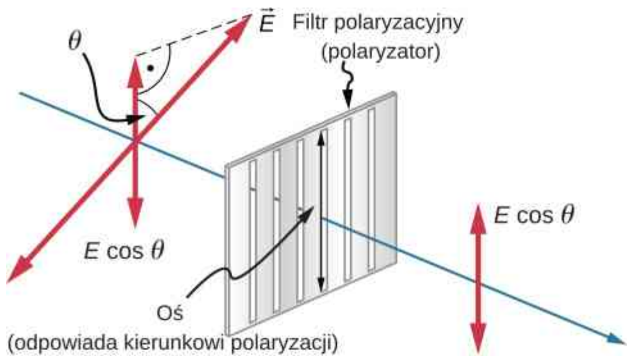


Rysunek 1.36 Działanie układu dwóch polaryzatorów, z których pierwszy polaryzuje światło, a drugi może się obracać. (a) Całe światło spolaryzowane przez pierwszy polaryzator przechodzi przez drugi polaryzator, ponieważ jego kierunek polaryzacji jest równoległy do kierunku polaryzacji pierwszego polaryzatora. (b) Gdy drugi polaryzator jest obracany, tylko część światła jest przepuszczana. (c) W sytuacji, gdy kierunek polaryzacji drugiego polaryzatora jest prostopadły względem pierwszego, światło nie jest przepuszczane. (d) Na tej fotografii polaryzator został położony na dwóch innych polaryzatorach. Jego kierunek polaryzacji jest prostopadły do kierunku polaryzacji prawego polaryzatora (ciemny obszar) i równoległy do kierunku polaryzacji polaryzatora po lewej (jaśniejszy obszar). Źródło (d): P.P. Urone

Tylko składowa elektryczna fali EM równoległa do kierunku polaryzacji polaryzatora jest przepuszczana. Oznaczmy przez θ kąt pomiędzy kierunkiem polaryzacji fali (kierunek wektora natężenia pola elektrycznego) i kierunkiem polaryzacji polaryzatora. Jeżeli natężenie pola elektrycznego ma amplitudę E, wówczas składowa elektryczna fali przechodzącej przez polaryzator ma amplitudę $E \cos \theta$ (Rysunek 1.37). Ponieważ natężenie fali elektromagnetycznej jest proporcjonalne do kwadratu natężenia pola elektrycznego, natężenie I światła przechodzącego przez polaryzator jest powiązane z natężeniem światła padającego na polaryzator zależnością

$$I = I_0 \cos^2 \theta, \quad (1.6)$$

gdzie I_0 jest natężeniem fali spolaryzowanej padającej na polaryzator. Równanie to znane jest jako **prawo Malusa** (ang. **Malus's law**).



Rysunek 1.37 Polaryzator przepuszcza tylko składową elektryczną fali równoległą do jego kierunku polaryzacji, zmniejszając natężenie światła niespolaryzowanego równolegle względem jego kierunku polaryzacji.

Animacja Open Source Physics (https://openstaxcollege.org/l/21phyanielefie) pomaga zobrazować wektory natężenia pola elektrycznego, kiedy światło pada na polaryzator. Możesz obracać polaryzator, ale zwróć uwagę, że wyświetlany kąt jest wyrażony w radianach. Możesz również obracać grafikę w trzech wymiarach.

Przykład 1.7

Obliczanie spadku natężenia światła przy przejściu przez polaryzator

Jaki powinien być kąt pomiędzy kierunkiem polaryzacji światła a kierunkiem polaryzacji polaryzatora, aby natężenie światła zmniejszyło się o 90%?

Strategia rozwiązania

Gdy natężenie zmniejsza się o 90%, ma wartość równą $0{,}1$ początkowej wartości. Oznacza to, że $I = 0{,}1 I_0$. Wykorzystując tę informację, możemy rozwiązać równanie $I = I_0 \cos^2 \theta$ dla określonego kąta.

Rozwiązanie

Z równania $I = I_0 \cos^2 \theta$ wyznaczamy $\cos \theta$. Uwzględniając fakt, że $I = 0{,}1 I_0$, otrzymujemy

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{I}{I_0}} = \sqrt{\frac{0{,}1 I_0}{I_0}} = 0{,}3162.$$

Wyznaczamy kąt θ

$$\theta = \arccos\,(0{,}3162) = 71{,}6°.$$

Znaczenie

Dość duży kąt pomiędzy kierunkiem polaryzacji światła a kierunkiem polaryzacji polaryzatora konieczny do zmniejszenia natężenia światła do 10% jego początkowej wartości wydaje się rozsądnym wynikiem. Warto zauważyć, że dla kąta $45°$ natężenie światła zmniejsza się do 50% jego początkowej wartości. Zauważmy, że kątowi $71{,}6°$ brakuje tylko $18{,}4°$ do położenia, w którym natężenie światła spada do zera, oraz że dla kąta $18{,}4°$ natężenie zmniejsza się do 90% początkowej wartości (spada o 10%), potwierdzając występującą tu symetrię.

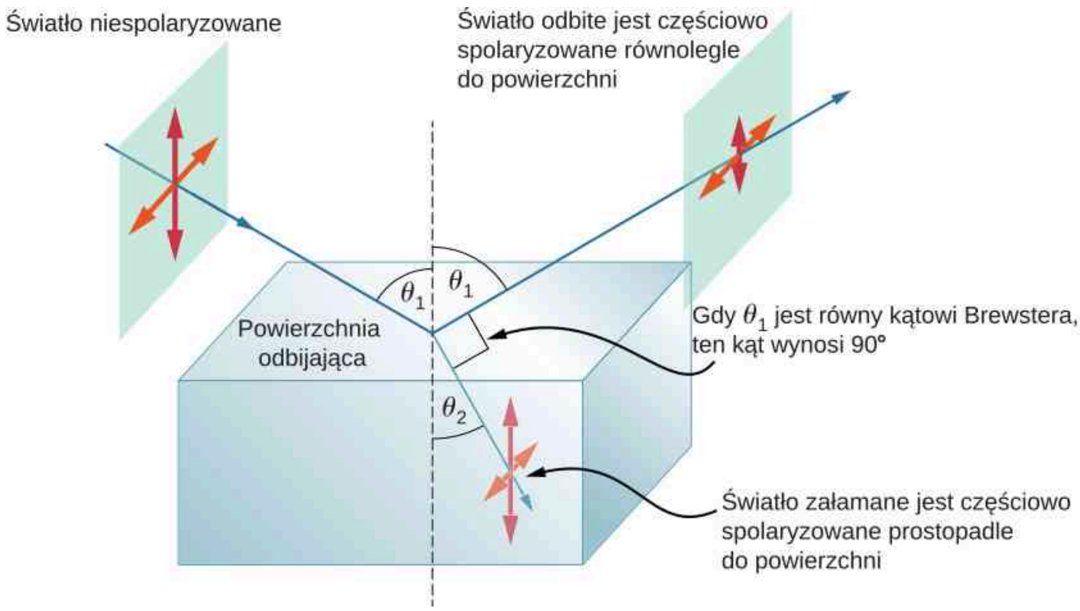
1.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Chociaż nie sprecyzowaliśmy kierunku w Przykładzie 1.7, załóż, że polaryzator był obrócony zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara o $71{,}6°$, zmniejszając natężenie światła o 90%. O ile zmniejszyłoby się natężenie światła, gdyby polaryzator został obrócony o $71{,}6°$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara?

Polaryzacja przez odbicie

Zapewne już się domyślasz, że przeciwsłoneczne okulary z filtrem polaryzacyjnym zmniejszają refleksy światła, ponieważ światło odbite jest spolaryzowane. Możesz to sprawdzić samodzielnie, trzymając przeciwsłoneczne okulary z filtrem polaryzacyjnym przed sobą, obracając je i patrząc na światło odbite od powierzchni wody lub szkła. W trak-

cie obracania okularów zauważysz, że zmienia się natężenie światła docierającego do twoich oczu – raz obraz jest jaśniejszy, raz ciemniejszy, ale nigdy nie jest całkowicie czarny. To dowodzi, że światło odbite jest spolaryzowane tylko częściowo i z tego względu nie może być całkowicie wygaszone przez okulary przeciwsłoneczne z filtrem polaryzacyjnym.

Rysunek 1.38 przedstawia sytuację, w której wiązka niespolaryzowanego światła pada na pewną powierzchnię. Wiązka załamana jest częściowo spolaryzowana, jednak dominuje w niej polaryzacja pionowa. W wiązce odbitej od powierzchni występują również obie składowe, ale dominuje w niej polaryzacja pozioma. Wytłumaczenie fizycznych powodów tego zjawiska wykracza poza zakres tej książki, ale jest prosty sposób na zapamiętanie kierunków polaryzacji poszczególnych wiązek światła. Wprowadźmy do opisu polaryzacji podwójne strzałki. O polaryzacji pionowej mówimy wtedy, gdy podwójna strzałka jest prostopadła do powierzchni, na którą pada światło (strzałki czerwone) i jest bardziej prawdopodobne, że wiązka o takiej polaryzacji załamie się, a nie odbije. Polaryzację poziomą oznaczymy podwójną strzałką, równoległą do powierzchni, na którą pada wiązka światła niespolaryzowanego (strzałki pomarańczowe). W tym przypadku jest bardziej prawdopodobne, że wiązka o takiej polaryzacji odbije się od powierzchni. Okulary przeciwsłoneczne posiadające filtr polaryzacyjny o pionowym kierunku polaryzacji tłumić będą lepiej światło odbite od obiektów niż światło niespolaryzowane docierające do okularów z innych źródeł.



Rysunek 1.38 Polaryzacja przez odbicie. Światło niespolaryzowane można w sposób uproszczony opisać jako superpozycję dwóch fal spolaryzowanych, których kierunki polaryzacji są wzajemnie prostopadłe (natężenia obu fal są takie same – podwójne strzałki czerwone i pomarańczowe mają tę samą długość). Niespolaryzowane światło pada na powierzchnię odbijającą, gdzie składowa o pionowej polaryzacji ulega załamaniu (wnika do ośrodka), natomiast składowa o polaryzacji poziomej jest odbijana. Zachowanie fal spolaryzowanych padających na powierzchnię odbijającą jest podobne do zachowania strzał, które mogą wbijać się w powierzchnię, kiedy padają na nią prostopadle, lub odbijać się, kiedy padają równolegle.

Ponieważ część światła, która nie została odbita, jest załamywana, stopień polaryzacji zależy od współczynników załamania ośrodków. Można wykazać, że światło odbite jest całkowicie spolaryzowane dla kąta odbicia θ_B danego zależnością

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \tag{1.7}$$

gdzie n_1 to współczynnik załamania dla ośrodka, w którym porusza się wiązka padająca i odbita, a n_2 jest współczynnikiem załamania dla ośrodka tworzącego powierzchnię, od której odbija się światło. To równanie nazywane jest **prawem Brewstera** (ang. **Brewster's law**), a kąt jest nazywany **kątem Brewstera** (ang. **Brewster's angle**), od nazwiska dziewiętnastowiecznego szkockiego fizyka, który odkrył tę zależność.

W animacji Open Source Physics (https://openstaxcollege.org/l/21phyaniincref) pokazano światło padające, odbite i załamane jako promienie i fale EM. Spróbuj obrócić animację, aby uzyskać wizualizację 3D, a także zmienić kąt padania. Światło odbite pod kątem bliskim kątowi Brewstera staje się silnie spolaryzowane.

Przykład 1.8

Polaryzacja światła przez odbicie

a. Pod jakim kątem światło poruszające się w powietrzu musi padać na powierzchnię wody, żeby po odbiciu zostało całkowicie spolaryzowane poziomo?

b. Jak zmieni się kąt, gdy światło pada na szkło?

Strategia rozwiązania

Do rozwiązania zadania potrzebne są wartości współczynników załamania. Powietrze ma $n_1 = 1$, woda ma $n_2 = 1{,}333$, a szkło kronowe ma $n'_2 = 1{,}52$. Możemy bezpośrednio zastosować równanie określające tangens kąta Brewstera i podstawić odpowiednie wartości współczynników załamania.

Rozwiązanie

a. Wstawiając znane wartości do równania

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$

otrzymujemy

$$\operatorname{tg} \theta_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1{,}333}{1} = 1{,}333.$$

Rozwiązujemy równanie dla kąta θ_B

$$\theta_B = \operatorname{arctg} 1{,}333 = 53{,}1°.$$

b. Podobnie dla szkła kronowego

$$\operatorname{tg} \theta'_B = \frac{n'_2}{n_1} = \frac{1{,}52}{1} = 1{,}52.$$

Zatem

$$\theta'_B = \operatorname{arctg} 1{,}52 = 56{,}7°.$$

Znaczenie

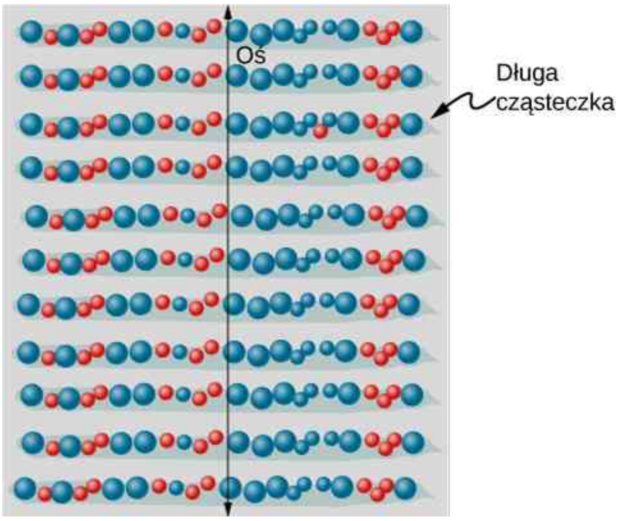
Światło odbite pod tymi kątami byłoby całkowicie wytłumione przez dobrej jakości polaryzator charakteryzujący się pionowym kierunkiem polaryzacji. Kąt Brewstera dla ośrodków woda-powietrze ma podobną wartość jak dla przypadku szkło-powietrze, tak więc okulary przeciwsłoneczne z filtrem polaryzacyjnym są równie skuteczne dla światła odbitego od wody, jak i od szkła w podobnych warunkach. Światło, które nie zostaje odbite od powierzchni ośrodka, wnika do niego – jest załamywane. Dlatego przy kącie padania równym kątowi Brewstera światło załamane posiada delikatnie pionową polaryzację. Nie jest ono jednak całkowicie spolaryzowane pionowo, ponieważ odbiciu ulega tylko mała część padającego światła, natomiast znaczna część światła spolaryzowanego poziomo ulega załamaniu.

1.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Co się dzieje, jeśli światło padające na powierzchnię pod kątem Brewstera jest w 100% spolaryzowane pionowo?

Wyjaśnienie działania polaryzatorów na poziomie atomowym

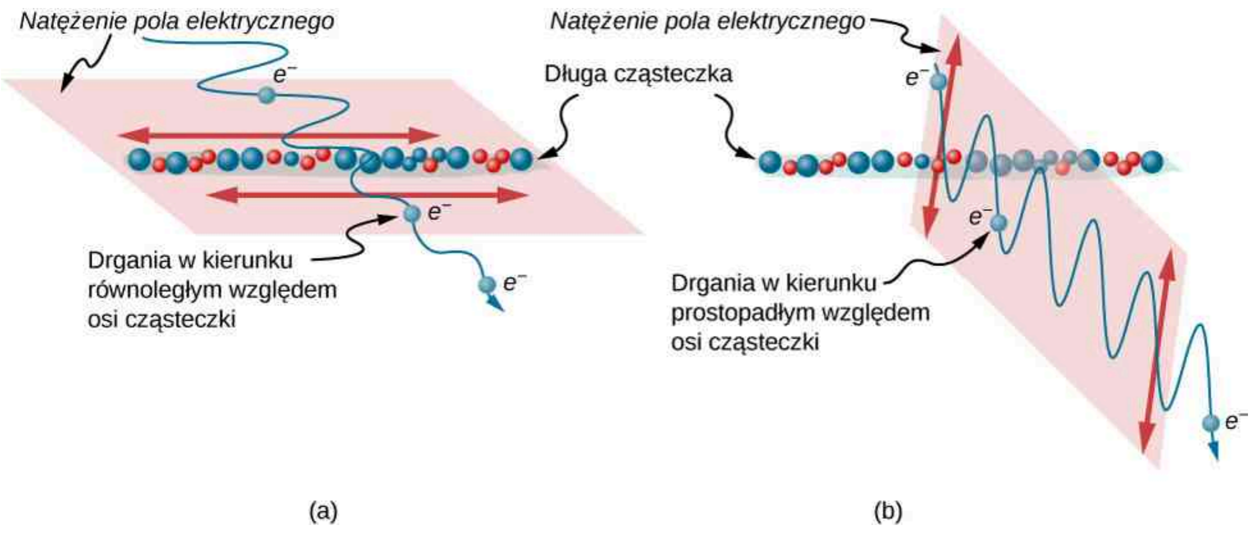
Polaryzatory (filtry polaryzacyjne) charakteryzuje kierunek polaryzacji, który może być przedstawiony jako analogia do wcześniej omawianej pionowej szczeliny. Ta szczelina przepuszcza wyłącznie falę EM (zazwyczaj światło

widzialne), której wektor natężenia pola elektrycznego jest równoległy do kierunku polaryzacji polaryzatora. Taki efekt uzyskuje się dzięki zastosowaniu długich cząsteczek ustawionych prostopadle do kierunku polaryzacji, jak pokazano na Rysunku 1.39.



Rysunek 1.39 Długie cząsteczki są ułożone prostopadle do osi zwanej kierunkiem polaryzacji polaryzatora. Jeśli składowa elektryczna fali EM jest prostopadła względem prostej, wzdłuż której leżą molekuły, wówczas przechodzi przez filtr, podczas gdy składowa elektryczna równoległa do wspomnianej prostej jest pochłaniana.

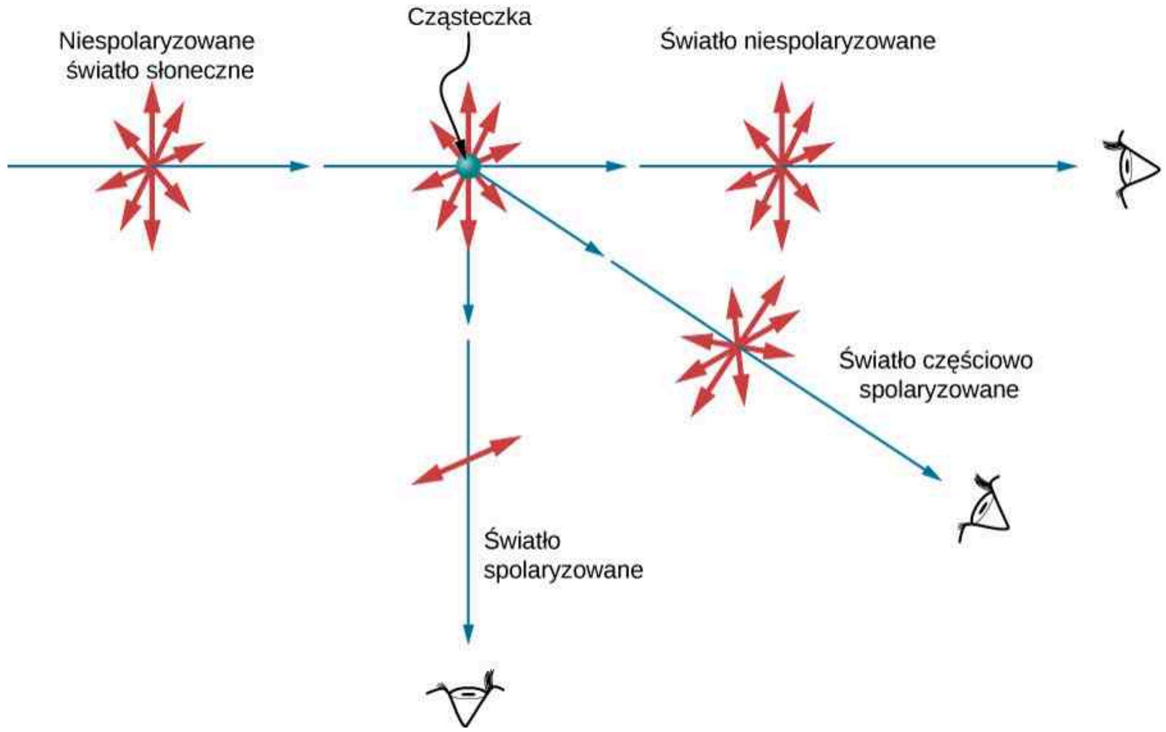
Rysunek 1.40 ilustruje, w jaki sposób pochłaniana jest składowa natężenia pola elektrycznego równoległa do długich molekuł. Fala EM składa się z drgających pól elektrycznego i magnetycznego. Pole elektryczne jest silne w porównaniu z polem magnetycznym i silniej oddziałuje z ładunkami w cząsteczkach. Najbardziej podatnymi na oddziaływanie naładowanymi cząstkami są elektrony, ze względu na ich małą masę. Jeśli elektron zostaje zmuszony do drgań, może pochłaniać energię fal EM. To powoduje zmniejszenie natężenia pola elektrycznego fali, a tym samym zmniejsza natężenie światła. W długich cząsteczkach drgania elektronów w kierunku równoległym do osi cząsteczek zachodzą łatwiej niż w kierunku prostopadłym do osi. Elektrony są związane z cząsteczkami i ich ruchy są bardziej ograniczone w kierunku prostopadłym do ułożenia cząsteczek. W ten sposób elektrony pochłaniają fale EM, których składowe natężenia pola elektrycznego są równoległe do cząsteczki. Oddziaływanie z elektronami wektora natężenia pola elektrycznego, który jest prostopadły do cząsteczki, jest znacznie słabsze i umożliwia przejście takiego pola przez polaryzator. Dlatego kierunek polaryzacji polaryzatora jest prostopadły do osi cząsteczki.



Rysunek 1.40 (a) Elektron drgający w długiej cząsteczce równolegle do jej osi. Drganie elektronu pochłania energię, zmniejszając natężenie składowej elektrycznej fali EM, która jest równoległa do cząsteczki. (b) Elektron drgający prostopadle do osi cząsteczki.

Polaryzacja przez rozpraszanie

Jeśli weźmiemy okulary przeciwsłoneczne z filtrem polaryzacyjnym i będziemy patrzeć na błękitne niebo, obracając nimi, zobaczymy, że niebo staje się raz jasne, raz ciemne. Jest to dowód na to, że światło rozpraszane przez powietrze jest częściowo spolaryzowane. Rysunek 1.41 pomoże zobrazować przyczynę tego zjawiska. Ponieważ światło jest poprzeczną falą EM, wprawia w ruch drgający elektrony cząsteczek powietrza w kierunku prostopadłym do kierunku rozchodzenia się fali. Drgające elektrony stają się źródłem promieniowania, niczym małe anteny. Ponieważ drgają one prostopadle do kierunku promienia światła, emitowane przez nie promieniowanie EM jest spolaryzowane prostopadle względem kierunku promienia. Gdy obserwujemy światło wzdłuż linii prostopadłej do pierwotnego promienia, jak pokazano na rysunku, wówczas nie może wystąpić polaryzacja światła rozproszonego w kierunku równoległym do pierwotnego promienia, ponieważ oznaczałoby to, że pierwotny promień jest falą podłużną. Wzdłuż innych kierunków składowa innej polaryzacji może być rzutowana na kierunek linii obserwacji, a rozproszone światło jest tylko częściowo spolaryzowane. Co więcej, wielokrotne rozproszenie pozwala światłu dotrzeć do twoich oczu z różnych kierunków i może zawierać różne polaryzacje.



Rysunek 1.41 Polaryzacja przez rozpraszanie. Drgania elektronów w cząsteczkach powietrza pod wpływem niespolaryzowanego światła odbywają się w kierunku prostopadłym do kierunku pierwotnego promienia. Dlatego światło rozproszone jest spolaryzowane prostopadle do kierunku promienia pierwotnego.

Zdjęcia nieba mogą być przyciemnione za pomocą polaryzatorów; jest to sztuczka, z której korzysta wielu fotografów, aby zwiększyć kontrast chmur. Rozpraszanie światła przez cząstki zawieszone, takie jak dym lub pył, również może być przyczyną polaryzacji światła. Badanie polaryzacji rozproszonych fal EM jest przydatnym narzędziem analitycznym do określania przyczyn rozpraszania.

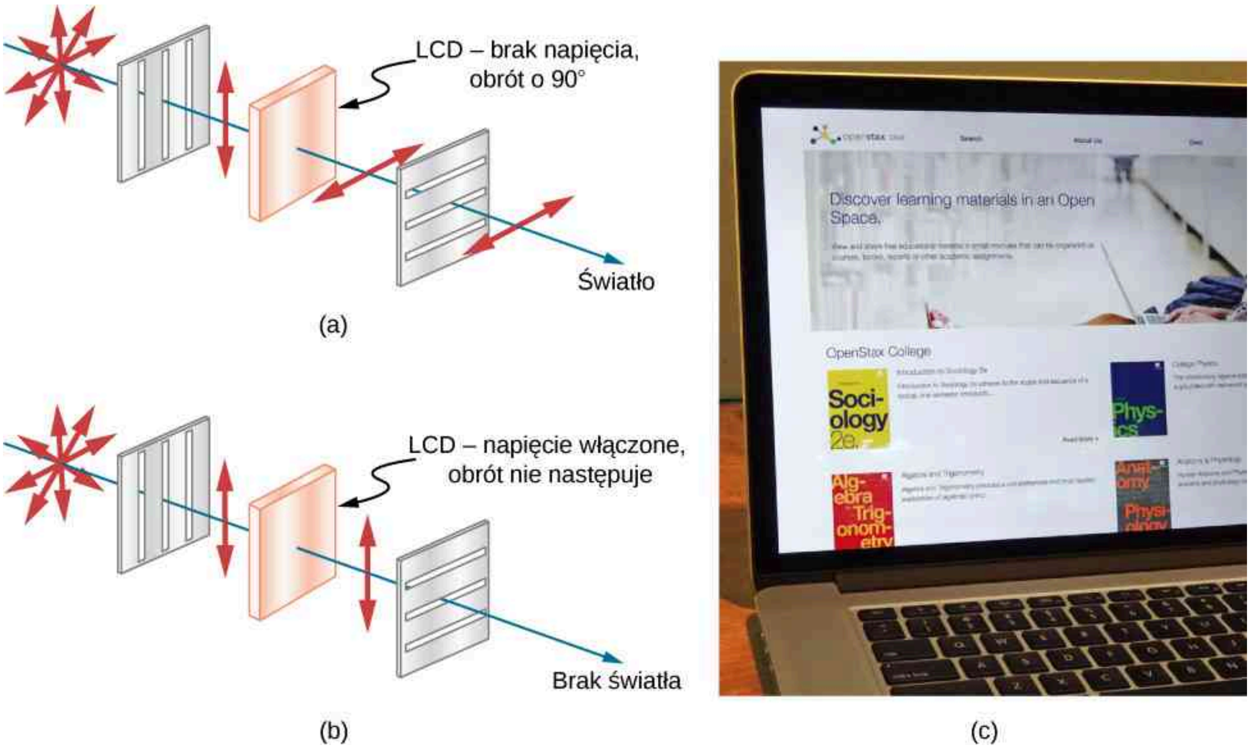
W okularach przeciwsłonecznych wykorzystuje się wiele efektów optycznych. Mogą przepuszczać światło o określonej polaryzacji, mogą też zawierać barwniki przyciemniające lub zmieniające kolor światła, mogą wreszcie mieć powłokę antyrefleksyjną lub refleksyjną. Ostatnio coraz większą popularnością cieszą się soczewki fotochromowe, które ciemnieją na słońcu i stają się przezroczyste w pomieszczeniu. Soczewki fotochromowe zawierają cząsteczki organiczne w postaci mikrokryształów, które zmieniają swoje właściwości po wystawieniu na działanie promieniowania UV występującego w świetle słonecznym, a po powrocie do sztucznego oświetlenia niezawierającego promieniowania UV znów stają się przezroczyste.

Ciekłe kryształy oraz inne efekty polaryzacyjne w materiałach

Z pewnością masz świadomość występowania **wyświetlaczy ciekłokrystalicznych** (LCD, ang. **liquid crystal display**) na przykład w zegarkach, kalkulatorach, monitorach komputerowych, telefonach komórkowych, smartfonach, tele-

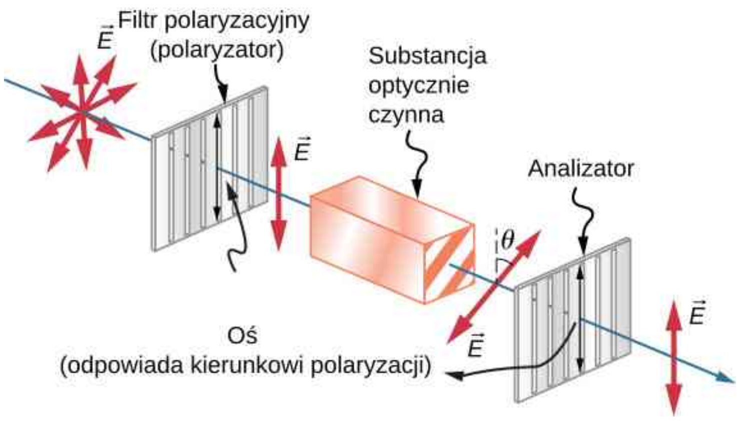
wizorach i wielu innych urządzeniach, być może nie zdajesz sobie jednak sprawy, że w ich działaniu wykorzystano zjawisko polaryzacji. Ciekłe kryształy są tak nazwane, ponieważ ich cząsteczki wykazują uporządkowanie nawet w stanie ciekłym. Posiadają one właściwość, która umożliwia obrót polaryzacji światła przechodzącego przez nie o $90°$. Ponadto obrót polaryzacji może być sterowany przez przyłożenie napięcia, jak pokazano na Rysunku 1.42. Przełączanie polaryzacji może następować szybko i w małych, dobrze zdefiniowanych obszarach, aby wytworzyć kontrastujące znaki widoczne w tak wielu urządzeniach wykorzystujących LCD.

Telewizory z ekranem LCD mają z tyłu obudowy układ silnych lamp, które generują dużo światła. Światło przenika do przedniego panelu telewizora przez miliony małych obszarów zwanych pikselami (elementy matrycy LCD). Jeden z nich pokazano na Rysunku 1.42 (a) i (b). Każdy piksel ma trzy komórki, z czerwonym, niebieskim lub zielonym filtrem, a ich sterowanie jest niezależne. Gdy napięcie w danej komórce jest wyłączone, ciekły kryształ przepuszcza światło przez określony filtr. Możemy zmienić kontrast obrazu poprzez zmianę wartości napięcia przyłożonego do ciekłego kryształu.



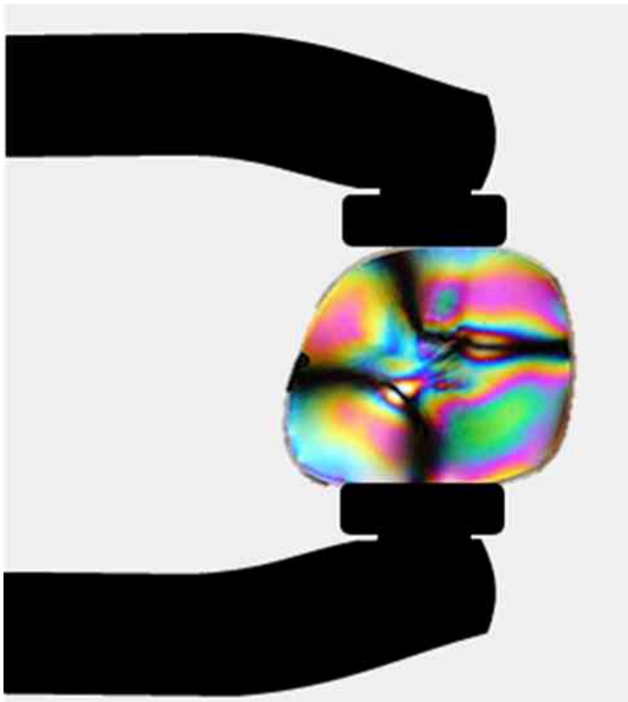
Rysunek 1.42 (a) Kierunek polaryzacji światła, po przejściu przez ciekły kryształ, zmienia się o $90°$. Następnie światło przechodzi przez polaryzator, którego kierunek polaryzacji jest prostopadły do kierunku polaryzacji pierwotnego promienia. (b) Gdy napięcie jest doprowadzone do ciekłego kryształu, kierunek polaryzacji światła nie zmienia się; światło nie przechodzi przez polaryzator, powodując, że ten obszar jest ciemny w porównaniu z jego otoczeniem. (c) Wytwarzane ekrany LCD ze względu na szereg zalet mogą być stosowane w wielu urządzeniach, takich jak smartfony, laptopy i telewizory.

Wiele kryształów i roztworów obraca płaszczyznę polaryzacji światła przechodzącego przez nie. Takie substancje nazywane są **optycznie czynnymi** (ang. **optically active**). Przykładami są woda z cukrem, insulina i kolagen (Rysunek 1.43). Dodatkowo właściwość ta jest związana z rodzajem substancji, a wielkość i kierunek obrotu zależą od kilku innych czynników, do których zaliczyć można: stężenie substancji, długość drogi, jaką przebywa światło w tej substancji oraz długość fali światła. Aktywność optyczna jest spowodowana asymetrycznym kształtem cząsteczek, na przykład spiralnym. Pomiary obrotu płaszczyzny polaryzacji światła przechodzącego przez substancję mogą być zatem użyte do wyznaczania jej stężenia – tak jest w przypadku cukru w wodzie. Mogą również dostarczyć informacji na temat kształtu cząsteczek (np. białka) oraz czynników mających wpływ na ich kształt, takich jak temperatura i pH.



Rysunek 1.43 Aktywność optyczna to zdolność pewnych substancji do obrotu płaszczyzny polaryzacji światła przechodzącego przez te substancje. Obrót jest mierzony przy pomocy analizatora (analizator jest również polaryzatorem).

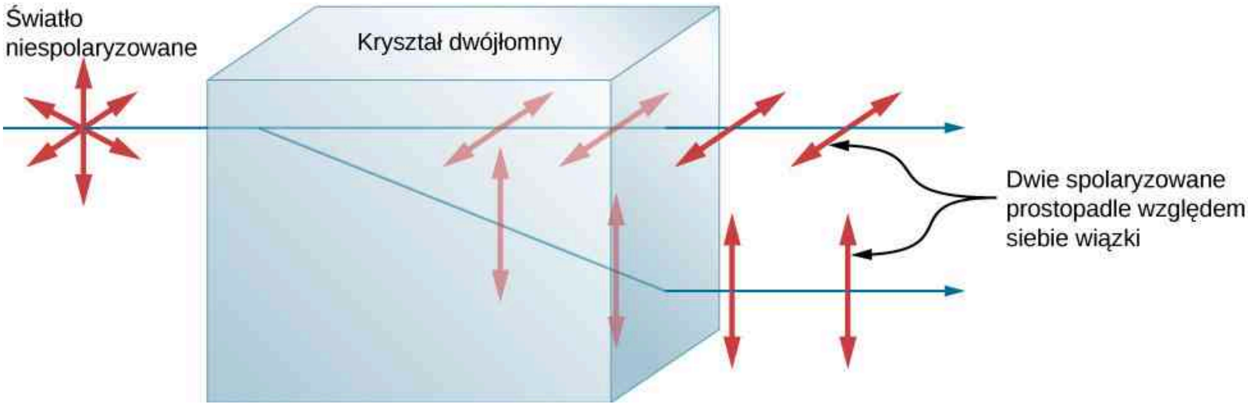
Szkło i tworzywa sztuczne stają się optycznie czynne pod wpływem naprężenia – im większe naprężenie, tym silniejszy efekt optyczny. **Optyczna analiza naprężeń** (ang. **optical stress analysis**) w elementach o skomplikowanym kształcie może być przeprowadzona poprzez wykonanie modeli z tworzywa sztucznego i obserwowanie ich między skrzyżowanymi polaryzatorami, jak pokazano na Rysunku 1.44. Oczywiście, efekt zależy od długości fali, jak również od wielkości naprężenia. Zależność od długości fali jest czasami również wykorzystywana do celów artystycznych.



Rysunek 1.44 Optyczna analiza naprężenia soczewki wykonanej z tworzywa sztucznego umieszczonej pomiędzy skrzyżowanymi polaryzatorami. Źródło: „Infopro”/Wikimedia Commons

Innym ciekawym zjawiskiem związanym ze światłem spolaryzowanym jest zdolność niektórych kryształów do rozdzielania niespolaryzowanej wiązki światła na dwie wiązki spolaryzowane. Jest to możliwe, ponieważ kryształ ma różne wartości współczynnika załamania dla różnych płaszczyzn drgania fali – jedną wartość dla światła spolaryzowanego w jednym kierunku, inną dla światła spolaryzowanego w kierunku prostopadłym względem pierwszego. W rezultacie każda składowa ma własny kąt załamania. Takie kryształy nazywamy **dwójłomnymi** (ang. **birefringent**). Jeśli ustawi się je właściwie, z kryształu wyjdą dwie wiązki prostopadle spolaryzowane względem siebie (Rysunek 1.45). Kryształy dwójłomne mogą być używane do wytwarzania wiązek światła spolaryzowanego ze światła niespo-

laryzowanego. Niektóre materiały dwójłomne cechuje zdolność do pochłaniania jednej ze spolaryzowanych wiązek światła. Takie materiały nazywane są dichroicznymi i mogą wytwarzać światło o określonej polaryzacji poprzez pochłanianie drugiej wiązki. To zjawisko jest podstawą działania krystalicznych polaryzatorów optycznych.



Rysunek 1.45 Materiały dwójłomne, takie jak powszechnie występujący kalcyt (minerał), rozdzielają niespolaryzowaną wiązkę światła na dwie wiązki o wzajemnie prostopadłych kierunkach polaryzacji. Współczynnik załamania ma inną wartość dla każdej z wiązek.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 1

KLUCZOWE POJĘCIA

aktywność optyczna (ang. optical activity) właściwość substancji objawiająca się zdolnością do obracania płaszczyzny polaryzacji światła przechodzącego przez tę substancję

całkowite wewnętrzne odbicie (ang. total internal reflection) zjawisko zachodzące na granicy dwóch ośrodków, podczas którego całe światło jest odbijane i nie występuje załamanie

dwójłomność (ang. birefringence) właściwość niektórych kryształów polegająca na rozdzielaniu wiązki niespolaryzowanego światła na dwie wiązki

dyspersja (ang. dispersion) rozkład światła w ciągłe widmo długości fal

fala niespolaryzowana (ang. unpolarized wave) dotyczy fal, których wektory natężenia pola elektrycznego drgają w przypadkowych kierunkach

fala spolaryzowana (ang. polarized wave) dotyczy fal, których wektory natężenia pola elektrycznego drgają w jednym kierunku

kierunek polaryzacji (ang. direction of polarization) kierunek równoległy do kierunku wektora natężenia pola elektrycznego fali EM

kąt Brewstera (ang. Brewster's angle) kąt padania, dla którego światło odbite jest całkowicie spolaryzowane

kąt graniczny (ang. critical angle) kąt padania, dla którego kąt załamania przyjmuje wartość 90°

optyka falowa (ang. wave optics) część optyki zajmująca się falową naturą światła

optyka geometryczna (ang. geometric optics) dział optyki tłumaczący zjawiska optyczne za pomocą pojęcia promienia świetlnego

polaryzacja (ang. polarization) nadanie wektorowi natężenia pola elektrycznego fali EM określonego kierunku drgań

polaryzacja pionowa (ang. vertically polarized) drgania wektora natężenia pola elektrycznego fali EM zachodzą w płaszczyźnie pionowej

polaryzacja pozioma (ang. horizontally polarized) drgania wektora elektrycznego fali EM zachodzą w płaszczyźnie poziomej

prawo Brewstera (ang. Brewster's law) $\operatorname{tg} \theta_B = n_2 / n_1$, gdzie n_1 jest współczynnikiem załamania ośrodka, w którym poruszają się promienie padający i odbity, a n_2 jest współczynnikiem załamania ośrodka stanowiącego granicę, na której następuje odbicie i załamanie światła

prawo Malusa (ang. Malus's law) natężenie I światła przechodzącego przez polaryzator jest powiązane z natężeniem światła padającego na polaryzator I_0 zależnością: $I = I_0 \cos^2 \theta$

prawo odbicia (ang. law of reflection) kąt odbicia jest równy kątowi padania

prawo załamania (ang. law of refraction) kiedy promień światła przechodzi z jednego ośrodka do drugiego, jego kierunek zmienia się zależnie od wartości współczynników załamania każdego z ośrodków i sinusów kąta padania i kąta załamania

promień (ang. ray) linia prosta wychodząca z pewnego punktu

reflektor narożny (ang. corner reflector) przedmiot składający się z dwóch (lub trzech) wzajemnie prostopadłych, odbijających powierzchni, działający tak, że światło padające na taki układ jest odbijane dokładnie równolegle względem kierunku padania

współczynnik załamania (ang. index of refraction) dla materiałów jest to stosunek prędkości światła w próżni do prędkości światła w tym materiale

zasada Huygensa (ang. Huygens' principle) każdy punkt czoła fali jest źródłem nowej fali kolistej/kulistej (wtórnej) rozchodzącej się w tym samym kierunku i z tą samą prędkością co fala pierwotna; czoło nowej fali jest płaszczyzną styczną do wszystkich fal wtórnych

załamanie światła (ang. refraction) zmiana kierunku promienia światła zachodząca, gdy światło przechodzi przez niejednorodności materii (różne ośrodki)

światłowód (ang. optical fiber) plastikowe lub szklane włókno pozwalające przesyłać światło dzięki zjawisku całkowitego wewnętrznego odbicia

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Prędkość światła	$c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m / s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$
Współczynnik załamania	$n = \frac{c}{v}$
Prawo odbicia	$\theta_\text{o} = \theta_\text{p}$
Prawo załamania (prawo Snella)	$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
Kąt graniczny	$\theta_\text{g} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ dla $n_1 > n_2$
Prawo Malusa	$I = I_0 \cos^2\theta$
Prawo Brewstera	$\operatorname{tg}\theta_\text{B} = \frac{n_2}{n_1}$

PODSUMOWANIE

1.1 Rozchodzenie się światła

- Prędkość światła w próżni wynosi $c = 2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m / s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$.
- Współczynnik załamania materiałów jest dany wzorem $n = c / v$, gdzie c jest prędkością światła w próżni, a v prędkością światła w materiale.
- Model światła jako promienia świetlnego opisuje drogę światła jako linię prostą. Dział optyki wyjaśniający zjawiska optyczne przy wykorzystaniu pojęcia promienia nazywany jest optyką geometryczną.
- Światło może poruszać się ze źródła do innego miejsca na trzy sposoby: (1) prosto ze źródła w próżni; (2) w różnych ośrodkach; (3) po odbiciu od zwierciadła (lustra).

1.2 Prawo odbicia

- Gdy promień światła pada na gładką powierzchnię, kąt odbicia jest równy kątowi padania.
- Zwierciadło ma gładką powierzchnię i odbija światło pod określonym kątem.
- Światło jest rozpraszane, gdy odbija się od chropowatej powierzchni.

1.3 Załamanie

- Zmiana kierunku biegu promienia światła przy przejściu z jednego ośrodka do innego jest nazywana załamaniem.
- Prawo załamania, zwane także prawem Snella, wiąże współczynniki załamania dwóch ośrodków ze zmianą kąta promienia światła przechodzącego przez granicę tych ośrodków.

1.4 Całkowite wewnętrzne odbicie

- Kąt padania, dla którego kąt załamania wynosi $90°$, jest nazywany kątem granicznym.
- Całkowite wewnętrzne odbicie jest zjawiskiem, które występuje na granicy pomiędzy dwoma ośrodkami, gdy kąt padania w pierwszym ośrodku jest większy od kąta granicznego; wówczas całe światło jest odbijane z powrotem do tego ośrodka.
- Światłowody umożliwiają transmisję światła przez plastikowe lub szklane włókna, dzięki wykorzystaniu zjawiska całkowitego wewnętrznego odbicia.
- Okładzina światłowodu (płaszcz) zapobiega przechodzeniu światła pomiędzy włóknami w wiązce.
- Rozbłyski światła w diamentach wywołane są zjawiskiem całkowitego wewnętrznego odbicia powiązanym z dużym współczynnikiem załamania światła.

1.5 Rozszczepienie

- Rozdzielenie światła białego w pełne widmo długości fal jest nazywane dyspersją (rozszczepieniem światła).
- Tęcza powstaje w wyniku występowania zjawisk załamania i odbicia prowadzących do rozszczepienia światła słonecznego w ciągły rozkład barw (widmo ciągłe).
- Rozszczepienie światła (dyspersja) może być przyczyną problemów w układach optycznych.

1.6 Zasada Huygensa

- Zgodnie z zasadą Huygensa każdy punkt czoła fali jest źródłem nowej fali kolistej (lub kulistej w przypadku przestrzennym), tak zwanej fali wtórnej, rozprzestrzeniającej się z taką samą prędkością i w tym samym kierunku co fala pierwotna. Nowe czoło fali jest styczne do powierzchni wszystkich fal kolistych.
- Zwierciadło odbija padającą falę pod kątem równym kątowi padania, potwierdzając prawo odbicia.
- Prawo załamania można wyjaśnić, stosując zasadę Huygensa dla czoła fali przechodzącej z jednego ośrodka do drugiego.
- Ugięcie fali na krawędziach szczeliny lub przeszkody nazywane jest dyfrakcją.

1.7 Polaryzacja

- Polaryzacja określa kierunek drgań fali względem jej kierunku rozchodzenia. Kierunek polaryzacji jest definiowany jako kierunek równoległy do wektora natężenia pola elektrycznego fali EM.
- Światło niespolaryzowane składa się z wielu promieni o przypadkowych kierunkach polaryzacji.
- Światło niespolaryzowane można spolaryzować, przepuszczając je przez polaryzator lub inny materiał o takich właściwościach. Proces polaryzacji światła powoduje około dwukrotny spadek jego natężenia.
- Natężenie I światła spolaryzowanego po przejściu przez polaryzator wynosi $I = I_0 \cos^2 \theta$, gdzie I_0 jest natężeniem światła padającego, a θ jest kątem pomiędzy kierunkiem polaryzacji światła i kierunkiem polaryzacji polaryzatora.
- Polaryzację światła można również uzyskać w wyniku odbicia.
- Prawo Brewstera mówi, że odbite światło jest całkowicie spolaryzowane dla kąta odbicia θ_B , zwanego kątem Brewstera.
- Do polaryzacji może także dojść w wyniku rozpraszania światła.
- Kilka rodzajów optycznie aktywnych substancji powoduje obrót kierunku polaryzacji po przejściu światła przez te substancje.

PYTANIA

1.1 Rozchodzenie się światła

1. Jakie warunki muszą być spełnione, żeby światło mogło być traktowane jak promień świetlny? A jakie dla fali?

2. Dlaczego współczynnik załamania jest zawsze większy lub równy jedności?

3. Czy fakt, że światło błyskawicy dociera do nas przed grzmotem, jest dowodem na to, że prędkość światła jest o wiele większa od prędkości dźwięku? Omów, jak można wykorzystać ten efekt do wyznaczenia prędkości światła.

4. Zastanów się, jaki proces fizyczny może być odpowiedzialny za fakt, że światło porusza się wolniej w ośrodku materialnym niż w próżni.

1.2 Prawo odbicia

5. Odwołując się do prawa odbicia, wyjaśnij, dlaczego puder sprawia, że nos jest matowy. Jaka jest nazwa tego efektu optycznego?

1.3 Załamanie

6. W tym rozdziale zostało opisane rozproszenie światła spowodowane odbiciem od chropowatej powierzchni. Światło może być także rozpraszane w wyniku załamania. Opisz to zjawisko na przykładzie światła padającego na pokruszony lód.

7. Jak zmieni się kierunek światła (do normalnej czy od normalnej), gdy przechodzi z powietrza do wody? Z wody do szkła? Ze szkła do powietrza?

8. Wyjaśnij, dlaczego każdy obiekt znajdujący się pod wodą zawsze wydaje się znajdować bliżej powierzchni wody niż jest w rzeczywistości?

9. Wyjaśnij, dlaczego nogi człowieka brodzącego w basenie wydają się bardzo krótkie? Uzasadnij swoją odpowiedź, rysując bieg promieni światła od stóp człowieka do oka obserwatora znajdującego się na brzegu basenu.

10. Wyjaśnij, dlaczego wiosło częściowo zanurzone w wodzie sprawia wrażenie wygiętego.

1.4 Całkowite wewnętrzne odbicie

11. Pierścień z bezbarwnym kamieniem szlachetnym wpadł do wody. Po zanurzeniu w wodzie kamień staje się niewidoczny. Czy to może być diament? Wyjaśnij.

12. Najpowszechniejszym rodzajem mirażu jest wrażenie, że światło pochodzące od dalekiego obiektu odbija się od kałuży wody, której w rzeczywistości nie ma. Miraże są często obserwowane na pustyni lub na rozgrzanym asfalcie, kiedy warstwa gorącego powietrza znajduje się blisko powierzchni podłoża. Wyjaśnij, jak powstają miraże, biorąc pod uwagę, że współczynnik załamania jest niższy dla powietrza o wyższej temperaturze.

13. Jak można oszacować współczynnik załamania ośrodka, wykorzystując zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia?

1.5 Rozszczepienie

14. Czy to prawda, że za powstanie tęczy jest odpowiedzialne całkowite wewnętrzne odbicie? Wyjaśnij to, używając takich wielkości jak współczynniki załamania i kąty, najlepiej odnosząc się do ilustracji poniżej. Niektórzy z nas widzieli podwójną tęczę; czy jest fizycznie możliwe zaobserwowanie potrójnej tęczy?



15. Wysokiej jakości diament jest całkowicie przezroczysty i bezbarwny, przepuszcza wszystkie widzialne długości fal z niewielką absorpcją. Wyjaśnij, dlaczego diament rozbłyskuje różnymi kolorami, gdy jest oświetlany białym światłem.

1.6 Zasada Huygensa

16. Jak efekty falowe zależą od rozmiaru obiektu, z którym oddziałuje fala? Na przykład dlaczego dźwięk ugina się na narożniku budynku, a światło nie?

17. Czy zasada Huygensa ma zastosowanie dla wszystkich rodzajów fal?

18. Jeśli w danym przypadku obserwowana jest dyfrakcja, to czy dowodzi to, że mamy do czynienia z falą? Czy odwrotne twierdzenie jest prawdziwe? Czyli: jeśli nie obserwujemy dyfrakcji, to nie mamy do czynienia z falą?

1.7 Polaryzacja

19. Czy fala dźwiękowa rozprzestrzeniająca się w powietrzu może być spolaryzowana? Wyjaśnij.

20. Przez dwa skrzyżowane polaryzatory światło nie zostanie przepuszczone. Jeśli jednak umieścimy pomiędzy nimi trzeci polaryzator, pewna ilość światła może przejść przez taki układ. Dlaczego tak jest? W jakich warunkach większość światła przejdzie przez układ?

21. Wyjaśnij, co dzieje się z energią przenoszoną przez światło, jeśli przechodząc przez układ dwóch skrzyżowanych polaryzatorów jest wygaszane.

22. Jeśli cząsteczki rozpraszające światło są o wiele mniejsze od długości fali, ilość rozproszonego światła jest proporcjonalna do $1 / \lambda$. Czy to oznacza, że bardziej rozpraszane jest światło o krótszej długości fali niż dłuższej? Jaki ma to związek z niebieską barwą nieba?

23. Korzystając z informacji podanych w poprzednim pytaniu, wyjaśnij, dlaczego zachodzące Słońce jest czerwone.

24. Gdy światło odbija się od gładkiej powierzchni pod kątem Brewstera, jest całkowicie spolaryzowane w kierunku równoległym do powierzchni odbijającej. Część światła zostanie załamana do wnętrza ośrodka. Opisz, jak należałoby przeprowadzić doświadczenie w celu określenia polaryzacji światła załamanego. Jakiego kierunku polaryzacji można się spodziewać i czy światło będzie całkowicie spolaryzowane?

25. Jeżeli leżysz na plaży i patrzysz na wodę z głową pochyloną na bok, zauważysz, że Twoje polaryzacyjne okulary przeciwsłoneczne nie działają dobrze. Dlaczego?

ZADANIA

1.1 Rozchodzenie się światła

26. Jaka jest prędkość światła w wodzie? A jaka w glicerynie?

27. Jaka jest prędkość światła w powietrzu? A jaka w szkle kronowym?

28. Oblicz współczynnik załamania dla ośrodka, w któ-

rym prędkość światła wynosi $2{,}012 \cdot 10^8 \text{ m / s}$ i zidentyfikuj substancję na podstawie danych zebranych w Tabeli 1.1.

29. W której z wymienionych w Tabeli 1.1 substancji prędkość światła wynosi $2{,}29 \cdot 10^8 \text{ m / s}$?

30. W średniowieczu doszło do zderzenia dużej planetoidy z Księżycem. Zostało ono opisane przez mnichów z Anglii jako czerwona poświata wokół Księżyca. Po jakim czasie od uderzenia planetoidy w Księżyc znajdujący się w odległości $3{,}84 \cdot 10^5 \text{ km}$ od Ziemi pierwszy efekt świetlny dotarł do naszej planety?

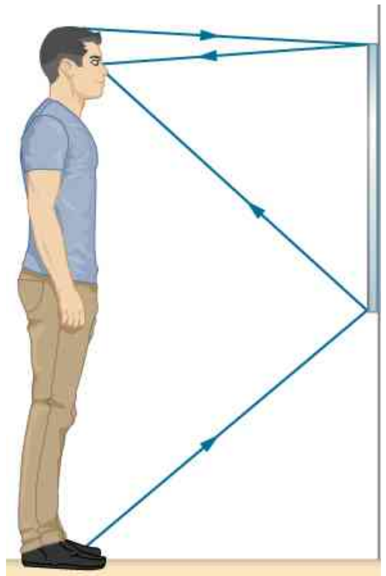
31. Elementy komputera komunikują się ze sobą przez światłowód o współczynniku załamania $n = 1{,}55$. Ile czasu (w nanosekundach) potrzeba, żeby sygnał w światłowodzie przebył odległość $0{,}2 \text{ m}$?

32. Porównaj czasy potrzebne do przebycia przez światło 1 km na powierzchni Ziemi i w przestrzeni kosmicznej.

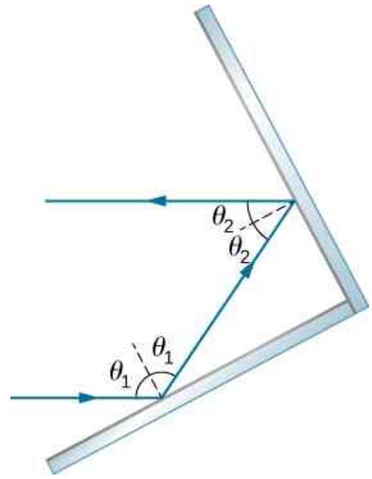
33. Na jaką głębokość w wodzie dotrze światło w czasie $1{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ s}$?

1.2 Prawo odbicia

34. Przypuśćmy, że mężczyzna stoi przed lustrem, jak pokazano poniżej. Jego oczy znajdują się na wysokości $1{,}65 \text{ m}$ od podłogi, a czubek jego głowy znajduje się o $0{,}13 \text{ m}$ wyżej. Znajdź położenie względem podłogi dolnego i górnego końca najmniejszego lustra, w którym może on zobaczyć stopy oraz czubek swojej głowy. Jak ma się odległość od lustra w stosunku do wzrostu mężczyzny?

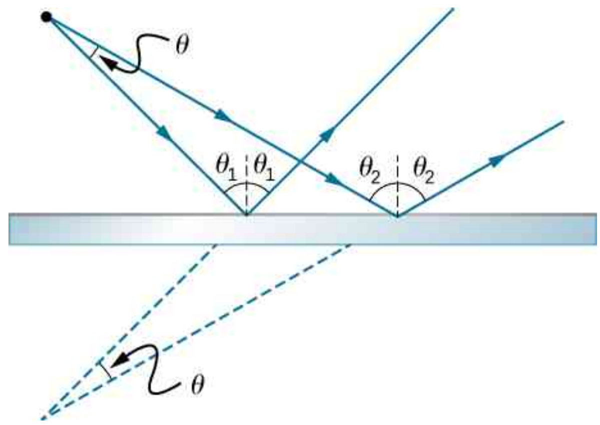


35. Wykaż, że gdy światło odbija się od dwóch prostopadłych względem siebie zwierciadeł, promień odbity jest równoległy do padającego, jak pokazuje rysunek poniżej.



36. Na powierzchni Księżyca astronauci pozostawili reflektor narożny, od którego cyklicznie obija się wiązka lasera. Odległość od Księżyca jest obliczana z wykorzystaniem czasu przebiegu światła od Ziemi do Księżyca i z powrotem. Jaka poprawka wyrażona w procentach jest niezbędna, aby uwzględnić opóźnienie czasowe spowodowane przejściem światła przez atmosferę Ziemi? Załóż, że odległość Księżyca od Ziemi wynosi $3{,}84 \cdot 10^8 \text{ m}$, a atmosfera ziemska (której gęstość zmienia się wraz z wysokością) jest równoważna warstwie o grubości 30 km i współczynniku załamania $n = 1{,}000\,293$.

37. Płaskie lustro nie jest ani skupiającym, ani rozpraszającym zwierciadłem. Aby to udowodnić, rozpatrzmy dwa promienie wychodzące z tego samego punktu, tworzące kąt θ (zob. poniżej). Wykaż, że po odbiciu od płaskiego zwierciadła kąt pomiędzy ich kierunkami będzie nadal wynosił θ.



1.3 Załamanie

Jeżeli nie podano inaczej, w poniższych zadaniach należy przyjąć, że współczynnik załamania dla szkła wynosi $1{,}5$, a dla wody $1{,}333$.

38. Wiązka światła pada w powietrzu na szklaną płytkę pod kątem $35°$. Ile wynoszą kąty odbicia i załamania?

39. Wiązka światła pada w powietrzu na powierzchnię stawu pod kątem $20°$ względem jego powierzchni. Ile

wynoszą kąty odbicia i załamania?

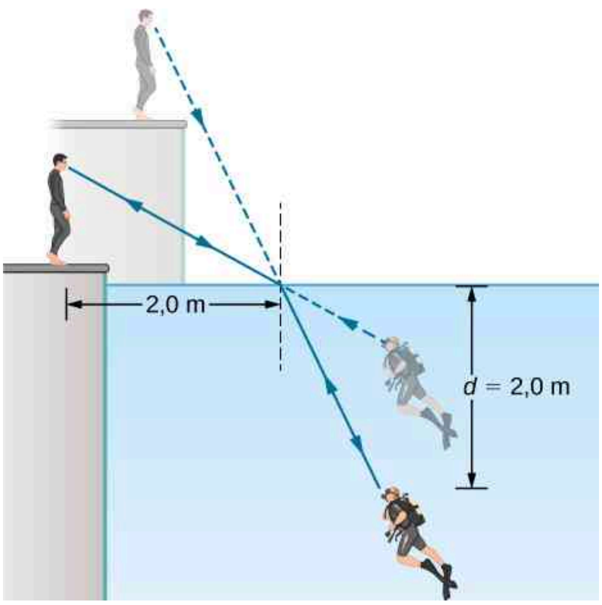
40. Kiedy promień światła przechodzi z wody do szkła, obserwowany jest pod kątem 30° względem normalnej. Jaki jest kąt padania wiązki?

41. Latarka-brelok zanurzona w wodzie emituje wiązkę światła w kierunku powierzchni pod kątem 30°. Jaki jest kąt załamania po przejściu wiązki do powietrza?

42. Promienie słoneczne są widoczne pod powierzchnią wody pod kątem 30° do normalnej. Pod jakim kątem nad horyzontem znajduje się Słońce?

43. Droga wiązki światła w powietrzu zmienia się od kąta padania równego 35° do kąta załamania równego 22°, gdy światło wnika do prostopadłościennego bloku z tworzywa sztucznego. Jaki jest współczynnik załamania tworzywa, z którego wykonany jest blok?

44. Nurek, trenując w basenie, patrzy na swojego instruktora, tak jak pokazuje poniższy rysunek. Jaki kąt tworzy promień biegnący od twarzy instruktora z prostopadłą do wody (normalną) w punkcie, gdzie promień wchodzi do wody? Kąt pomiędzy promieniem w wodzie i normalną wynosi 25°.



45. a. Wykorzystując informacje z poprzedniego zadania, wyznacz wysokość, na jakiej znajduje się głowa instruktora względem powierzchni wody, pamiętając, że najpierw musisz obliczyć kąt padania;
b. Wyznacz pozorną głębokość, na jakiej znajduje się głowa nurka względem poziomu wody, widzianą przez instruktora.

1.4 Całkowite wewnętrzne odbicie

46. Sprawdź, czy kąt graniczny dla światła przechodzącego z wody do powietrza wynosi 48,6°, jak pokazano na końcu Przykładu 1.4 dotyczącego kąta granicznego dla światła poruszającego się w rurce z polistyrenu (rodzaj plastiku) umieszczonej w powietrzu?

47. a. Na końcu Przykładu 1.4 stwierdzono, że kąt graniczny dla światła przechodzącego z diamentu do powietrza wynosi 24,4°. Sprawdź to;
b. Jaki jest kąt graniczny dla światła przechodzącego z cyrkonu do powietrza?

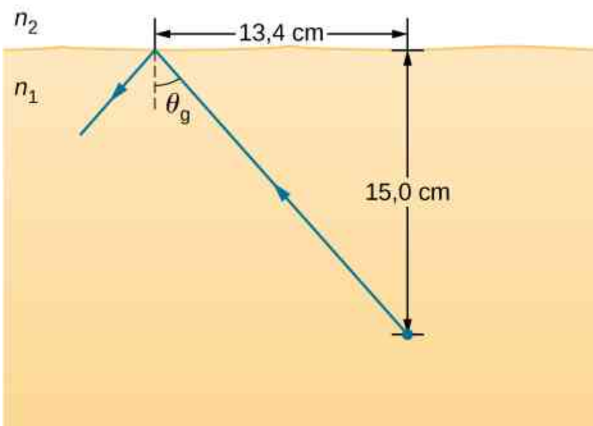
48. Do wykonania światłowodu użyto szkła flint, które pokryto szkłem kronowym. Jaki jest kąt graniczny dla tego układu?

49. Przy jakim minimalnym kącie uzyskamy całkowite wewnętrzne odbicie światła poruszającego się w wodzie i odbijającego się od lodu?

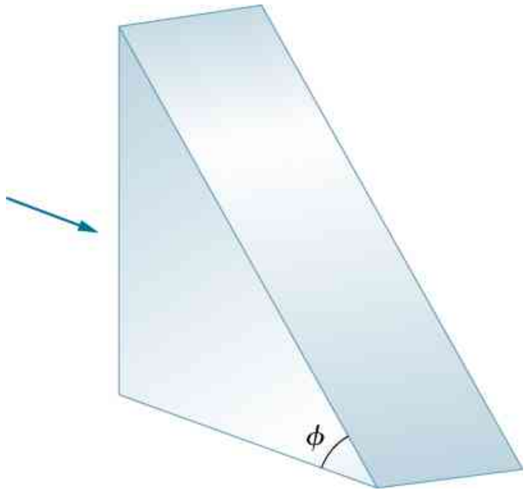
50. Załóżmy, że wykorzystamy zjawisko całkowitego wewnętrznego odbicia, żeby wykonać pryzmat narożny. Jaki powinien być minimalny współczynnik załamania światła dla materiału, z którego wykonamy pryzmat narożny, jeśli znajduje się on w powietrzu, a kąt padania jest równy 45°?

51. Współczynnik załamania substancji może być obliczony poprzez wyznaczenie kąta granicznego.
a. Jaki jest współczynnik załamania substancji, dla której kąt graniczny wynosi 68,4°, gdy zanurzono ją w wodzie? Jaka to substancja (wykorzystaj Tabelę 1.1)?
b. Jaki byłby kąt graniczny dla tej substancji w powietrzu?

52. Promień światła emitowanego pod powierzchnią nieznanej cieczy graniczącej z powietrzem ulega całkowitemu wewnętrznemu odbiciu, jak pokazano poniżej. Wyznacz współczynnik załamania tej cieczy. Jaka to ciecz? Zidentyfikuj ją na podstawie wyznaczonego współczynnika załamania.



53. Promienie światła padają prostopadle na pionową powierzchnię szklanego pryzmatu ($n = 1{,}5$), jak pokazano poniżej.
a. Jaka musi być największa wartość kąta θ, aby promień całkowicie odbił się od pochylonej powierzchni pryzmatu?
b. Powtórz obliczenia dla sytuacji, gdy pryzmat znajduje się w wodzie.



1.5 Rozszczepienie

54. a. Jaki jest stosunek prędkości światła o barwie czerwonej do tego o barwie fioletowej w diamencie? Wykorzystaj dane z Tabeli 1.2;
b. Jaki będzie ten stosunek w polistyrenie?
c. Który z materiałów bardziej rozszczepia światło?

55. Wiązka światła białego przechodzi z powietrza do wody pod kątem padania $75°$. Jaki będzie kąt załamania światła czerwonego (660 nm) i fioletowego (410 nm)?

56. O ile różni się kąt graniczny dla światła czerwonego (660 nm) i fioletowego (410 nm) w diamencie znajdującym się w powietrzu?

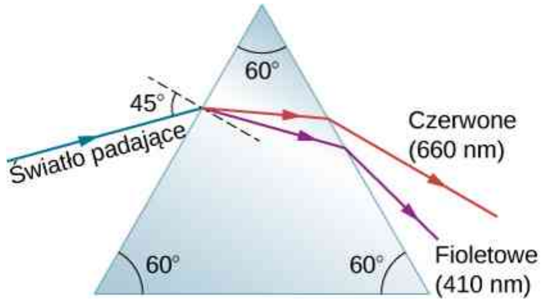
57. Wąska wiązka światła zawierająca długości fal 580 nm (żółta) i 550 nm (zielona) przechodzi z polistyrenu do powietrza, padając na powierzchnię pod kątem $30°$.
a. Jaki jest kąt pomiędzy wiązką żółtą i zieloną po wyjściu z polistyrenu?
b. Jaką drogę muszą one pokonać w powietrzu, żeby znalazły się w odległości 1 mm od siebie?

58. Równoległa wiązka światła zawierająca długości fal 610 nm (pomarańczowa) i 410 nm (fioletowa) przechodząca z topionego kwarcu do wody pada na granicę ośrodków pod kątem $60°$. Jaki jest kąt pomiędzy wiązką pomarańczową i fioletową w wodzie?

59. Promień światła o długości fali 610 nm przechodzi z powietrza do topionego kwarcu pod kątem padania $55°$. Jaki musi być kąt padania światła o długości fali 470 nm wchodzącego do szkła flint, aby uzyskać taki sam kąt załamania?

60. Wąska wiązka światła zawierająca fale o długościach 660 nm (czerwone) i 470 nm (niebieskie) przechodzi z powietrza przez kawałek szkła kronowego o grubości 1 cm i ponownie wraca do powietrza. Kąt padania wiązki wynosi $30°$.
a. Pod jakim kątem obserwowany jest promień barwy czerwonej i niebieskiej?
b. Jaka jest odległość między tymi promieniami po wyjściu ze szkła?

61. Wąska wiązka światła białego wnika do pryzmatu wykonanego ze szkła kronowego pod kątem padania $45°$, jak pokazano poniżej. Pod jakimi kątami θ_c i θ_f wychodzą z pryzmatu składowe światła o barwie czerwonej (660 nm) i fioletowej (410 nm)?



1.7 Polaryzacja

62. Jaki powinien być kąt pomiędzy kierunkiem polaryzacji światła i kierunkiem polaryzacji polaryzatora, żeby natężenie światła zmniejszyło się do połowy?

63. Kąt pomiędzy kierunkami polaryzacji dwóch polaryzatorów wynosi $45°$. O ile drugi polaryzator zmniejsza natężenie światła przechodzącego przez pierwszy polaryzator?

64. Dwie folie polaryzacyjne P_1 i P_2 są umieszczone razem w taki sposób, że kąt pomiędzy ich kierunkami polaryzacji wynosi θ. Ile wynosi kąt θ, jeśli tylko 25% maksymalnego natężenia światła przechodzi przez taki układ?

65. Załóż, że w poprzednim zadaniu światło padające na polaryzator P_1 jest niespolaryzowane. Jaka część padającego światła przechodzi przez układ polaryzatorów dla wyznaczonej wartości kąta θ?

66. Jeśli mamy całkowicie spolaryzowane światło o natężeniu $150 \text{ W} / \text{m}^2$, jakie będzie jego natężenie po przejściu przez polaryzator, którego kierunek polaryzacji tworzy kąt $89°$ względem kierunku polaryzacji światła?

67. Jaki powinien być kąt pomiędzy kierunkiem polaryzacji polaryzatora i kierunkiem polaryzacji światła o natężeniu $1 \text{ kW} / \text{m}^2$, żeby zmniejszyć natężenie do wartości $10 \text{ W} / \text{m}^2$?

68. Na końcu Przykładu 1.7 stwierdzono, że natężenie światła spolaryzowanego zmniejszy się do 90% początkowej wartości w wyniku przejścia przez polaryzator o osi ustawionej pod kątem $18{,}4°$ względem kierunku polaryzacji. Zweryfikuj to twierdzenie.

69. Trzy polaryzatory zestawiono w taki sposób, że kierunek polaryzacji drugiego polaryzatora jest obrócony o $25°$ względem pierwszego, zaś kierunek polaryzacji trzeciego polaryzatora jest obrócony o $40°$ względem pierwszego (w tę samą stronę). Jaka część natężenia niespolaryzowanego światła wchodzącego do układu jest przepuszczana?

70. Wykaż, że jeśli masz trzy polaryzatory i kierunek polaryzacji drugiego tworzy kąt $45°$ względem pierwszego, a kierunek polaryzacji trzeciego tworzy kąt $90°$ względem pierwszego, to intensywność światła przechodzącego przez pierwszy będzie zmniejszona do 25% jego początkowej wartości. (Stoi to w sprzeczności do przypadku, gdy mamy tylko pierwszy i trzeci polaryzator, które zmniejszają natężenie światła do zera, natomiast wstawienie drugiego pomiędzy nimi powoduje wzrost natężenia światła).

71. W celu obrócenia o $90°$ kierunku polaryzacji wiązki światła spolaryzowanego liniowo student umieszcza polaryzatory P_1 i P_2 w taki sposób, że kierunki polaryzacji tworzą odpowiednio kąty $45°$ i $90°$ względem kierunku polaryzacji wiązki światła.
a. Jaka część światła padającego przechodzi przez polaryzator P_1?
b. Jaka przez układ polaryzatorów?
c. Powtórz obliczenia dla punktu (b), przyjmując kąty $30°$ i $90°$.

72. Kąt Brewstera dla światła poruszającego się w wodzie i padającego na blok wykonany z plastiku (tworzywo sztuczne) wynosi $50°$. Jaki jest współczynnik załamania plastikowego bloku?

73. Pod jakim kątem światło musi odbić się od powierzchni diamentu, żeby zostało całkowicie spolaryzowane?

74. Ile wynosi kąt Brewstera dla światła poruszającego się w wodzie, które odbija się od szkła kronowego?

75. Płetwonurek widzi światło odbite od powierzchni wody. Pod jakim kątem dociera do niego światło całkowicie spolaryzowane?

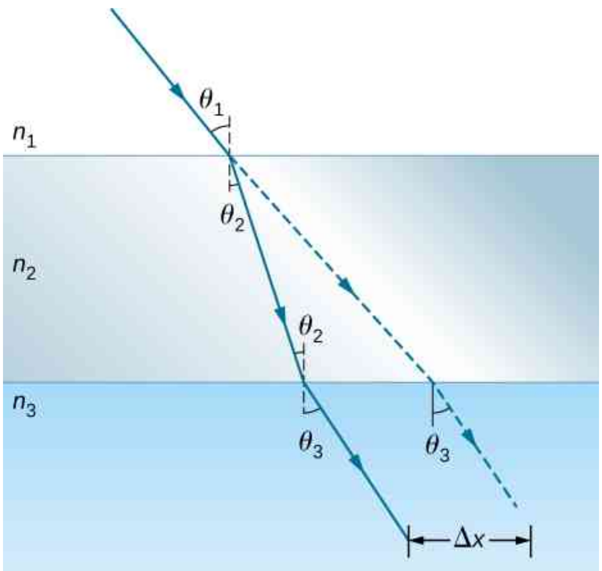
ZADANIA DODATKOWE

76. Na podstawie swoich doświadczeń Rømer oszacował, że światło potrzebuje $22\ \text{min}$, żeby pokonać drogę równą średnicy orbity Ziemi wokół Słońca.
a. Użyj tej wartości oraz znanej średnicy orbity Ziemi do oszacowania prędkości światła;
b. W rzeczywistości światło potrzebuje $16{,}5\ \text{min}$ na pokonanie tej drogi. Użyj tej wartości do obliczenia prędkości światła.

77. Francuski fizyk Marie Alfred Cornu wykonał pomiar prędkości światła zaproponowany przez Armanda Fizeau, używając koła o średnicy $4\ \text{cm}$ i o 180 zębach. Odległość od koła do zwierciadła wynosiła $22{,}9\ \text{km}$. Zakładając, że Cornu mierzył prędkość światła dokładnie, wyznacz prędkość kątową obrotu koła.

78. Załóż, że masz nieznaną substancję zanurzoną w wodzie i chcesz ją zidentyfikować, określając jej współczynnik załamania światła. Ustawiasz układ tak, żeby wiązka światła wchodziła do niego pod kątem $45°$, i obserwujesz wiązkę załamaną pod kątem $40{,}3°$. Jaki jest współczynnik załamania światła i jaka to prawdopodobnie substancja?

79. Jak pokazano poniżej, promień światła przechodzi z powietrza przez szkło kronowe do wody (jak w akwarium). Oblicz wielkość Δx pokazaną na rysunku, zakładając, że kąt padania wynosi $40°$, a grubość szkła wynosi $1\ \text{cm}$.



80. Zakładając sytuację z poprzedniego zadania, wykaż, że kąt θ_3 byłby taki sam, gdyby w układzie nie występował drugi ośrodek (szkło).

81. Pod jakim kątem światło musi się poruszać wewnątrz szkła kronowego, żeby po odbiciu od powierzchni wody było całkowicie spolaryzowane (jak w akwarium)?

82. Światło odbite pod kątem $55{,}6°$ od szyby okiennej jest całkowicie spolaryzowane. Jaki jest jej współczynnik załamania światła i jaki to prawdopodobnie materiał?

83. a. Światło odbite pod kątem $62{,}5°$ od kamienia szlachetnego w pierścionku jest całkowicie spolaryzo-

wane. Czy klejnot może być diamentem?
b. Pod jakim kątem światło zostałoby całkowicie spolaryzowane w przypadku, gdyby klejnot znajdował się w wodzie?

84. Jeśli θ_B jest kątem Brewstera dla światła odbitego od granicy pomiędzy dwoma materiałami, padającego od góry, a θ'_B jest kątem Brewstera dla światła odbitego od tej granicy, padającego od dołu, udowodnij, że $\theta_B + \theta'_B = 90°$.

85. Nieracjonalne wyniki. Przypuśćmy, że światło przechodzi z wody do innego materiału, padając po kątem $10°$ i załamując się pod kątem $14{,}9°$.
a. Jaki jest współczynnik załamania światła dla tego materiału?
b. Co jest nieracjonalne w tym wyniku?
c. Które założenia są nieracjonalne lub niespójne?

86. Nieracjonalne wyniki. Światło, przechodząc z wody do kamienia szlachetnego, pada na jego powierzchnię pod kątem $80°$ i załamuje się pod kątem $15{,}2°$.
a. Jaka jest prędkość światła w kamieniu szlachetnym?
b. Co jest nieracjonalne w tym wyniku?
c. Które założenia są nieracjonalne lub niespójne?

87. Jeśli polaryzator zmniejsza natężenie światła spolaryzowanego do 50% jego wartości początkowej, o ile zmniejszone są wartości natężenia pola elektrycznego i magnetycznego?

88. Kładziesz dwie pary okularów przeciwsłonecznych z filtrem polaryzacyjnym w taki sposób, że ich kierunki polaryzacji tworzą kąt $15°$. O ile dłużej będzie trwało dostarczenie do oka tej samej energii świetlnej co w przypadku jednej pary okularów? Załóż, że soczewki okularów są idealnie przezroczyste, pomijając ich właściwości polaryzacyjne.

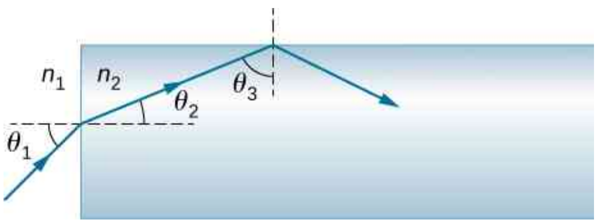
89. a. W dzień, w którym natężenie światła słonecznego wynosi $1 \mathrm{kW} / \mathrm{m}^2$, okrągła soczewka o średnicy $0{,}2\,\mathrm{m}$ ogniskuje światło na wodzie znajdującej się w czarnej zlewce. Dwie płytki polaryzacyjne zostały umieszczone przed soczewką w taki sposób, że ich kierunki polaryzacji tworzą kąt $20°$. Zakładając, że światło słoneczne jest niespolaryzowane, a efektywność polaryzatorów jest stuprocentowa, oblicz, jaka jest początkowa szybkość nagrzewania wody wyrażona w $°\mathrm{C} / \mathrm{s}$, przyjmując, że woda pochłania 80% światła. Zlewka jest aluminiowa, ma masę $30\,\mathrm{g}$ i zawiera $250\,\mathrm{g}$ wody;
b. Czy filtry polaryzacyjne nagrzewają się? Wyjaśnij.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

90. Pokazy światła z zastosowaniem laserów wykorzystują ruchome zwierciadła do poruszania wiązkami światła i tworzenia kolorowych efektów. Wykaż, że promień światła odbity od zwierciadła zmienia kierunek o 2θ, kiedy zwierciadło obraca się o kąt θ.

91. Załóżmy sytuację, w której światło słoneczne wchodzi do atmosfery ziemskiej pod kątem $90°$, jak podczas wschodu i zachodu Słońca. Zakładając, że granica pomiędzy niemal pustą przestrzenią kosmiczną i atmosferą jest ostra, oblicz kąt załamania dla światła słonecznego. Z tego powodu Słońce jest dłużej widoczne nad horyzontem zarówno podczas wschodu, jak i zachodu Słońca. Następnie zaproponuj zadanie, w którym wyznaczysz kąt załamania dla różnych modeli atmosfery, na przykład wielowarstwowych o różnej gęstości warstw. Twój wykładowca może chcieć pomóc Ci wybrać właściwy poziom złożoności zagadnienia i dobrać zależność współczynnika załamania światła od gęstości powietrza.

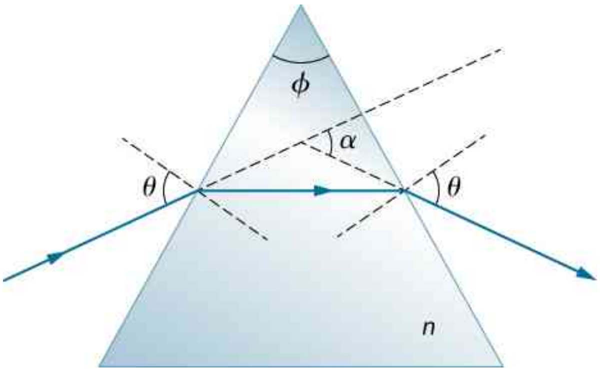
92. Promień światła wchodzący do światłowodu otoczonego powietrzem jest najpierw załamywany, a następnie odbijany, jak pokazano na rysunku poniżej. Wykaż, że jeśli światłowód jest wykonany ze szkła kronowego, każdy wpadający promień będzie ulegał całkowitemu wewnętrznemu odbiciu.



93. Promień światła pada na lewą ścianę pryzmatu (rysunek poniżej) pod kątem θ do normalnej i wychodzi przez prawą ścianę załamany pod kątem θ do normalnej. Wykaż, że współczynnik załamania światła n dla szklanego pryzmatu jest opisany zależnością

$$n = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\alpha + \phi)\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}\phi\right)},$$

gdzie ϕ jest kątem wierzchołkowym pryzmatu, a α kątem, o jaki wiązka została odchylona. Jeśli $\alpha = 37°$, a kąty u podstawy pryzmatu mają po $50°$, ile wynosi n?



94. Jeśli kąt wierzchołkowy ϕ w poprzednim zadaniu wynosi $20°$, a współczynnik załamania $n = 1{,}5$, ile wynosi kąt α?

95. Światło padające na płytkę polaryzacyjną P_1 jest spolaryzowane liniowo pod kątem $30°$ względem kierunku polaryzacji P_1. Płytka polaryzacyjna P_2 jest umieszczona w taki sposób, że jej kierunek polaryzacji jest równoległy do kierunku polaryzacji światła padającego, tzn. również $30°$ względem P_1.

a. Jaka część światła padającego przechodzi przez P_1?
b. Jaka część padającego światła przechodzi przez układ dwóch polaryzatorów?
c. Obracając P_2, uzyskano maksymalne natężenie przechodzącego światła. Jaki jest stosunek tego maksymalnego natężenia przechodzącego światła do natężenia obserwowanego, kiedy P_2 jest obrócony o $30°$ względem P_1?

96. Udowodnij, że jeśli I jest natężeniem światła przechodzącego przez dwa polaryzatory o kierunkach polaryzacji tworzących kąt θ, zaś I' jest natężeniem, gdy kierunki polaryzacji tworzą kąt $90° - \theta$, wtedy $I + I' = I_0$, natężenie źródła. Wskazówka: Zastosuj zależności trygonometryczne $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$ oraz $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

2 | OPTYKA GEOMETRYCZNA I TWORZENIE OBRAZU



Rysunek 2.1 **Cloud Gate** jest rzeźbą wykonaną przez Anisha Kapoora znajdującą się w Parku Tysiąclecia w Chicago. Zwierciadlana powierzchnia odbija i zniekształca obrazy znajdujące się dookoła, także panoramę Chicago. Rzeźba powstała w 2006 roku i stała się popularną atrakcją turystyczną miasta. Jest znakomitym przykładem wykorzystania w sztuce zasad optyki geometrycznej. Źródło: modyfikacja pracy aut. Dhilung Kirata

Treść rozdziału

Wstęp

Ten rozdział przedstawia podstawowe zagadnienia optyki geometrycznej, która opisuje, jak powstają obrazy w wyniku zjawisk odbicia i załamania światła. Optyka ta nazywa się „geometryczną”, ponieważ obrazy tworzone przez elementy optyczne, takie jak zwierciadło czy soczewka, można opisywać, wykonując konstrukcje geometryczne biegu promieni światła. Wiemy, że światło jest falą elektromagnetyczną, jednakże jego natura falowa ujawnia się dopiero wtedy, gdy oddziałuje z przedmiotami o rozmiarach porównywalnych z długością fali światła (około $500\,\mathrm{nm}$). Prawa optyki geometrycznej stosuje się dla światła oddziałującego z przedmiotami o rozmiarach znacznie większych niż długość fali światła.

2.1 | Obrazy tworzone przez zwierciadła płaskie

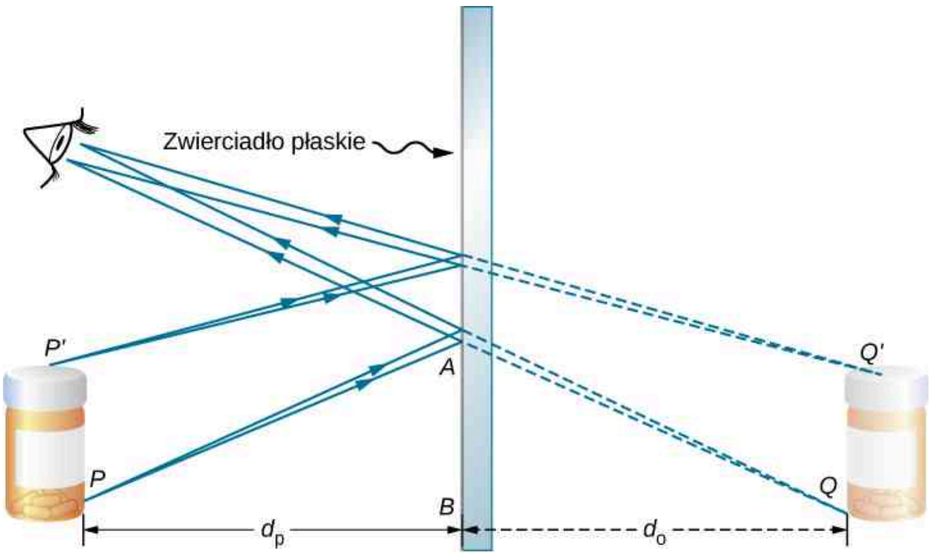
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, jak powstaje obraz w zwierciadle płaskim;
- odróżniać obrazy rzeczywiste od pozornych;
- znajdować położenie i charakteryzować orientację obrazu utworzonego przez zwierciadło płaskie.

Wystarczy udać się do najbliższej łazienki, aby zobaczyć przykład obrazu utworzonego przez zwierciadło. Obrazy powstające w **zwierciadle płaskim** (ang. **plane mirror**) są tej samej wielkości co przedmiot, umiejscowione są za zwierciadłem i zorientowane tak jak przedmiot.

Aby zrozumieć, jak to się dzieje, spójrzmy na Rysunek 2.2. Dwa promienie wychodzące z punktu P padają na zwierciadło, a następnie po odbiciu od zwierciadła wpadają do oka obserwatora. Zauważ, że przy rysowaniu konstrukcji biegu promieni odbitych od zwierciadła skorzystaliśmy z prawa odbicia. Jeżeli odbite promienie zostaną przedłużone za zwierciadło (zob. przerywane linie na Rysunku 2.2), to wydaje się, że promienie odbite od zwierciadła wychodzą z punktu Q. W punkcie Q znajduje się obraz punktu P. Jeżeli powtórzymy tę samą konstrukcję dla punktu P', to otrzymamy jego obraz w punkcie Q'. Łatwo zauważyć, że wysokość obrazu (odległość punktu Q od Q') jest taka sama jak wysokość przedmiotu (odległość punktu P od P'). Tworząc obrazy każdego punktu przedmiotu, otrzymamy za zwierciadłem obraz prosty przedmiotu.



Rysunek 2.2 Dwa promienie światła wychodzące z punktu P po odbiciu od zwierciadła płaskiego wpadają do oka obserwatora. Promienie odbijają się od zwierciadła zgodnie z prawem odbicia. Widzimy, że odbite promienie wychodzą jakby z punktu Q za zwierciadłem, gdzie przecinają się przedłużenia odbitych promieni. W punkcie Q znajduje się obraz pozorny punktu P. Powtórzenie tej samej konstrukcji dla punktu P' daje obraz punktu Q'. Wysokość obrazu jest taka sama jak wysokość przedmiotu, obraz jest prosty, a odległość przedmiotu od zwierciadła d_p jest równa odległości obrazu od zwierciadła d_o.

Zauważ, że dla obserwatora odbite promienie zdają się wychodzić bezpośrednio z obrazu za zwierciadłem. W rzeczywistości promienie te wychodzą z punktów na zwierciadle, gdzie są odbijane. Obraz za zwierciadłem nazywa się **obrazem pozornym** (ang. **virtual image**), ponieważ nie może być utworzony na ekranie – promienie jedynie zdają się wychodzić ze wspólnego punktu za zwierciadłem. Jeżeli znajdziesz się za zwierciadłem, nie zobaczysz obrazu, ponieważ promienie światła tam się nie rozchodzą. Jednakże przed zwierciadłem promienie światła rozchodzą się tak, jakby wychodziły zza zwierciadła, tzn. z miejsca, w którym znajduje się obraz pozorny.

W dalszej części tego podrozdziału omówimy obrazy rzeczywiste. **Obraz rzeczywisty** (ang. **real image**) może powstawać na ekranie, ponieważ promienie światła przechodzą przez ten obraz. Z pewnością możesz zobaczyć obrazy zarówno rzeczywiste, jak i pozorne. Różnica polega tylko na tym, że obraz pozorny nie może powstawać na ekranie, podczas gdy obraz rzeczywisty może.

Położenie obrazu w zwierciadle płaskim

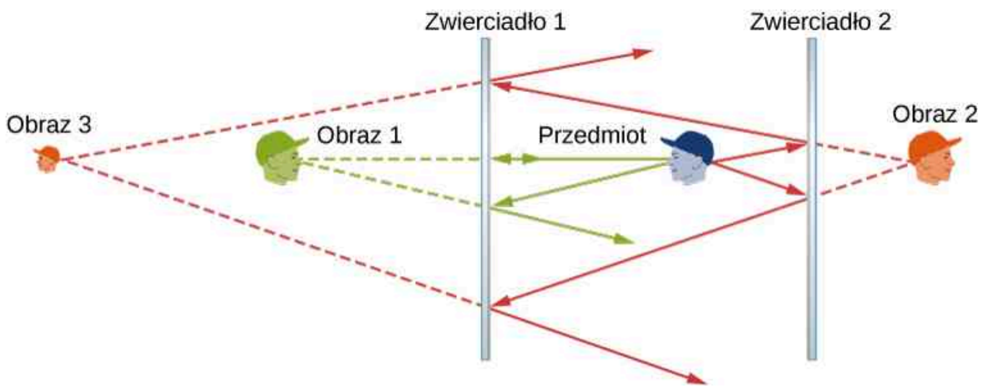
Prawo odbicia mówi, że kąt padania jest równy kątowi odbicia. Zastosowanie tego prawa do trójkątów PAB i QAB na Rysunku 2.2 oraz uwzględnienie praw geometrii pokazuje, że są to trójkąty przystające. To znaczy, że odległość PB od przedmiotu do zwierciadła jest taka sama, jak odległość BQ od zwierciadła do obrazu. **Odległość przedmiotu** (ang. **object distance**, oznaczona jako d_p) jest odległością przedmiotu od zwierciadła (lub bardziej precyzyjnie, od środka elementu optycznego, który tworzy obraz). Podobnie **odległość obrazu** (ang. **image distance**, oznaczona jako d_o) jest odległością obrazu od zwierciadła (lub bardziej precyzyjnie, od środka elementu optycznego tworzącego obraz). Zgodnie z umową, dla zwierciadła płaskiego odległości przedmiotu i obrazu mają przeciwne znaki

$$d_\text{p} = -d_\text{o}. \tag{2.1}$$

Przedmiot rozciągły, taki jak pojemnik na Rysunku 2.2, może być traktowany jako zbiór punktów. Aby znaleźć obraz każdego punktu przedmiotu rozciągłego, możemy zastosować metodę opisaną powyżej, tworząc w ten sposób obraz rozciągły.

Wielokrotny obraz

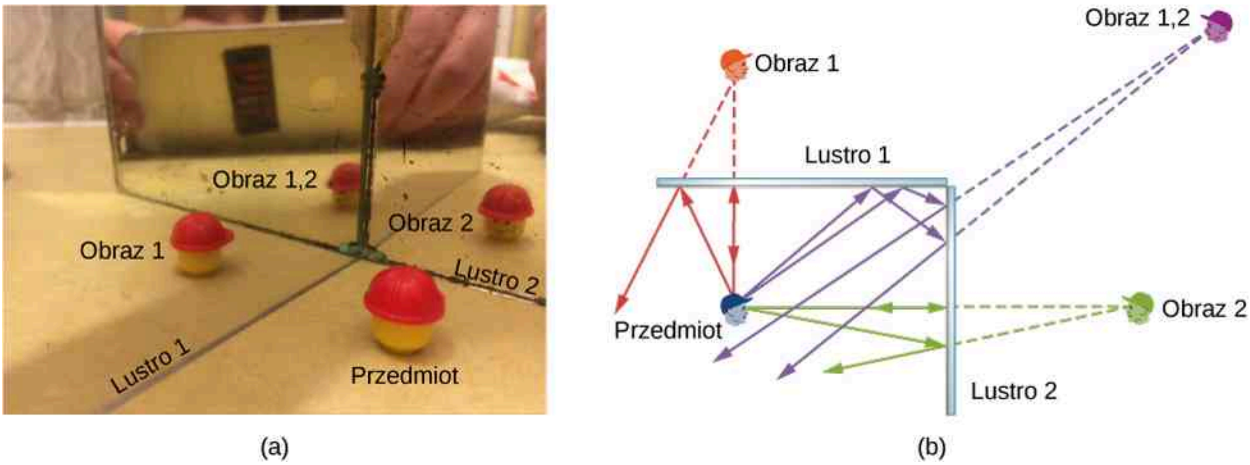
Jeżeli przedmiot znajduje się naprzeciwko dwóch zwierciadeł, to możemy zobaczyć jego obrazy w obu zwierciadłach. Dodatkowo obraz w pierwszym zwierciadle może się zachowywać jak przedmiot dla drugiego zwierciadła, więc drugie zwierciadło może tworzyć obraz obrazu. Jeżeli zwierciadła są ustawione równolegle względem siebie, a przedmiot nie jest położony w środku pomiędzy zwierciadłami, to proces tworzenia obrazu z obrazu zachodzi bez końca, jak można to zaobserwować w pomieszczeniu, w którym lustra są zawieszone naprzeciw siebie. Przedstawia to Rysunek 2.3, który pokazuje trzy obrazy utworzone przez niebieski przedmiot. Zauważ, że każde odbicie odwraca tył i przód przedmiotu, podobnie jak wywinięcie praworęcznej rękawiczki na drugą stronę tworzy leworęczną rękawiczkę (to dlatego odbicie prawej ręki widzimy jako lewą rękę). Z tego powodu przód i tył obrazów 1 i 2 są odwrócone względem przedmiotu, a przód i tył obrazu 3 jest obrócony względem obrazu 2, który jest przedmiotem dla obrazu 3.



Rysunek 2.3 Dwa równoległe zwierciadła teoretycznie mogą utworzyć nieskończenie wiele obrazów przedmiotu znajdującego się w punkcie niebędącym środkiem pomiędzy zwierciadłami. Na rysunku pokazane są takie obrazy. Tył i przód każdego obrazu jest odwrócony względem przedmiotu. Kolory na rysunku zastosowano dla odróżnienia obrazów. Dla zwykłych zwierciadeł kolor obrazu jest zasadniczo taki sam jak kolor przedmiotu.

Może zauważyłeś, że obraz 3 jest mniejszy niż przedmiot, podczas gdy obrazy 1 i 2 są tej samej wielkości co przedmiot. Stosunek wysokości obrazu do wysokości przedmiotu jest nazywany **powiększeniem** (ang. **magnification**). Więcej o powiększeniu zostanie powiedziane w następnym podrozdziale.

Liczbę odbić możemy ograniczyć. Na przykład dwa zwierciadła ustawione pod kątem prostym tworzą trzy obrazy, jak to jest pokazane w części (a) Rysunku 2.4. Obrazy 1 i 2 powstają w wyniku odbicia promieni od poszczególnych zwierciadeł, a obraz 1,2 jest utworzony przez promienie odbite od dwóch zwierciadeł. Jest to pokazane na schemacie biegu promieni w części (b) Rysunku 2.4. Obraz 1,2 znajduje się za rogiem obu zwierciadeł.



Rysunek 2.4 Dwa lustra mogą tworzyć wielokrotne obrazy. (a) Trzy obrazy plastikowej głowy są widoczne w dwóch lustrach ustawionych pod kątem prostym. (b) Pojedynczy przedmiot odbijający się od dwóch luster ustawionych pod kątem prostym może tworzyć trzy obrazy, jak zostało to pokazane przez obrazy oznaczone kolorami zielonym, fioletowym i czerwonym.

2.2 | Zwierciadła sferyczne

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, jak powstaje obraz w zwierciadle sferycznym;
- wykorzystywać konstrukcję biegu promieni i równanie zwierciadła do obliczania charakterystycznych wielkości obrazu powstającego w zwierciadle sferycznym.

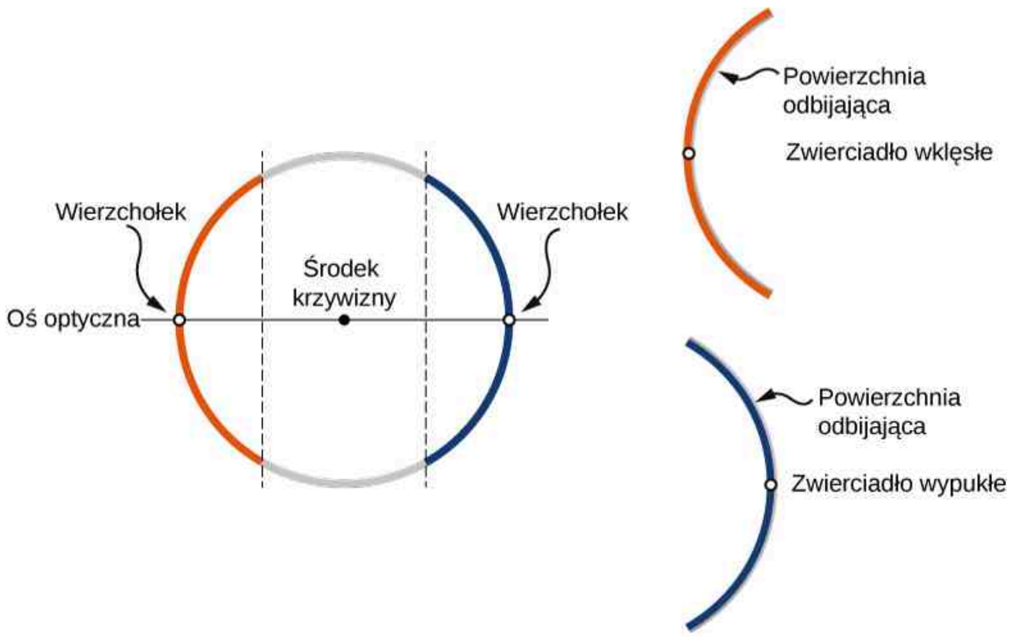
Obraz powstający w zwierciadle płaskim ma takie same rozmiary jak przedmiot, jest równoległy i znajduje się w takiej samej odległości za zwierciadłem co przedmiot przed zwierciadłem. **Zwierciadło zakrzywione** (ang. **curved mirror**) może tworzyć obrazy mniejsze lub większe niż przedmiot i mogą one być umiejscowione przed lub za zwierciadłem. Ogólnie można powiedzieć, że każda zakrzywiona powierzchnia tworzy obraz, jednakże niektóre obrazy mogą być zniekształcone, a nawet nierozpoznawalne (jak w zwierciadłach w wesołych miasteczkach).

Ponieważ zwierciadła zakrzywione mogą tworzyć wiele różnych obrazów, są one wykorzystywane w wielu urządzeniach optycznych o licznych zastosowaniach. W tym podrozdziale skoncentrujemy się na zwierciadłach sferycznych, ponieważ są one bardziej popularne ze względu na łatwość wykonania niż na przykład zwierciadła paraboliczne.

Zwierciadła zakrzywione

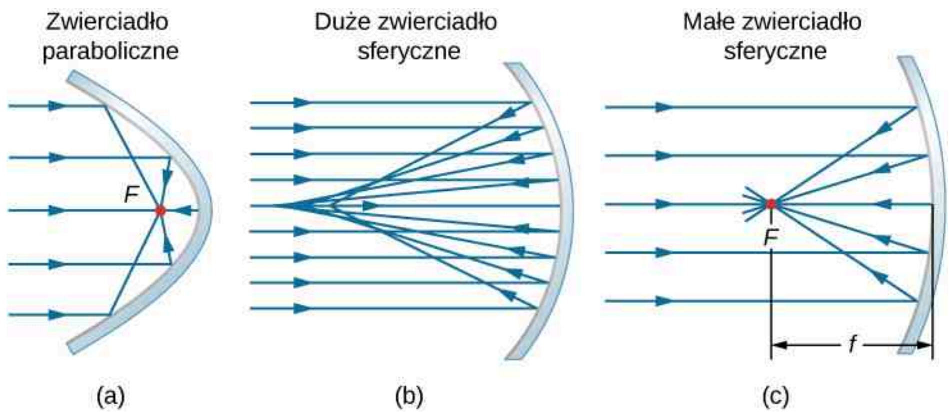
Możemy zdefiniować dwa podstawowe typy zwierciadeł sferycznych. Jeżeli powierzchnia odbijająca jest zewnętrzną powierzchnią kuli – zwierciadło nazywa się **zwierciadłem sferycznym wypukłym** (ang. **convex mirror**). Jeżeli powierzchnia odbijająca jest wewnętrzną powierzchnią sfery – zwierciadło nazywa się **zwierciadłem sferycznym wklęsłym** (ang. **concave mirror**).

Symetria jest jedną z głównych cech wielu układów optycznych, dotyczy także zwierciadeł i soczewek. Oś symetrii tych elementów optycznych jest często nazywana **osią główną** (ang. **principal axis**) lub **osią optyczną** (ang. **optical axis**). Dla zwierciadła sferycznego oś optyczna przechodzi przez środek krzywizny zwierciadła i jego **wierzchołek** (ang. **vertex**), tak jak pokazano na Rysunku 2.5.



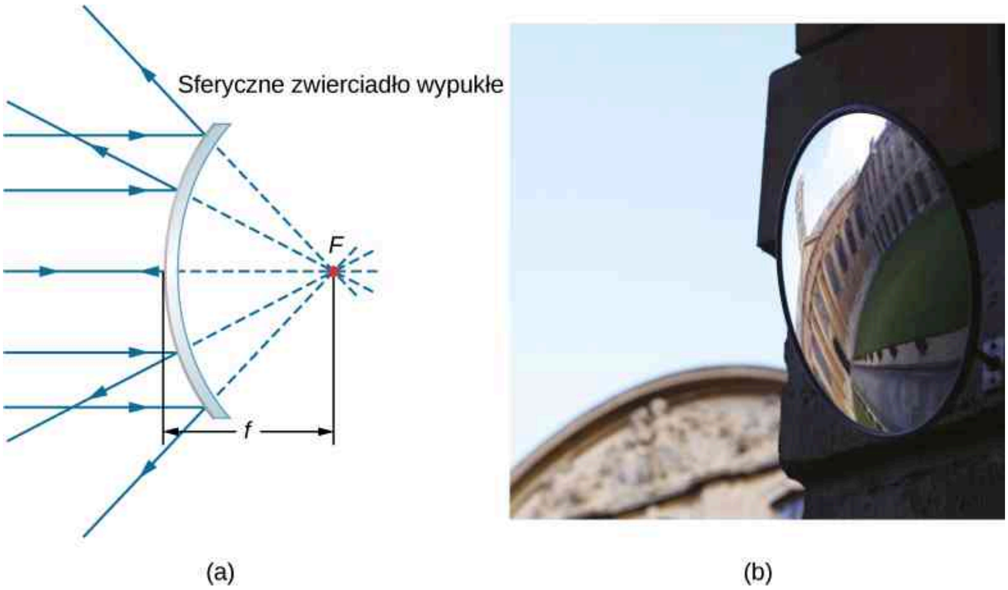
Rysunek 2.5 Zwierciadło sferyczne jest wykonane przez wycięcie fragmentu kuli i pokrycie srebrem wewnętrznej lub zewnętrznej powierzchni. Zwierciadło wklęsłe jest posrebrzone na wewnętrznej powierzchni, a wypukłe na zewnętrznej.

Przeanalizujmy bieg promieni równoległych do osi optycznej zwierciadła parabolicznego przedstawionych w części (a) Rysunku 2.6. Zgodnie z prawem odbicia promienie te zostają odbite w taki sposób, że spotykają się w jednym punkcie, nazywanym **ogniskiem** (ang. **focal point**). W części (b) Rysunku 2.6 widzimy zwierciadło sferyczne oraz promienie równoległe do osi optycznej, ale znacznie od niej oddalone. Promienie odbite w tym zwierciadle nie spotykają się w jednym punkcie, a więc nie ma ono dobrze zdefiniowanego ogniska. Zjawisko to nazywamy **aberracją sferyczną** (ang. **spherical aberration**), a jej skutkiem jest nieostry obraz przedmiotu rozciągłego. W części (c) Rysunku 2.6 widzimy zwierciadło sferyczne, którego rozmiar jest mały w porównaniu z jego promieniem krzywizny. Zwierciadło to jest zbliżone kształtem do zwierciadła parabolicznego, a więc promienie, które padają równolegle do osi optycznej, są odbite i skupiają się dokładnie w jednym punkcie – ognisku zwierciadła. Odległość wzdłuż osi optycznej od zwierciadła do jego ogniska nazywamy **ogniskową** (ang. **focal length**) zwierciadła.



Rysunek 2.6 (a) Równoległe promienie odbite od zwierciadła parabolicznego przecinają się w jednym punkcie F nazywanym ogniskiem. (b) Równoległe promienie biegnące blisko osi optycznej i te w znacznej odległości od niej po odbiciu od zwierciadła sferycznego nie przecinają się w jednym punkcie. (c) Dla promieni równoległych biegnących blisko osi optycznej krzywizna zwierciadła jest dobrym przybliżeniem paraboli, więc promienie te przecinają się w jednym punkcie.

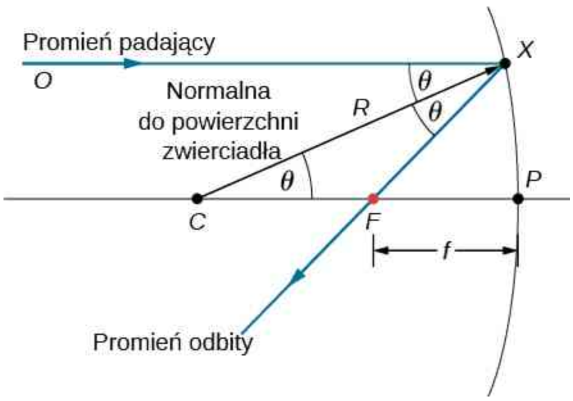
Zwierciadło sferyczne wypukłe również ma ognisko, jak widać na Rysunku 2.7. Promienie padające równolegle do osi optycznej są odbijane od zwierciadła i wydają się wychodzić z punktu F znajdującego się na ogniskowej f za zwierciadłem. Ognisko to jest pozorne, ponieważ w rzeczywistości żadne promienie nie przechodzą przez to ognisko, a jedynie wydają się z niego wychodzić.



Rysunek 2.7 (a) Promienie odbite przez zwierciadło sferyczne wypukłe. Promienie światła biegnące równolegle do osi optycznej zostają odbite od zwierciadła sferycznego wypukłego i wydają się wychodzić z ogniska leżącego w odległości równej ogniskowej f po przeciwnej stronie zwierciadła. To ognisko jest pozorne, ponieważ żadne rzeczywiste promienie z tego ogniska nie wychodzą. (b) Zdjęcie przedstawia obraz pozorny utworzony przez zwierciadło wypukłe. Źródło (b): modyfikacja pracy Jenny Downing

Jaki jest związek pomiędzy ogniskową zwierciadła a jego promieniem krzywizny? Na Rysunku 2.8 przedstawiono pojedynczy promień, który został odbity przez zwierciadło sferyczne wklęsłe. Padający promień jest równoległy do osi optycznej. Punkt, w którym odbity promień przecina oś optyczną, jest ogniskiem. Zauważ, że wszystkie promienie, które padają równolegle do osi optycznej, po odbiciu skupiają się w ognisku (dla uproszczenia na rysunku został pokazany tylko jeden taki promień). Chcemy znaleźć zależność między ogniskową FP (oznaczoną jako f) a promieniem krzywizny zwierciadła R, którego długość jest równa $R = CF + FP$. Z prawa odbicia wiemy, że kąty OXC i CXF są takie same, a ponieważ promień padający jest równoległy do osi optycznej, kąty OXC i XCP również są takie same. Z tego wynika, że trójkąt CXF jest trójkątem równoramiennym, gdzie $CF = FX$. Jeżeli kąt θ jest mały tzn. mamy do czynienia z promieniami biegnącymi blisko osi optycznej, wówczas korzystamy z **przybliżenia małych kątów** (ang. **small-angle approximation**), czyli przyjmujemy, że $\sin\theta \approx \theta$, a więc $FX \approx FP$ lub $CF \approx FP$. Podstawiając te zależności do równania na promień R, otrzymujemy

$$R = CF + FP = FP + FP = 2FP = 2f.$$



Rysunek 2.8 Odbicie w zwierciadle wklęsłym. Jeśli skorzystamy z przybliżenia małych kątów, to każdy promień padający równolegle do osi optycznej FP po odbiciu przechodzi przez ognisko zwierciadła F.

Innymi słowy, w przybliżeniu małych kątów ogniskowa f zwierciadła sferycznego wklęsłego jest równa połowie jego promienia krzywizny, R

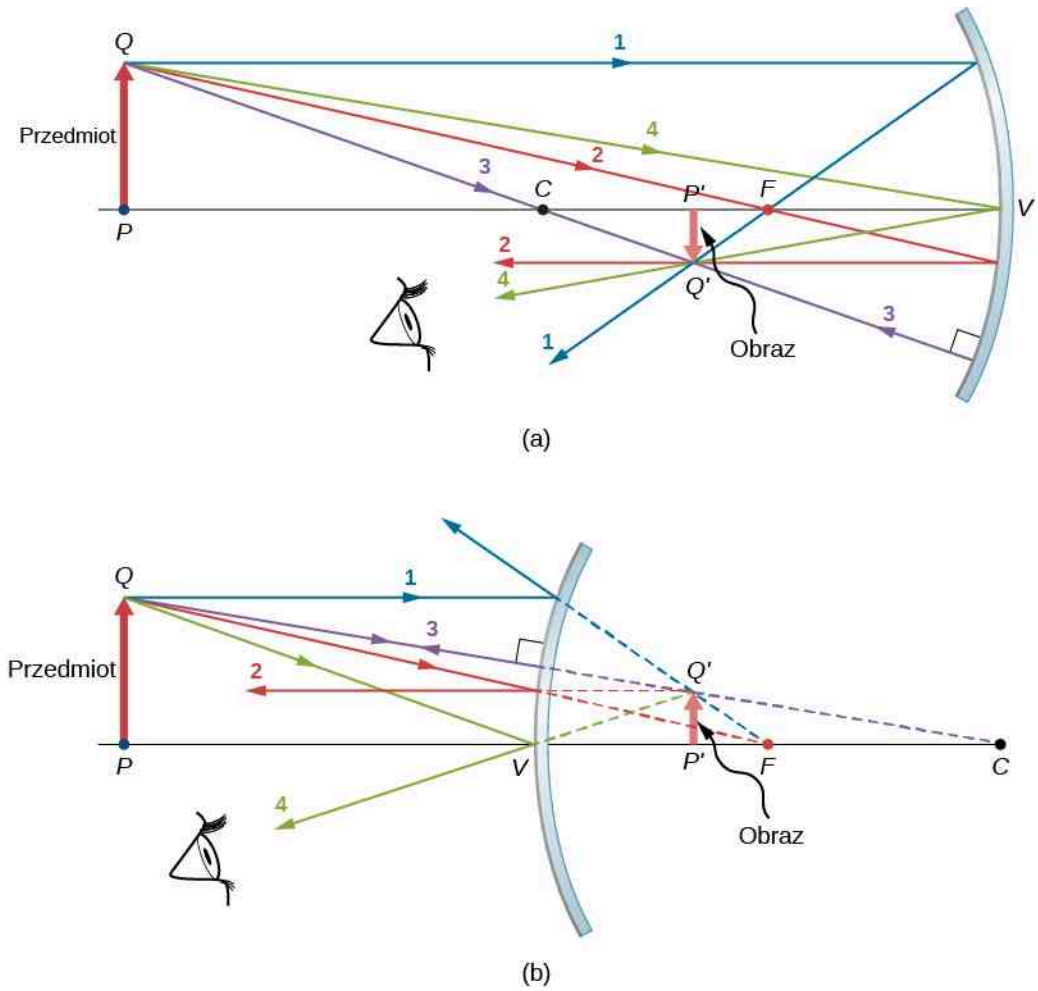
$$f = \frac{R}{2}. \tag{2.2}$$

W tym rozdziale będziemy zakładać, że przybliżenie małych kątów, nazywane także **przybliżeniem przyosiowym** (ang. **paraxial approximation**), jest zawsze spełnione. W tym przybliżeniu wszystkie promienie są promieniami przyosiowymi, czyli są one odchylone pod niewielkim kątem od osi optycznej i ich odległość od osi optycznej jest znacznie mniejsza niż promień krzywizny. W takim przypadku ich kąty odbicia θ są małymi kątami, więc możemy przyjąć, że $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$.

Zastosowanie konstrukcji biegu promieni do określenia położenia obrazu

Aby znaleźć położenie obrazu utworzonego przez zwierciadło sferyczne, najpierw musimy poznać zasady **konstrukcji biegu promieni** (ang. **ray tracing**), tj. techniki rysowania biegu promieni światła po odbiciu od zwierciadła, przy zastosowaniu prawa odbicia światła. Stosując prawa geometrii, jesteśmy w stanie znaleźć ognisko, położenie obrazu oraz inne informacje o tym, jak zwierciadło operuje światłem. Do tej pory stosowaliśmy konstrukcję biegu promieni wykorzystującą prawo odbicia, aby określić położenie ogniska zwierciadeł sferycznych, czy też odległość obrazu dla zwierciadeł płaskich. Aby znaleźć położenie obrazu przedmiotu, musimy znaleźć położenia przynajmniej dwóch punktów tego obrazu. Znalezienie każdego z nich wymaga narysowania przynajmniej dwóch promieni wychodzących z przedmiotu i skonstruowania przebiegu promieni odbitych. Punkt, w którym odbite promienie przecinają się – w przestrzeni rzeczywistej lub pozornej – jest miejscem, gdzie znajduje się punkt obrazu odpowiadający danemu punktowi przedmiotu. Aby uprościć technikę konstrukcji biegu promieni, skoncentrujmy się na biegu czterech głównych promieni, których odbicia są proste do skonstruowania.

Rysunek 2.9 przedstawia dwa zwierciadła: wklęsłe i wypukłe – przed każdym znajduje się przedmiot w postaci strzałki. Strzałki to przedmioty, których obrazy chcemy znaleźć, stosując opisaną powyżej technikę konstrukcji biegu promieni. Żeby to zrobić, rysujemy bieg czterech głównych promieni z punktu Q leżącego na wierzchołku przedmiotu. Promień 1 wychodzący z punktu Q rozchodzi się równolegle do osi optycznej. W rezultacie, jak wspomniano wcześniej, promień odbity przechodzi przez ognisko zwierciadła. Z tego wynika, że dla zwierciadła wklęsłego promień odbity dla promienia 1 przechodzi przez ognisko F, jak pokazano w części (b) rysunku. Dla zwierciadła wypukłego przedłużenie promienia odbitego dla promienia 1 przechodzi przez ognisko pozorne. Promień 2 początkowo rozchodzi się wzdłuż linii przechodzącej przez ognisko, a następnie odbija się w kierunku równoległym do osi optycznej. Promień 3 przechodzi przez środek krzywizny zwierciadła, pada na zwierciadło pod kątem prostym i odbija się wzdłuż tej samej prostej. Wreszcie, promień 4 pada na wierzchołek zwierciadła (punkt przecięcia osi zwierciadła z jego powierzchnią), a następnie odbija się symetrycznie względem osi optycznej.



Rysunek 2.9 Cztery główne promienie pokazane dla (a) zwierciadła wklęsłego i (b) zwierciadła wypukłego. Obraz zostaje utworzony tam, gdzie promienie (dla obrazów rzeczywistych) lub ich przedłużenia (dla obrazów pozornych) się przecinają.

Cztery główne promienie przecinają się w punkcie Q', czyli w miejscu, gdzie znajduje się obraz punktu Q. Aby znaleźć punkt Q', wystarczy narysować dowolne dwa z tych promieni. Możemy zatem wybrać dwa dowolne charakterystyczne promienie, aby znaleźć położenie obrazu. Rysowanie więcej niż dwóch promieni może jednak przydać się do sprawdzenia, czy nie został popełniony błąd.

Żeby ostatecznie znaleźć położenie obrazu rozciągłego przedmiotu oraz stwierdzić, jaka jest jego orientacja, należy znaleźć położenie drugiego punktu przedmiotu. Aby tego dokonać, śledzimy bieg promieni wychodzących od podstawy przedmiotu. W tym przypadku cztery główne promienie biegnące wzdłuż osi optycznej odbijają się od zwierciadła i następnie wracają wzdłuż osi optycznej. Trudność polega tu na tym, że promienie te są współliniowe i nie możemy zdefiniować jednego punktu, w którym się przecinają. Wiemy jedynie, że podstawa obrazu jest na osi optycznej. Ponieważ zwierciadło jest symetryczne, to orientacja pionowa przedmiotu się nie zmienia. Z tego wynika, że skoro przedmiot jest prostopadły do osi optycznej, to obraz też musi być prostopadły. Ponadto obraz podstawy przedmiotu znajduje się na osi optycznej powyżej obrazu wierzchołka przedmiotu, jak widać na Rysunku 2.9.

W przypadku zwierciadła wklęsłego obraz przedmiotu rozciągłego powstaje pomiędzy ogniskiem i środkiem krzywizny zwierciadła. Jest on odwrócony i pomniejszony w stosunku do przedmiotu i jest obrazem rzeczywistym. Gdy przesuniemy przedmiot bliżej lub dalej względem zwierciadła, obraz się zmieni. Przykładowo, przedmiot znajdujący się pomiędzy zwierciadłem wklęsłym a jego ogniskiem będzie tworzył obraz pozorny, prosty i powiększony względem przedmiotu. W przypadku zwierciadła wypukłego obraz przedmiotu rozciągłego powstaje pomiędzy ogniskiem a zwierciadłem i jest prosty, pozorny i pomniejszony w stosunku do przedmiotu.

Podsumowanie zasad konstrukcji biegu promieni

Konstrukcja biegu promieni jest bardzo przydatna w przypadku zwierciadeł. Oto krótkie podsumowanie jej zasad:

- Promień biegnący równolegle do osi optycznej zwierciadła sferycznego zostaje odbity wzdłuż linii przecinającej ognisko zwierciadła (promień 1 na Rysunku 2.9).

- Promień biegnący wzdłuż prostej, która przechodzi przez ognisko zwierciadła sferycznego, zostaje odbity równolegle do osi optycznej (promień 2 na Rysunku 2.9).
- Promień biegnący wzdłuż prostej, która przechodzi przez środek krzywizny zwierciadła sferycznego, zostaje odbity wzdłuż tej samej prostej (promień 3 na Rysunku 2.9).
- Promień, który pada na wierzchołek zwierciadła sferycznego, zostaje odbity symetrycznie względem osi optycznej zwierciadła (promień 4 na Rysunku 2.9).

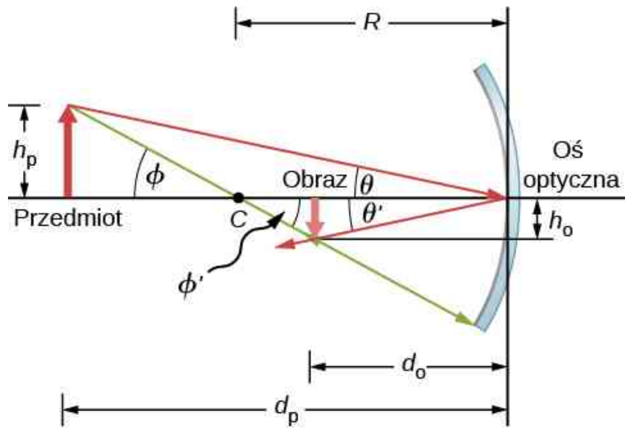
Opisaną metodę konstrukcji biegu promieni można stosować do graficznego przedstawiania obrazów powstających w zwierciadłach, a także do obliczania parametrów optycznych zwierciadeł. Jeżeli założymy, że zwierciadło jest małe w porównaniu z promieniem jego krzywizny, to możemy wyprowadzić równanie zwierciadła, wykorzystując podstawowe prawa algebry i geometrii. Połączenie konstrukcji biegu promieni z równaniem zwierciadła jest dobrą metodą analizy układów zwierciadeł.

Tworzenie obrazu w zwierciadłach – równanie zwierciadła

Dla zwierciadła płaskiego pokazaliśmy, że utworzony obraz ma taką samą wysokość i orientację jak przedmiot i znajduje się w takiej samej odległości za zwierciadłem co przedmiot przed zwierciadłem. Mimo że w przypadku zwierciadeł zakrzywionych sytuacja jest bardziej skomplikowana, zastosowanie praw geometrii prowadzi do prostych wzorów opisujących relację pomiędzy odległościami przedmiotu i obrazu a ogniskowymi zwierciadeł wklęsłych i wypukłych.

Popatrzmy na przypadek pokazany na Rysunku 2.10. Środek krzywizny zwierciadła, oznaczony literą C, znajduje się w odległości R od wierzchołka zwierciadła, jak zaznaczono na rysunku. Odległości przedmiotu i obrazu są oznaczone jako d_p i d_o, a ich wysokości odpowiednio jako h_p i h_o. Ponieważ kąty ϕ i ϕ' są odpowiadającymi sobie kątami wewnętrznymi, wiemy, że są równe. $\operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\theta'$ ze względu na to, że $h_\text{p} > 0$ (leży nad osią optyczną) zaś $h_\text{o} < 0$ (leży pod osią optyczną). Analogicznie kąty θ i θ' są równe, ale ich znaki różnią się, jeżeli mierzymy kąty względem osi optycznej, czyli $\theta = -\theta'$. Wyznaczając następnie tangensy kątów θ i θ' oraz korzystając z własności $\operatorname{tg}(-\theta) = -\operatorname{tg}\theta$, otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\theta &= \frac{h_\text{p}}{d_\text{p}}\\ \operatorname{tg}\theta' &= -\operatorname{tg}\theta = \frac{h_\text{o}}{d_\text{o}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{h_\text{p}}{d_\text{p}} = -\frac{h_\text{o}}{d_\text{o}} \Rightarrow -\frac{h_\text{p}}{h_\text{o}} = \frac{d_\text{p}}{d_\text{o}}. \tag{2.3}$$



Rysunek 2.10 Obraz utworzony przez zwierciadło wklęsłe.

Podobnie, wyznaczając tangensy kątów ϕ i ϕ', otrzymujemy

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\phi &= \frac{h_\text{p}}{d_\text{p}-R}\\ \operatorname{tg}\phi' &= -\operatorname{tg}\phi = \frac{h_\text{o}}{R-d_\text{o}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{h_\text{p}}{d_\text{p}-R} = -\frac{h_\text{o}}{R-d_\text{o}} \Rightarrow -\frac{h_\text{p}}{h_\text{o}} = \frac{d_\text{p}-R}{R-d_\text{o}}.$$

Połączenie tych dwóch równań daje nam zależność

$$\frac{d_\text{p}}{d_\text{o}} = \frac{d_\text{p}-R}{R-d_\text{o}}.$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{d_\mathrm{p}} + \frac{1}{d_\mathrm{o}} = \frac{2}{R}. \tag{2.4}$$

Dla uzyskania tego wyniku nie jest konieczne żadne przybliżenie, więc możemy stwierdzić, że jest on dokładny. Jednakże, jak wspomnieliśmy wcześniej, w przybliżeniu małych kątów (tj. dla promieni biegnących blisko osi optycznej tzw. przyosiowych) ogniskowa zwierciadła sferycznego jest połową jego promienia krzywizny, czyli $f = R / 2$. Podstawiając tę zależność do Równania 2.3, otrzymujemy **równanie zwierciadła** (ang. **mirror equation**)

$$\frac{1}{d_\mathrm{p}} + \frac{1}{d_\mathrm{o}} = \frac{1}{f}. \tag{2.5}$$

Równanie zwierciadła opisuje zależność pomiędzy odległościami obrazu i przedmiotu a długością ogniskowej i jest poprawne jedynie w przybliżeniu małych kątów. Mimo że zostało ono wyprowadzone dla zwierciadła wklęsłego, to stosuje się je również dla zwierciadeł wypukłych (udowodnienie tego równania stanowi cel zadania). Możemy rozszerzyć stosowanie równania zwierciadła także dla przypadku zwierciadła płaskiego, przyjmując, że zwierciadło płaskie ma nieskończony promień krzywizny. Oznacza to, że ognisko zwierciadła płaskiego jest w nieskończoności, a więc równanie zwierciadła upraszcza się do postaci

$$d_\mathrm{p} = -d_\mathrm{o}, \tag{2.6}$$

co odpowiada Równaniu 2.1 wyprowadzonemu wcześniej dla zwierciadeł płaskich.

Pamiętajmy, że przy wyprowadzaniu równania zwierciadła trzeba zwracać szczególną uwagę na znaki. Dla zwierciadła płaskiego odległość obrazu ma przeciwny znak niż odległość przedmiotu. Zatem obraz rzeczywisty utworzony przez zwierciadło wklęsłe na Rysunku 2.10 jest po przeciwnej stronie osi optycznej względem przedmiotu. W tym przypadku wysokość obrazu powinna mieć przeciwny znak niż wysokość przedmiotu. Znaki poszczególnych zmiennych w równaniu zwierciadła określamy zgodnie z konwencją opisaną poniżej.

Konwencja znaków dla zwierciadeł sferycznych

Konsekwentne przestrzeganie konwencji znaków jest bardzo ważne w optyce geometrycznej. Przypisuje ona dodatnie lub ujemne wartości wielkościom charakteryzującym układ optyczny. Zastosowanie konwencji znaków pozwala opisać układ bez konieczności rysowania konstrukcji biegu promieni. W tym podręczniku przyjęliśmy następującą konwencję znaków:

a. Ogniskowa f jest dodatnia dla zwierciadeł wklęsłych i ujemna dla zwierciadeł wypukłych.

b. Odległość obrazu d_o jest dodatnia dla obrazów rzeczywistych i ujemna dla obrazów pozornych.

Zauważmy, że w konsekwencji zasady nr 1 promień krzywizny zwierciadła sferycznego może być dodatni lub ujemny. Co to oznacza, że promień krzywizny jest ujemny? Oznacza to po prostu, że promień krzywizny zwierciadła wypukłego jest zdefiniowany jako ujemny.

Powiększenie obrazu

Zastosujmy konwencję znaków przy interpretacji równania zwierciadła. Wyprowadzając to równanie, dowiedzieliśmy się, że wysokości przedmiotu i obrazu pozostają w zależności

$$-\frac{h_\mathrm{p}}{h_\mathrm{o}} = \frac{d_\mathrm{p}}{d_\mathrm{o}}. \tag{2.7}$$

Spójrzmy na Równanie 2.3. Zarówno przedmiot, jak i obraz utworzony przez zwierciadło na Rysunku 2.10 są rzeczywiste, a więc ich odległości od zwierciadła są dodatnie. Najwyższy punkt przedmiotu jest ponad osią optyczną, a zatem jego wysokość jest dodatnia. Natomiast obraz znajduje się poniżej osi optycznej, czyli jego wysokość jest ujemna. W rezultacie przyjęta konwencja znaków jest zgodna z równaniem zwierciadła.

W rzeczywistości Równanie 2.7 opisuje **powiększenie liniowe** (ang. **linear magnification**), często nazywane po prostu powiększeniem (ang. **magnification**) obrazu w odniesieniu do odległości przedmiotu i obrazu. Bezwymiarowe powiększenie p definiujemy zatem w następujący sposób

$$p = \frac{h_o}{h_p}. \tag{2.8}$$

Jeżeli p jest dodatnie, to obraz jest prosty, a jeżeli p jest ujemne, to obraz jest odwrócony. Jeżeli $|p| > 1$, to obraz jest większy niż przedmiot, a jeżeli $|p| < 1$, to obraz jest mniejszy niż przedmiot. Na podstawie definicji powiększenia otrzymujemy następującą zależność pomiędzy pionowymi wielkościami obrazu i przedmiotu oraz ich odległościami od wierzchołka zwierciadła

$$p = \frac{h_o}{h_p} = -\frac{d_o}{d_p}. \tag{2.9}$$

Jest to bardzo przydatne równanie, ponieważ pozwala obliczyć powiększenie obrazu względem przedmiotu oraz odległość obrazu lub przedmiotu bezpośrednio z równania zwierciadła.

Przykład 2.1

Elektrownia słoneczna

Jedną z metod uzyskiwania energii elektrycznej ze światła słonecznego jest stosowanie tzw. kolektorów koncentrujących, w których światło słoneczne skupiane jest przez układ zwierciadeł na zaczernionej rurze wypełnionej cieczą. Podgrzana energią słoneczną ciecz jest następnie pompowana do wymiennika ciepła, gdzie energia cieplna zostaje przekazana do kolejnego układu służącego do generowania pary. Ostatecznie prąd elektryczny generowany jest z wykorzystaniem konwencjonalnego cyklu parowego. Na Rysunku 2.11 przedstawiono zdjęcie takiego układu znajdującego się w południowej Kalifornii. Zastosowane w tym układzie zwierciadło jest walcem parabolicznym z ogniskiem na powierzchni rury, jednakże możemy założyć, że powierzchnia zwierciadła stanowi jedną czwartą powierzchni bocznej walca o promieniu równym promieniowi zwierciadła.



Rysunek 2.11 Paraboliczne zwierciadła wykorzystywane do generowania energii elektrycznej w południowej Kalifornii. Źródło: „kjkolb”/Wikimedia Commons

a. Jaka powinna być wartość promienia zwierciadła, aby promienie słoneczne skupiły się w odległości $40\ \text{cm}$ od zwierciadła?

b. Jaka ilość (moc) światła słonecznego jest skupiona na 1m rury, jeśli nasłonecznienie wynosi $900\ \text{W} / \text{m}^2$?

c. Jeżeli rura z cieczą ma średnicę wewnętrzną $2\ \text{cm}$, to o ile wzrośnie temperatura 1m bieżącego cieczy w czasie $1\ \text{min}$? Przyjmij, że całe promieniowanie słoneczne padające na zwierciadło jest pochłaniane przez rurę oraz że cieczą jest olej mineralny.

Strategia rozwiązania

Najpierw określ, z jakimi prawami fizyki mamy do czynienia. Część (a) odnosi się do optyki zwierciadeł sferycznych. Część (b) wymaga znajomości matematyki i geometrii. Część (c) wymaga wykorzystania wiadomości dotyczących ciepła i gęstości.

Rozwiązanie

a. Przedmiotem jest Słońce, a więc możemy przyjąć, że odległość przedmiotu jest równa nieskończoności: $d_\mathrm{p} \longrightarrow \infty$. Odległość obrazu wynosi $d_\mathrm{o} = 40\ \mathrm{cm}$. Aby obliczyć ogniskową, skorzystamy z równania zwierciadła

$$\frac{1}{d_\mathrm{p}} + \frac{1}{d_\mathrm{o}} = \frac{1}{f},$$

$$f = \left(\frac{1}{d_\mathrm{p}} + \frac{1}{d_\mathrm{o}}\right)^{-1} = \left(\left[\frac{1}{\infty}\right] + \frac{1}{40\,\mathrm{cm}}\right)^{-1} = 40\,\mathrm{cm}\,.$$

$R = 2f = 80\ \mathrm{cm}$.

b. Nasłonecznienie wynosi $900\,\mathrm{W} \big/ \mathrm{m}^2$. Musimy obliczyć powierzchnię A przekroju zwierciadła wklęsłego, ponieważ dostarczana moc wynosi $900\,\mathrm{W} \big/ \mathrm{m}^2 \cdot A$. Zwierciadło w tym przypadku stanowi jedną czwartą powierzchni bocznej walca, więc odcinek zwierciadła o długości L ma powierzchnię $A = 1 / 4 \cdot 2\pi RL$. Podstawiając za $L = 1\mathrm{m}$, otrzymujemy, że powierzchnia wynosi

$$A = \frac{\pi}{2}RL = \frac{3{,}14}{2} \cdot 0{,}8\,\mathrm{m} \cdot 1\,\mathrm{m} = 1{,}26\,\mathrm{m}^2.$$

Nasłonecznienie na jeden metr długości rury wynosi więc

$$900\,\mathrm{W} \big/ \mathrm{m}^2 \cdot 1{,}26\,\mathrm{m}^2 = 1130\,\mathrm{W}.$$

c. Wzrost temperatury obliczymy ze wzoru $Q = mc\Delta T$. Masa m oleju mineralnego znajdującego się w jednym metrze rury wynosi

$$m = \rho V = \rho\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot L = 800\,\mathrm{kg} \big/ \mathrm{m}^3 \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}01\,\mathrm{m})^2 \cdot 1\,\mathrm{m} = 0{,}251\,\mathrm{kg}\,.$$

W związku z tym wzrost temperatury na minutę wynosi

$$\Delta T = \frac{Q}{mc} = \frac{1130\,\mathrm{W} \cdot 60\,\mathrm{s}}{0{,}251\,\mathrm{kg} \cdot 1670\,\mathrm{J} \big/ \left(\mathrm{kg}\,^\circ\mathrm{C}\right)} = 162\,^\circ\mathrm{C}.$$

Znaczenie

W słoneczny dzień szereg takich rur na kalifornijskiej pustyni może zapewnić moc $250\,\mathrm{MW}$. Ciecz w rurach osiąga temperaturę nawet $400\,^\circ\mathrm{C}$. W powyższych obliczeniach rozważaliśmy tylko jeden metr rury i pomijaliśmy straty ciepła.

Przykład 2.2

Obraz w zwierciadle wypukłym

Keratometr jest urządzeniem wykorzystywanym do mierzenia krzywizny przedniej powierzchni rogówki oka, co jest szczególnie przydatne przy dobieraniu rozmiaru soczewek kontaktowych. Światło zostaje odbite od rogówki, która zachowuje się jak zwierciadło wypukłe, a keratometr mierzy powiększenie obrazu. Im mniejsze powiększenie, tym mniejszy promień krzywizny rogówki. Jaki jest promień krzywizny rogówki, jeżeli źródło światła znajduje się $12\ \mathrm{cm}$ od rogówki, a powiększenie obrazu wynosi $0{,}032$?

Strategia rozwiązania

Jeżeli znajdziemy ogniskową zwierciadła wypukłego tworzonego przez rogówkę, wtedy możemy określić promień jego krzywizny (równy podwojonej wartości ogniskowej). Odległość przedmiotu wynosi $d_{\mathrm{p}} = 12\ \mathrm{cm}$, a powiększenie wynosi $p = 0{,}032$. Najpierw obliczymy odległość obrazu d_{o}, a następnie rozwiążemy równanie na ogniskową f.

Rozwiązanie

Z równania na powiększenie, $p = -d_{\mathrm{o}} / d_{\mathrm{p}}$, wyznaczamy d_{o}, a następnie po podstawieniu podanych wartości otrzymujemy

$$d_{\mathrm{o}} = -pd_{\mathrm{p}} = -0{,}032 \cdot 12\,\mathrm{cm} = -0{,}384\ \mathrm{cm}\,.$$

Otrzymana wartość zostanie wykorzystana do obliczenia ogniskowej f z równania zwierciadła. Po przekształceniu równania zwierciadła i podstawieniu wartości dla odległości przedmiotu i obrazu otrzymujemy

$$\frac{1}{d_{\mathrm{p}}} + \frac{1}{d_{\mathrm{o}}} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \left(\frac{1}{d_{\mathrm{p}}} + \frac{1}{d_{\mathrm{o}}}\right)^{-1},$$

$$f = \left(\frac{1}{12\,\mathrm{cm}} + \frac{1}{-0{,}384\,\mathrm{cm}}\right)^{-1} = -0{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Promień krzywizny jest równy podwojonej wartości ogniskowej, a więc

$$R = 2f = -0{,}8\ \mathrm{cm}\,.$$

Znaczenie

Ogniskowa jest ujemna, a więc ognisko jest pozorne, jak należało oczekiwać dla zwierciadła wklęsłego i rzeczywistego przedmiotu. Wartość promienia krzywizny, który obliczyliśmy, jest typowa dla rogówki. Odległość od rogówki do siatkówki oka u dorosłego człowieka wynosi około $2\ \mathrm{cm}$. W rzeczywistości rogówki nie są sferyczne, co komplikuje dobieranie soczewek kontaktowych. Zauważmy, że odległość obrazu w tym zagadnieniu jest ujemna, zgodnie z faktem, że przedmiot znajduje się za zwierciadłem. Z tego wynika, że obraz jest pozorny, ponieważ w rzeczywistości promienie nie przechodzą przez ten obraz. W zadaniach pokażemy, że dla stałej odległości obrazu mniejszy promień krzywizny oznacza mniejsze powiększenie.

Sposób rozwiązywania zadań: zwierciadła sferyczne

1. Najpierw sprawdź, czy zwierciadło sferyczne tworzy obraz.
2. Ustal, czy konieczne jest wykonanie rysunku konstrukcji biegu promieni lub zastosowanie równania zwierciadła, czy może jedno i drugie. Rysunek jest bardzo przydatny, nawet gdy konstrukcja biegu promieni nie jest konieczna do rozwiązania zadania. Nanieś na rysunku symbole i znane wartości.
3. Określ, co ma być wyznaczone w zadaniu (określ niewiadome).
4. Zrób listę danych, które mogą być wykorzystane przy rozwiązywaniu zadania (określ dane).
5. Jeżeli konieczna jest konstrukcja biegu promieni, wykorzystaj zasady jej tworzenia opisane na początku tego rozdziału.
6. Większość zadań wymaga użycia równania zwierciadła. Wykorzystaj podane powyżej przykłady uwzględniające równanie zwierciadła.

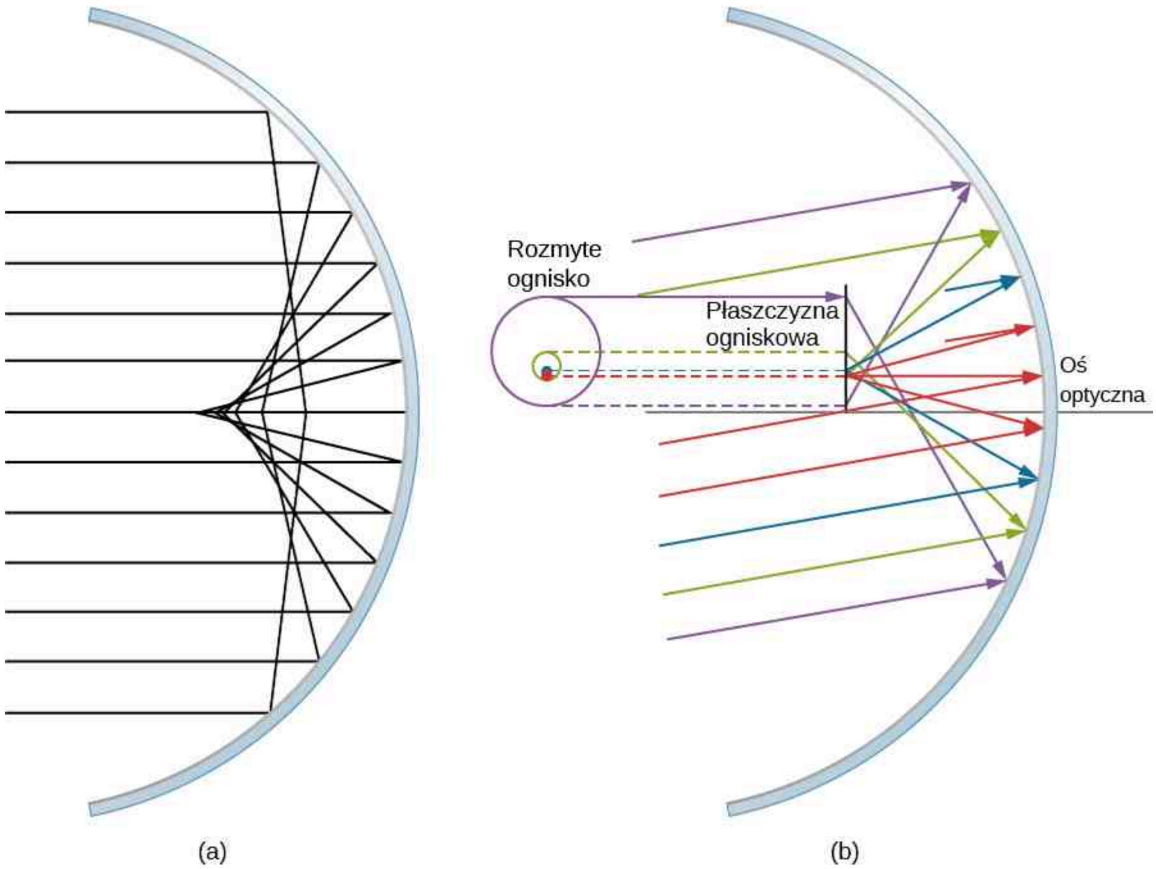
7. Sprawdź, czy odpowiedzi są sensowne. Czy znaki są właściwe? Czy rysunek konstrukcji biegu promieni jest zgodny z obliczeniami?

Uwzględnienie promieni biegnących w dalszej odległości od osi optycznej

Możliwość zastosowania przybliżenia małych kątów jest podstawowym założeniem w powyższych analizach obrazu tworzonego przez zwierciadło sferyczne. Kiedy możliwość ta nie występuje, obraz tworzony przez zwierciadło sferyczne jest zniekształcony. Takie zniekształcenie nazywamy **aberracją** (ang. **aberration**). W tym podrozdziale zostaną omówione dwa szczególne rodzaje aberracji: **aberracja sferyczna** oraz **aberracja komatyczna** (koma).

Aberracja sferyczna

Rozważmy szeroką wiązkę równoległych promieni padającą na zwierciadło sferyczne, jak pokazano na Rysunku 2.12.



Rysunek 2.12 (a) W aberracji sferycznej promienie, które są dalej od osi optycznej, skupiają się w innych punktach niż promienie, które są bliżej osi optycznej. Zauważmy, że aberracja jest tym większa, im dalej od osi optycznej znajduje się promień. (b) W aberracji komatycznej padające równoległe promienie, które nie są równoległe do osi optycznej, skupiają się na różnych wysokościach i w różnych ogniskowych, a więc obraz zawiera „ogon” jak kometa (łac. **coma**). Uwaga: kolor promieni nie ma związku z barwą światła.

Im dalej od osi optycznej padają promienie, tym mniej zwierciadło sferyczne działa jak zwierciadło paraboliczne. A zatem promienie nie skupiają się w jednym punkcie w pobliżu osi optycznej, jak pokazano na Rysunku 2.12. **Aberracja sferyczna** (ang. **spherical aberration**) sprawia, że obraz rozciągłego przedmiotu powstający w zwierciadle sferycznym jest nieostry. Aberracje sferyczne cechują wszystkie zwierciadła i soczewki, które będziemy omawiać w tym rozdziale. Aberracje te można wyeliminować tylko przez zastosowanie zwierciadeł i soczewek niesferycznych bądź układów korekcyjnych.

Aberracja komatyczna

Aberracja komatyczna (koma) (ang. **comatic aberration, coma**) jest podobna do aberracji sferycznej, lecz powstaje wtedy, gdy biegnące promienie nie są równoległe do osi optycznej, jak pokazano w części (b) Rysunku 2.12. Jak mówi-

liśmy, przybliżenie małych kątów można stosować tylko dla zwierciadeł sferycznych, których rozmiary są małe w porównaniu z promieniem ich krzywizny. W takim przypadku zwierciadła sferyczne są dobrym przybliżeniem zwierciadeł parabolicznych. Zwierciadła paraboliczne skupiają wszystkie promienie równoległe do osi optycznej w ognisku. Jednakże promienie równoległe, które nie są równoległe do osi optycznej, są skupiane na różnych wysokościach i dla różnych ogniskowych, jak pokazano w części (b) Rysunku 2.12. Ponieważ zwierciadło sferyczne jest symetryczne względem osi optycznej, to różnobarwne promienie na Rysunku 2.12 tworzą plamki odpowiedniego koloru na płaszczyźnie ogniskowej.

Mimo że w części (b) Rysunku 2.12 widzimy zwierciadło sferyczne, to aberracja komatyczna zachodzi również w zwierciadłach parabolicznych i nie jest ona spowodowana niemożliwością zastosowania przybliżenia małych kątów. Aberracja sferyczna zachodzi wyłącznie dla zwierciadeł sferycznych i jest wynikiem braku możliwości zastosowania przybliżenia małych kątów. O aberracji sferycznej i komatycznej wspomnimy w dalszej części tego rozdziału przy omawianiu teleskopu.

2.3 | Obrazy tworzone przez załamanie promieni światła

Cel dydaktyczny

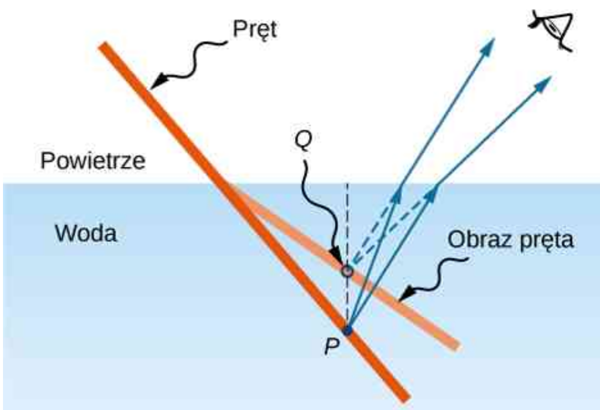
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać powstawanie obrazów tworzonych przez pojedynczą powierzchnię załamującą;
- określać położenie obrazu oraz obliczać jego właściwości, korzystając z konstrukcji biegu promieni;
- określać położenie obrazu oraz obliczać jego właściwości, używając równania pojedynczej powierzchni załamującej.

Kiedy promienie światła przechodzą z jednego ośrodka do drugiego, wówczas na powierzchni granicznej pomiędzy dwoma ośrodkami ulegają one załamaniu (ang. **refraction**). Powierzchnia załamująca może tworzyć obraz w podobny sposób jak powierzchnia odbijająca, a zjawisko załamania odbywa się zgodnie z prawem załamania (prawo Snella).

Załamanie na płaskiej powierzchni – głębokość pozorna

Jeżeli spojrzysz na prosty pręt częściowo zanurzony w wodzie, wyda ci się, że jest on ugięty przy powierzchni wody (Rysunek 2.13). Przyczyną tego ciekawego zjawiska jest to, że obraz pręta pod wodą tworzy się nieco bliżej jej powierzchni, niż faktycznie znajduje się pręt, czyli nie pokrywa się on z kierunkiem części pręta znajdującej się nad wodą. To samo zjawisko tłumaczy, dlaczego ryba pod wodą wydaje się być bliżej powierzchni, niż jest naprawdę.



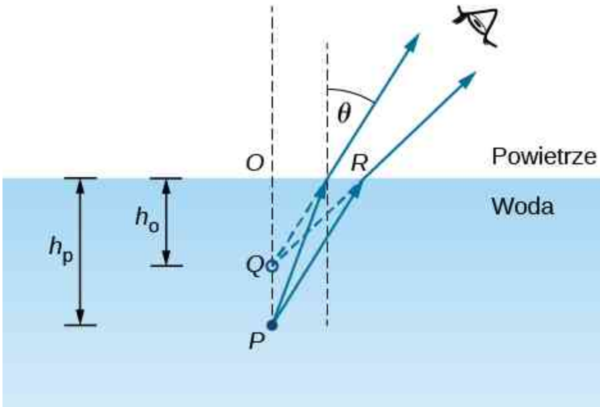
Rysunek 2.13 Pozorne ugięcie pręta na powierzchni granicznej powietrze-woda. Dla obserwatora punkt P na pręcie zdaje się znajdować w położeniu punktu Q – w miejscu, gdzie powstaje obraz punktu P w wyniku załamania światła na powierzchni granicznej powietrze-woda.

Analizując powstawanie obrazu w wyniku załamania światła, zastanówmy się nad następującymi pytaniami:

1. Co się dzieje z promieniami światła, gdy wchodzą do innego ośrodka?

2. Czy załamane promienie pochodzące z pojedynczego punktu spotykają się w jakimś punkcie, czy odchylają się od siebie?

Rozważmy prosty układ składający się z dwóch ośrodków oddzielonych gładką powierzchnią graniczną (Rysunek 2.14). Przedmiot znajduje się w jednym ośrodku, a obserwator w drugim. Przykładowo ryba jest w ośrodku 1 (w wodzie) o współczynniku załamania światła $1{,}33$, a obserwator jest w ośrodku 2 (w powietrzu) o współczynniku załamania światła 1. Gdy obserwator patrzy na rybę znad powierzchni wody, widzi, że znajduje się ona powyżej miejsca, w którym faktycznie jest. Głębokość, na której dla obserwatora znajduje się ryba, równa się wysokości obrazu h_o i jest nazywana **głębokością pozorną** (ang. **apparent depth**). Prawdziwa głębokość, na jakiej znajduje się ryba, jest równa wysokości przedmiotu h_p.



Rysunek 2.14 Głębokość pozorna powstająca w wyniku załamania światła. Rzeczywisty przedmiot znajdujący się w punkcie P tworzy obraz w punkcie Q. Obraz nie znajduje się na tej samej głębokości co przedmiot, a więc obserwator widzi obraz na głębokości pozornej.

Głębokość pozorna h_o zależy od kąta, pod którym widzisz obraz. Gdy patrzysz z góry, kąt załamania θ jest mały i w przybliżeniu możemy zastąpić $\sin\theta$ w prawie Snella przez $\operatorname{tg}\theta$. Stosując to przybliżenie oraz korzystając z podobieństwa trójkątów ΔOPR i ΔOQR, można wyprowadzić następującą zależność

$$h_\text{o} = \frac{n_2}{n_1} \cdot h_\text{p}. \tag{2.10}$$

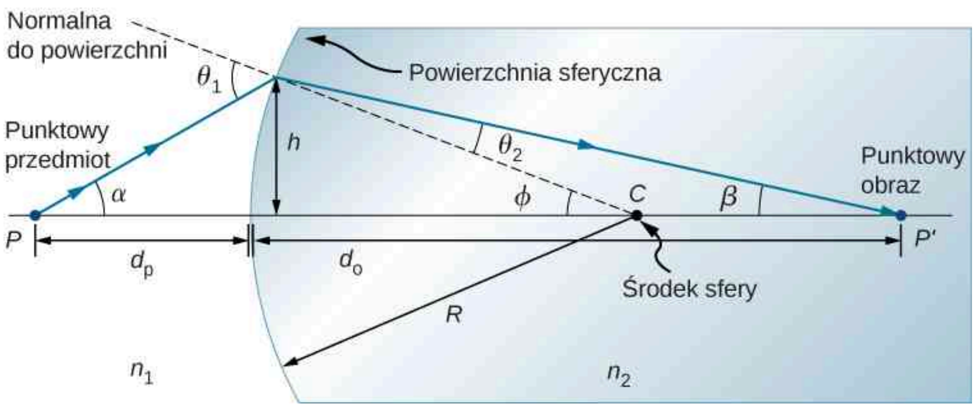
Wyprowadzenie tego wzoru pozostawiono jako zadanie. Z tej zależności wynika, że w omawianym wcześniej przykładzie ryba wydaje się być na $3/4$ głębokości, na jakiej faktycznie się znajduje, gdy patrzymy na nią z góry pod niewielkim kątem.

Załamanie na powierzchni sferycznej

Kształty kuliste mają duże znaczenie w optyce przede wszystkim dlatego, że wykonanie wysokiej jakości sferycznych powierzchni jest bez porównania łatwiejsze niż wykonanie jakiejkolwiek innej zakrzywionej powierzchni. Aby dowiedzieć się, jak zachodzi załamanie na pojedynczej powierzchni sferycznej, przyjmujemy, że ośrodek ze sferyczną powierzchnią z jednej strony jest nieograniczony.

Załamanie na powierzchni wypukłej

Rozważmy punktowe źródło światła P znajdujące się naprzeciw wypukłej powierzchni wykonanej ze szkła (Rysunek 2.15). Niech R będzie promieniem krzywizny, n_1 współczynnikiem załamania światła ośrodka, w którym znajduje się punkt P (przedmiot), a n_2 współczynnikiem załamania światła ośrodka z powierzchnią sferyczną. Chcemy się dowiedzieć, jak załamuje się światło na tej powierzchni.



Rysunek 2.15 Załamanie promienia na powierzchni wypukłej ($n_2 > n_1$).

Ze względu na symetrię zagadnienia ograniczymy się do sprawdzenia promieni tylko w jednym punkcie powierzchni. Rysunek przedstawia promień światła, który wychodzi z punktu P, załamuje się na powierzchni granicznej i przechodzi przez obraz w punkcie P'. Wyprowadzimy wzór opisujący zależność pomiędzy odległością przedmiotu d_{p}, odległością obrazu d_{o} oraz promieniem krzywizny R.

Z prawa Snella dla promienia wychodzącego z punktu P wynika, że (stosując przybliżenie małych kątów)

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2.$$

Ponadto, jak widać na rysunku, kąty θ_1 i θ_2 są odpowiednio równe

$$\theta_1 = \alpha + \phi,\ \theta_2 = \phi - \beta.$$

Podstawienie tych wyrażeń do prawa Snella daje zależność

$$n_1\,(\alpha + \phi) \approx n_2\,(\phi - \beta).$$

Korzystając ponownie z rysunku, określamy także zależności dla tangensów kątów α, β i ϕ

$$\operatorname{tg}\alpha \approx \frac{h}{d_{\mathrm{p}}},\quad \operatorname{tg}\beta \approx \frac{h}{d_{\mathrm{o}}},\quad \operatorname{tg}\phi \approx \frac{h}{R}.$$

Uwzględniając przybliżenie małych kątów, możemy przyjąć, że $\operatorname{tg}\theta \approx \theta$, a więc powyższe wyrażenia możemy zapisać w postaci

$$\alpha \approx \frac{h}{d_{\mathrm{p}}},\ \beta \approx \frac{h}{d_{\mathrm{o}}},\ \phi \approx \frac{h}{R}.$$

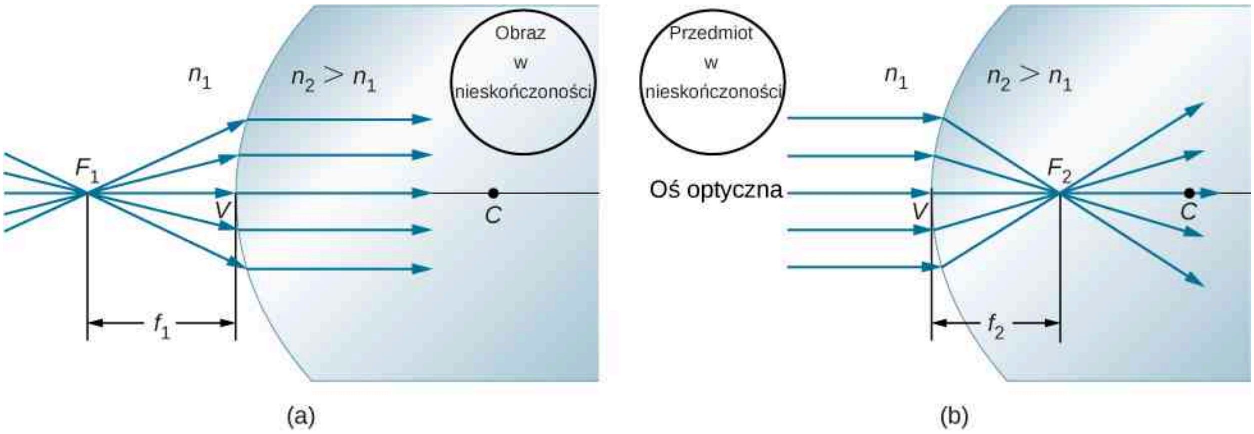
Po podstawieniu tych zależności do prawa Snella otrzymujemy

$$n_1\left(\frac{h}{d_{\mathrm{p}}} + \frac{h}{R}\right) = n_2\left(\frac{h}{R} - \frac{h}{d_{\mathrm{o}}}\right).$$

Równanie powyższe możemy także zapisać w bardziej czytelnej postaci

$$\frac{n_1}{d_{\mathrm{p}}} + \frac{n_2}{d_{\mathrm{o}}} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \qquad (2.11)$$

Jeżeli przedmiot znajduje się w szczególnym punkcie nazywanym **ogniskiem pierwszym** (ang. **first focus**) lub **ogniskiem przedmiotu** (ang. **object focus**) F_1, to obraz powstaje w nieskończoności, jak pokazano w części (a) Rysunku 2.16.



Rysunek 2.16 (a) Ognisko pierwsze (nazwane ogniskiem przedmiotu) dla załamania na powierzchni wypukłej. (b) Ognisko drugie (nazwane ogniskiem obrazu) dla załamania na powierzchni wypukłej.

Możemy określić ogniskową f_1 ogniska pierwszego F_1, przyjmując $d_o \longrightarrow \infty$ w poprzednim równaniu (Równanie 2.11)

$$\frac{n_1}{f_1} + \left[\frac{n_2}{\infty}\right] = \frac{n_2 - n_1}{R}, \tag{2.12}$$

$$f_1 = \frac{n_1 R}{n_2 - n_1}. \tag{2.13}$$

Podobnie możemy zdefiniować **ognisko drugie** (ang. **second focus**) lub **ognisko obrazu** (ang. **image focus**) F_2, gdzie obraz jest utworzony przez przedmiot znajdujący się w dużej odległości (część (b) Rysunku 2.16). Położenie ogniska drugiego F_2 obliczamy z wcześniej wyprowadzonego równania, podstawiając $d_p = \infty$

$$\left[\frac{n_1}{\infty}\right] + \frac{n_2}{f_2} = \frac{n_2 - n_1}{R},$$

$$f_2 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}.$$

Zauważ, że ognisko przedmiotu jest w innej odległości od wierzchołka niż ognisko obrazu, ponieważ $n_1 \neq n_2$.

Konwencja znaków dla pojedynczej powierzchni załamującej

Mimo że wyprowadziliśmy równanie dla załamania na powierzchni wypukłej, to samo wyrażenie jest poprawne dla powierzchni wklęsłej, jeśli przyjmiemy następującą konwencję znaków:

1. $R > 0$, jeżeli powierzchnia jest wypukła w kierunku przedmiotu; w innym przypadku $R < 0$.
2. $d_o > 0$, jeżeli obraz jest rzeczywisty i znajduje się po przeciwnej stronie niż przedmiot; w innym przypadku $d_o < 0$.

2.4 | Cienkie soczewki

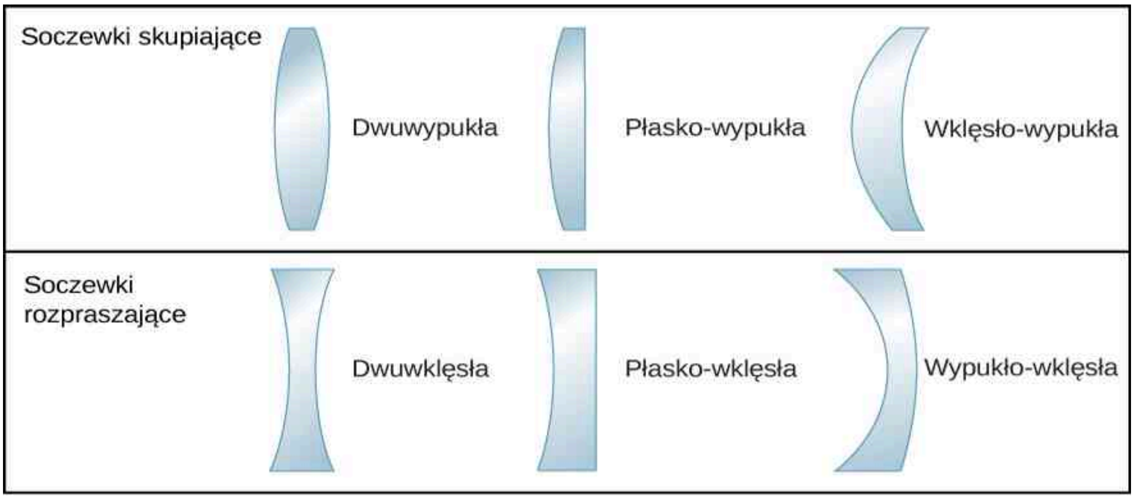
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- stosować konstrukcję biegu promieni światła do określenia położenia obrazu tworzonego przez soczewkę;
- stosować równanie cienkiej soczewki do opisu położenia i właściwości obrazu tworzonego przez soczewkę.

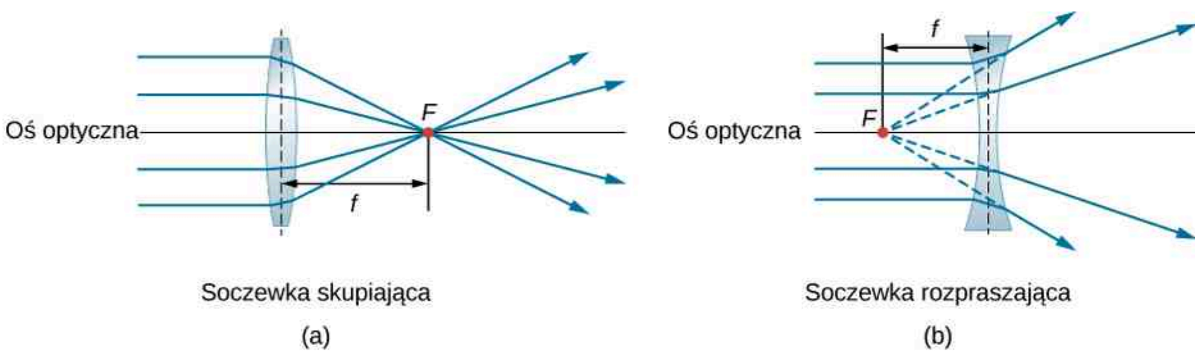
Soczewki występują w wielu układach optycznych, między innymi w zwykłym szkle powiększającym, w aparatach fotograficznych, a także w oku. W tym podrozdziale zastosujemy prawo Snella do badania właściwości soczewek. Wyjaśnimy też, jak soczewki tworzą obrazy.

Słowo „soczewka” pochodzi od łacińskiego określenia ziarna soczewicy, której kształt jest podobny do soczewki wypukłej. Nie wszystkie soczewki mają jednak taki sam kształt. Rysunek 2.17 pokazuje różnorodność ich kształtów. Słownictwo używane do opisu soczewek jest podobne do stosowanego przy opisie zwierciadeł sferycznych. Oś symetrii soczewki jest nazywana osią optyczną; punkt, w którym oś optyczna przecina powierzchnię soczewki, jest nazywany wierzchołkiem soczewki i tak dalej.



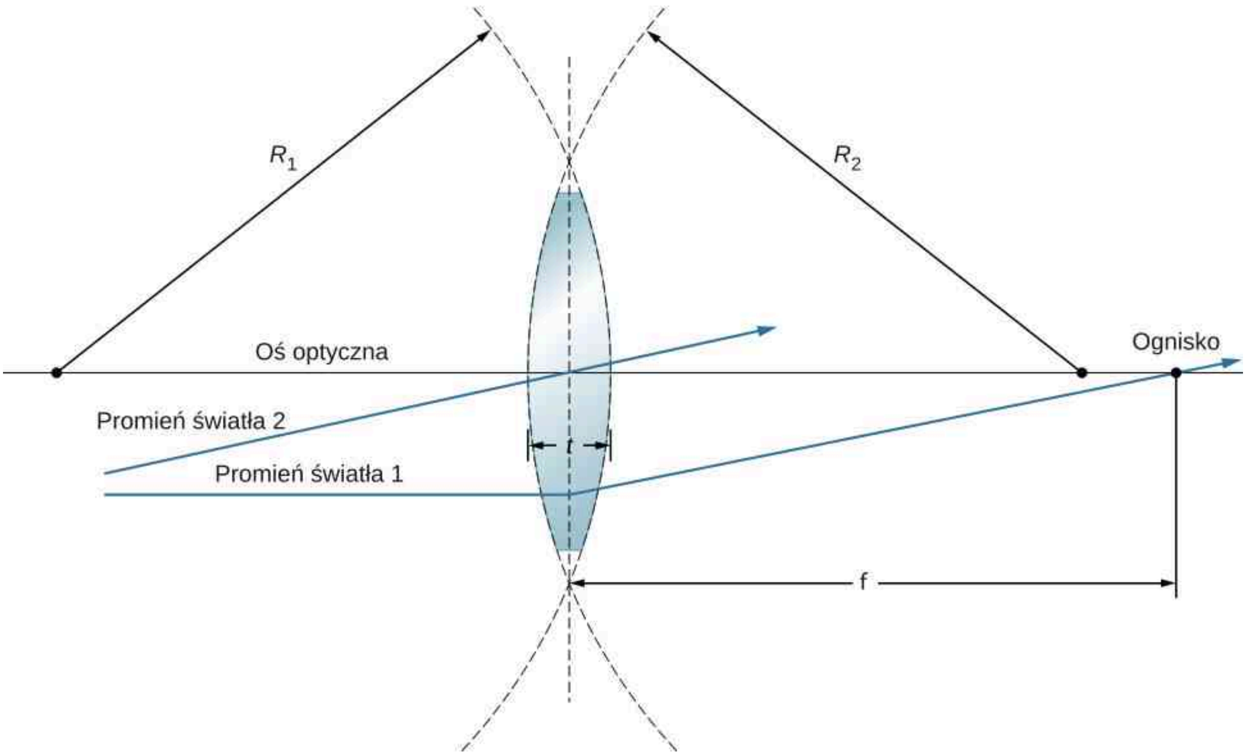
Rysunek 2.17 Różne rodzaje soczewek.

Soczewka skupiająca (ang. **converging lens**), czy też inaczej **soczewka wypukła** (ang. **convex lens**), ma taki kształt, że wszystkie promienie światła rozchodzące się równolegle do jej osi optycznej po przejściu przez soczewkę skupiają się w jednym punkcie na osi optycznej po przeciwnej stronie soczewki, jak pokazano w części (a) Rysunku 2.18. **Soczewka wklęsła** (ang. **concave lens**), czy też inaczej **soczewka rozpraszająca** (ang. **diverging lens**), ma natomiast taki kształt, że wszystkie promienie światła rozchodzące się równolegle do jej osi optycznej po przejściu przez soczewkę rozpraszają się, jak pokazano w części (b). Żeby zrozumieć dokładniej, jak soczewka operuje światłem, spójrzmy uważnie na promień przechodzący przez soczewkę skupiającą w części (a) Rysunku 2.18. Ponieważ współczynnik załamania soczewki jest większy niż powietrza, to zgodnie z prawem Snella promień przechodzący przez soczewkę zostaje załamany w kierunku prostopadłej do powierzchni (normalnej). I odwrotnie, gdy promień opuszcza soczewkę, jest załamany w kierunku od prostopadłej do powierzchni (normalnej). Ta sama zasada pozostaje w mocy dla soczewek rozpraszających, jak pokazano w części (b) Rysunku 2.18. Podsumowując, promienie światła są załamywane w stronę osi optycznej dla soczewki skupiającej i w kierunku od osi optycznej dla soczewki rozpraszającej. Dla soczewki skupiającej punkt, w którym promienie się przecinają, jest jej ogniskiem, oznaczanym F. Dla soczewki rozpraszającej punkt, z którego promienie zdają się wychodzić, jest jej ogniskiem pozornym. Odległość od środka soczewki do jej ogniska jest nazywana ogniskową soczewki i oznaczana f.



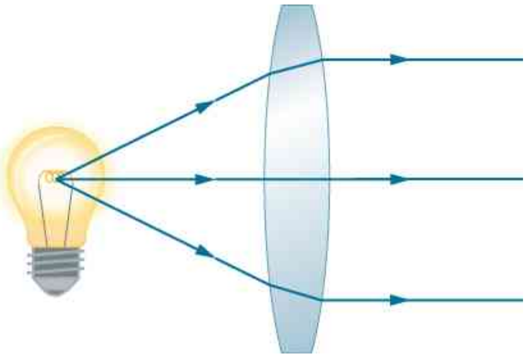
Rysunek 2.18 Równoległe do osi optycznej promienie światła padające na soczewkę skupiającą (a) są skupiane w ognisku F, natomiast padające na soczewkę rozpraszającą (b) są rozbieżne, a przedłużenia promieni rozbieżnych przecinają się w punkcie będącym ogniskiem pozornym soczewki. Odległość od środka soczewki do jej ogniska jest ogniskową soczewki f. Zauważ, że promienie światła są załamywane zarówno przy wejściu, jak i przy wyjściu soczewki.

Soczewka jest definiowana jako cienka, jeżeli jej grubość jest znacznie mniejsza niż promień krzywizny obu powierzchni załamujących, jak pokazano na Rysunku 2.19. W tym przypadku można uznać, że promienie światła są załamywane przez soczewkę tylko raz. Na rysunku pokazano, że promień światła 1 równoległy do osi optycznej ulega pojedynczemu załamaniu wewnątrz soczewki, a następnie przechodzi przez ognisko soczewki. Inną ważną cechą cienkich soczewek jest to, że promienie światła przechodzące przez środek soczewki nie ulegają odchyleniu od początkowego kierunku, jak pokazano na rysunku dla promienia 2.



Rysunek 2.19 W przypadku cienkiej soczewki jej grubość t jest znacznie mniejsza niż promienie krzywizny R_1 i R_2 powierzchni. Wewnątrz soczewki promienie światła załamują się tak jak promień światła 1. Promień światła 2 przechodzący przez środek soczewki nie zmienia swojego początkowego kierunku.

Jak wspomnieliśmy przy opisie prawa Snella, drogi promieni światła są dokładnie odwracalne. Oznacza to, że na Rysunku 2.18 moglibyśmy odwrócić kierunek wszystkich strzałek i rysunek nadal byłby poprawny. Przykładowo, jeżeli punktowe źródło światła znajduje się w ognisku soczewki skupiającej, tak jak na Rysunku 2.20, to z drugiej strony soczewki będą rozchodziły się równoległe promienie światła.

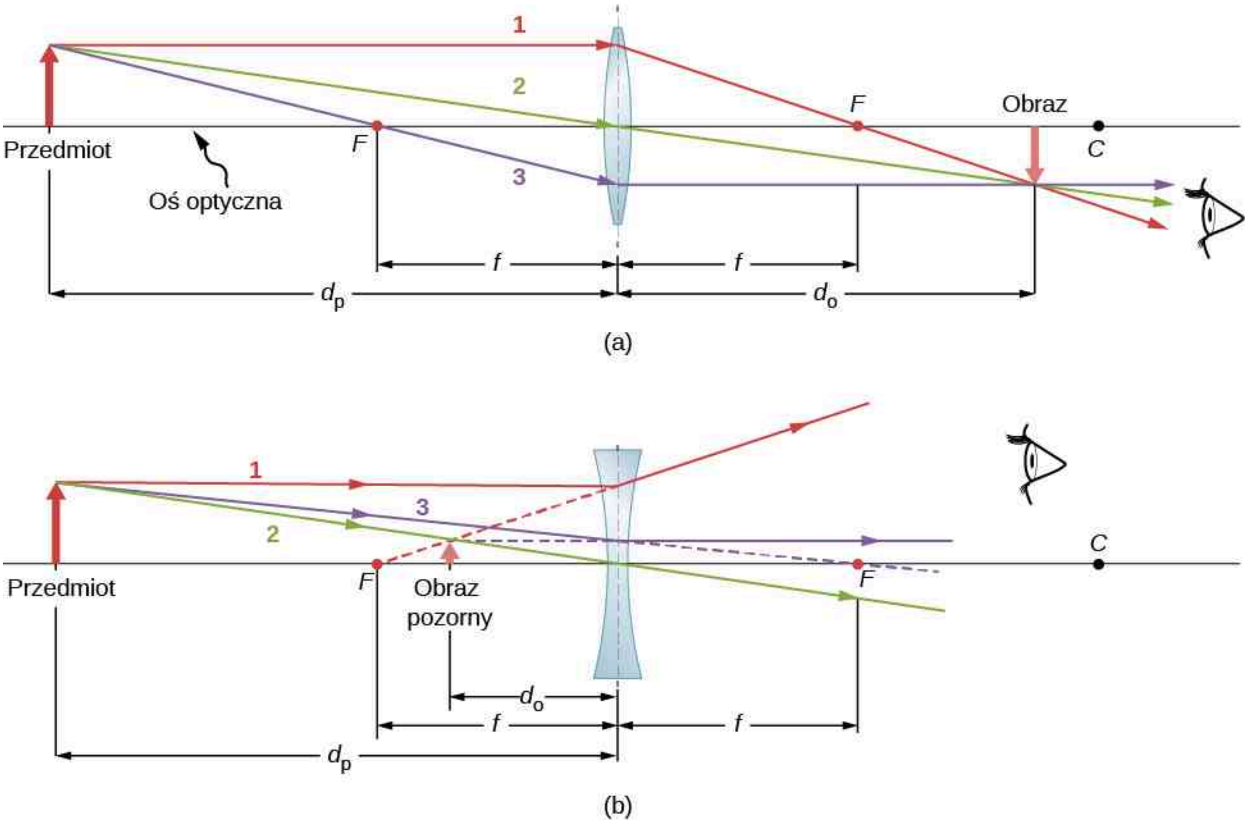


Rysunek 2.20 Małe źródło światła, na przykład żarówka, umieszczone w ognisku soczewki skupiającej jest źródłem równoległych promieni światła wychodzących z drugiej strony soczewki. Drogi promieni światła są odwracalne, zarówno dla soczewek skupiających jak i rozpraszających pokazanych na Rysunku 2.18. Technika wytworzenia ukierunkowanej wiązki światła ze źródła, które emituje światło we wszystkich kierunkach, jest wykorzystywana w latarniach morskich, a czasami także w latarniach ulicznych.

Konstrukcja biegu promieni dla cienkich soczewek

Konstrukcja biegu promieni jest techniką graficznego wyznaczania drogi promieni światła. Wyznaczanie drogi charakterystycznych promieni dla cienkich soczewek jest bardzo podobne do techniki, z której korzystaliśmy przy zwierciadłach sferycznych. Podobnie jak dla zwierciadeł, bieg charakterystycznych promieni może precyzyjnie opisać działanie soczewki. Zasady konstrukcji biegu promieni dla cienkich soczewek są podobne do zasad stosowanych przy zwierciadłach sferycznych:

1. Promień równoległy do osi optycznej soczewki skupiającej po załamaniu w soczewce przechodzi przez ognisko po drugiej stronie soczewki (promień 1 w części (a) Rysunku 2.21). Promień równoległy do osi optycznej soczewki rozpraszającej po załamaniu w soczewce wychodzi wzdłuż linii przechodzącej przez ognisko po tej samej stronie soczewki (promień 1 w części (b) Rysunku 2.21).
2. Promień przechodzący przez środek soczewki zarówno skupiającej, jak i rozpraszającej nie zmienia swojego początkowego kierunku (promień 2 w częściach (a) i (b) Rysunku 2.21).
3. Promień przechodzący przez ognisko soczewki skupiającej po przejściu przez soczewkę rozchodzi się równolegle do osi optycznej (promień 3 w części (a) Rysunku 2.21). Promień rozchodzący się wzdłuż linii przechodzącej przez ognisko soczewki rozpraszającej wychodzi z soczewki równolegle do osi optycznej (promień 3 w części (b) Rysunku 2.21).



Rysunek 2.21 Soczewki cienkie mają takie same ogniskowe po każdej stronie. (a) Równoległe promienie światła padające na soczewkę skupiającą od prawej strony przechodzą przez ognisko po lewej stronie soczewki. (b) Równoległe promienie światła padające na soczewkę rozpraszającą od prawej strony zdają się wychodzić z ogniska po prawej stronie soczewki.

Cienkie soczewki dobrze działają w przypadku światła monochromatycznego (światło o jednej długości fali). Dla światła zawierającego wiele długości fal (np. światła białego) soczewki nie działają już tak dobrze. Jak dowiedzieliśmy się w poprzednich rozdziałach, współczynnik załamania światła dla materiału zależy od długości fali tegoż światła. Właściwość ta jest odpowiedzialna za szereg wielobarwnych zjawisk, np. tęczę. Niestety prowadzi również do niepożądanych efektów, np. aberracji w obrazach tworzonych przez soczewki. Ponieważ ogniskowa soczewek zależy od współczynnika załamania dla materiału, z którego soczewki są wykonane, będzie ona zależeć również od długości fali padającego światła. To oznacza, że światło o różnych długościach fali będzie skupiane w różnych punktach, co powoduje efekt **aberracji chromatycznej** (ang. **chromatic aberration**). W praktyce objawia się to tym, że krawędzie

obrazu białego przedmiotu stają się wielobarwne i rozmazane. Specjalne soczewki nazywane dubletami są w stanie skorygować aberrację chromatyczną. Dublet tworzy się poprzez sklejenie ze sobą soczewki skupiającej i rozpraszającej. Zastosowanie tych soczewek znacząco redukuje efekt aberracji chromatycznej.

Obrazy tworzone przez cienkie soczewki

Zastosujemy opisaną powyżej technikę konstrukcji biegu promieni do zbadania właściwości obrazów tworzonych przez soczewki. W pewnych warunkach soczewki tworzą obraz rzeczywisty, jak np. obraz z projektora filmowego, który może być wyświetlony na ekranie. Obraz pozorny natomiast nie może być wyświetlony na ekranie. Zastosujemy konstrukcję biegu promieni dla cienkich soczewek, aby zilustrować, jak tworzą one obrazy, a następnie wyprowadzimy równania ilościowo określające właściwości cienkich soczewek.

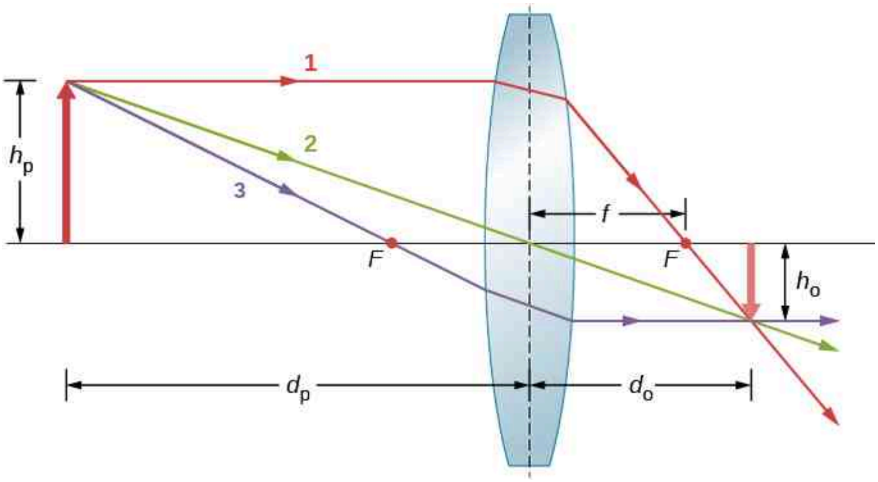
Rozważmy przedmiot znajdujący się w pewnej odległości od soczewki skupiającej (Rysunek 2.22). Aby znaleźć położenie i rozmiar obrazu, śledzimy wybrane promienie światła wychodzące z jednego punktu przedmiotu, w tym przypadku wierzchołka strzałki. Rysunek pokazuje trzy wybrane promienie, które wychodzą z tego punktu. Bieg tych trzech promieni można narysować przy zastosowaniu opisanych powyżej zasad konstrukcji biegu promieni.

- Promień 1 przechodzi przez soczewkę równolegle do osi optycznej i przechodzi przez ognisko po drugiej stronie (zasada 1).
- Promień 2 przechodzi przez środek soczewki i nie ulega odchyleniu (zasada 2).
- Promień 3 przechodzi przez ognisko na drodze do soczewki i wychodzi równolegle do osi optycznej soczewki (zasada 3).

Trzy wybrane promienie przecinają się w jednym punkcie po drugiej stronie soczewki. Z tego wynika, że obraz wierzchołka strzałki znajduje się w tym punkcie. Wszystkie promienie, które wychodzą z wierzchołka strzałki i przechodzą przez soczewkę, ulegają załamaniu i przecinają się we wspomnianym punkcie.

Po znalezieniu obrazu wierzchołka strzałki niezbędny jest kolejny punkt obrazu, aby określić orientację jej obrazu. Wybieramy podstawę strzałki leżącą na osi optycznej. Jak wyjaśniliśmy w podrozdziale o zwierciadłach sferycznych, obraz podstawy przedmiotu znajduje się na osi optycznej nad obrazem wierzchołka strzałki (ze względu na pionową symetrię soczewki). Z tego wynika, że obraz rozciąga się w dół poniżej osi optycznej. Promienie z innego punktu strzałki, np. ze środka strzałki, po przejściu przez soczewkę przecinają się w innym wspólnym punkcie, dopełniając resztę obrazu.

Mimo że na rysunku pokazano konstrukcję dla trzech promieni, to aby znaleźć obraz, wystarczy wybrać dwa promienie, których zachowanie po przejściu przez soczewkę jest znane.



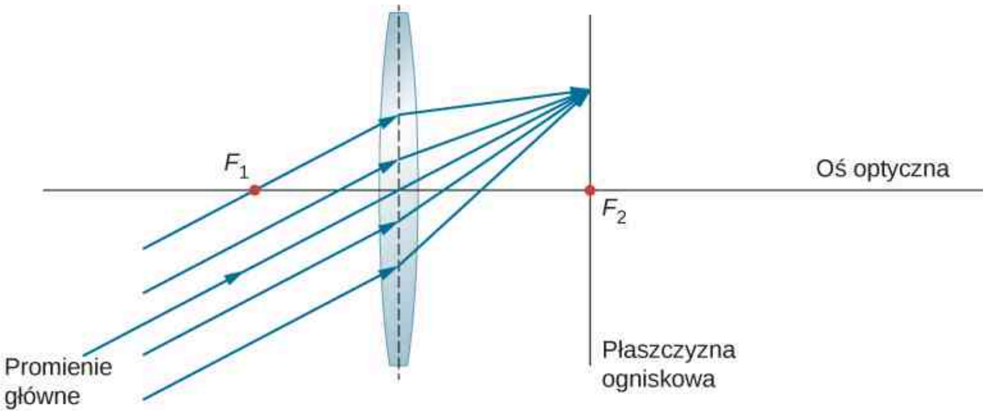
Rysunek 2.22 Konstrukcja biegu promieni dla obrazu utworzonego przez soczewkę skupiającą. Trzy charakterystyczne promienie światła wychodzące z tego samego punktu przedmiotu po przejściu przez soczewkę przecinają się w miejscu, w którym powstaje obraz. W tym przypadku powstaje obraz rzeczywisty – czyli taki, który może być wyświetlony na ekranie.

Kilka ważnych danych pojawia się na tym rysunku. Podobnie jak dla zwierciadła, odległość przedmiotu d_p definiujemy jako odległość przedmiotu od środka soczewki oraz odległość obrazu d_o jako odległość obrazu od środka soczewki. Wysokość przedmiotu i wysokość obrazu są oznaczane jako h_p i h_o. Wysokości obrazów, które są zorientowane tak samo jak przedmiot, mają znak dodatni, wysokości obrazów odwróconych względem przedmiotu mają znak

ujemny. Używając zasad konstrukcji biegu promieni, możemy precyzyjnie opisać położenie i rozmiar obrazu, tak jak przedstawiono na Rysunku 2.22. Prawdziwą zaletą tej metody jest jednak to, że pokazuje ona, jak tworzone są obrazy w różnych sytuacjach.

Ukośne równoległe promienie i płaszczyzna ogniskowa

Dowiedzieliśmy się, że promienie równoległe do osi optycznej soczewki skupiającej po przejściu przez nią skupiają się w jednym punkcie – ognisku soczewki. W przypadku soczewki rozpraszającej promienie równoległe do osi optycznej rozchodzą się w takim kierunku, jakby wychodziły z ogniska znajdującego się po tej samej stronie soczewki co źródło światła. Co jednak z promieniami równoległymi, które padają pod pewnym kątem do osi optycznej? W przypadku soczewek skupiających promienie takie po przejściu przez nią nie skupiają się w ognisku znajdującym się na osi optycznej, tylko na płaszczyźnie przechodzącej przez ognisko, tzw. **płaszczyźnie ogniskowej** (ang. **focal plane**). Płaszczyzna ogniskowa zawiera ognisko i jest prostopadła do osi optycznej. Jak pokazano na Rysunku 2.23, równoległe promienie skupiają się w miejscu, w którym promień przechodzący przez środek soczewki przecina płaszczyznę ogniskową.

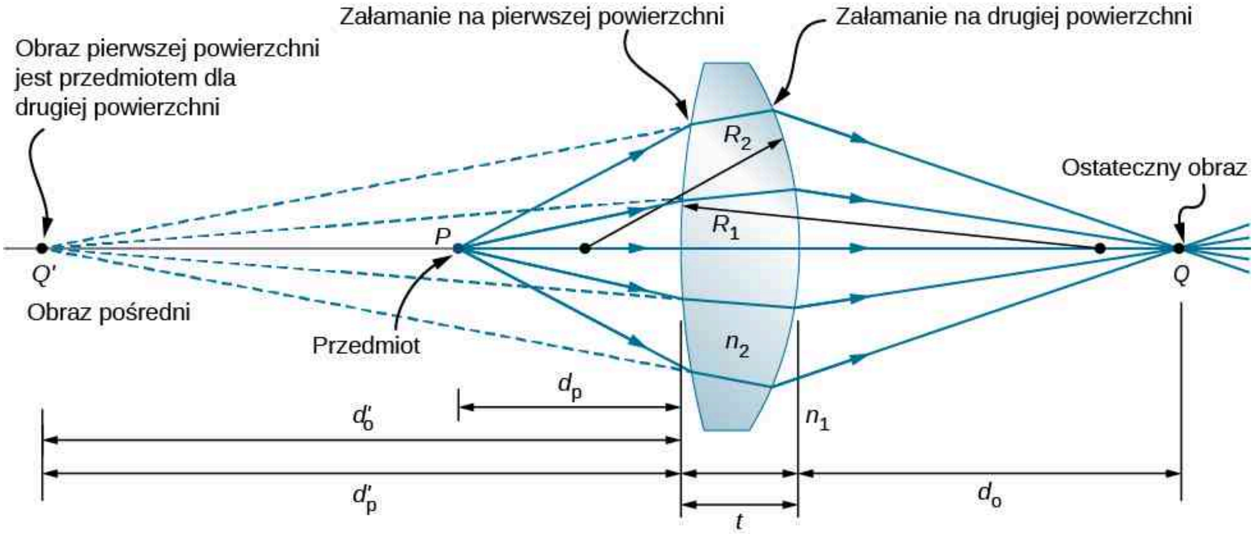


Rysunek 2.23 Ukośne równoległe promienie padające na soczewkę skupiającą są skupiane w punkcie na płaszczyźnie ogniskowej.

Równanie cienkiej soczewki

Konstrukcja biegu promieni światła pozwala nam jakościowo opisać cechy obrazu przedmiotu. Aby otrzymać informacje ilościowe, wyprowadzimy teraz równania na podstawie analizy geometrycznej konstrukcji biegu promieni dla cienkich soczewek. Te równania, nazywane równaniem cienkiej soczewki oraz równaniem soczewki, pozwolą nam precyzyjnie analizować obrazy uzyskane dla cienkich soczewek.

Rozważmy grubą, dwuwypukłą soczewkę przedstawioną na Rysunku 2.24. Współczynnik załamania otaczającego ją ośrodka oznaczamy jako n_1 (jeżeli soczewka jest w powietrzu, to $n_1 = 1$), natomiast współczynnik załamania soczewki oznaczamy jako n_2. R_1 i R_2 oznaczają promienie krzywizny obu powierzchni soczewki. Chcemy znaleźć zależność pomiędzy odległością przedmiotu d_p i odległością obrazu d_o a parametrami soczewki.



Rysunek 2.24 Rysunek do wyprowadzenia równania soczewki. Przyjmujemy, że t jest grubością soczewki, n_1 współczynnikiem załamania zewnętrznego ośrodka, a n_2 współczynnikiem załamania soczewki. W przybliżeniu stosowanym dla cienkiej soczewki przyjmujemy, że $t \longrightarrow 0$.

Aby wyprowadzić równanie cienkiej soczewki, analizujemy obraz utworzony przez pierwszą powierzchnię załamującą (tj. lewą powierzchnię), a następnie traktujemy ten obraz jako przedmiot dla drugiej powierzchni załamującej. Na Rysunku 2.24 obraz punktu P tworzony przez pierwszą powierzchnię załamującą powstaje w punkcie Q' (punkt przecięcia znajduje się na przedłużeniu promieni biegnących wewnątrz soczewki; przedłużenia promieni zaznaczono przerywanymi liniami). Zauważ, że obraz Q' jest obrazem pozornym, ponieważ żadne rzeczywiste promienie nie przechodzą przez punkt Q'. Aby obliczyć odległość obrazu d'_o dla Q', korzystamy z Równania 2.11. W tym przypadku d_p jest odległością przedmiotu, a R_1 jest promieniem krzywizny pierwszej powierzchni załamującej. Podstawiwszy te zmienne do Równania 2.3, otrzymujemy

$$\frac{n_1}{d_\text{p}} + \frac{n_2}{d'_\text{o}} = \frac{n_2 - n_1}{R_1}. \tag{2.14}$$

Obraz tworzony przez pierwszą powierzchnię załamującą jest pozorny i znajduje się po tej samej stronie co przedmiot, a więc $d'_\text{o} < 0$, a $d_\text{p} > 0$. Ponadto powierzchnia ta jest wypukła w kierunku przedmiotu, a więc $R_1 > 0$.

Aby obliczyć odległość przedmiotu dla przedmiotu Q tworzonego przez załamanie promieni na drugiej powierzchni, należy wziąć pod uwagę zamianę współczynników załamania n_1 i n_2 w Równaniu 2.11. Na Rysunku 2.24 promienie wychodzą z ośrodka o współczynniku n_2, podczas gdy na Rysunku 2.15 promienie wychodzą z ośrodka o współczynniku n_1. Wynika z tego, że musimy zamienić n_1 i n_2 w równaniu. Dodatkowo, jak wynika z Rysunku 2.24, d'_p jest odległością przedmiotu, d_o jest odległością obrazu, a R_2 jest promieniem krzywizny. Po podstawieniu tych wielkości do równania otrzymujemy

$$\frac{n_2}{d'_\text{p}} + \frac{n_1}{d_\text{o}} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}. \tag{2.15}$$

Otrzymany obraz jest rzeczywisty i znajduje się po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot, a więc $d_\text{o} > 0$ i $d'_\text{p} > 0$. Druga powierzchnia jest wklęsła w kierunku przeciwnym względem przedmiotu, a więc $R_2 < 0$. Równanie 2.15 może być uproszczone, gdy uwzględnimy, że $d'_\text{p} = |d'_\text{o}| + t$, gdzie zastosowano wartość bezwzględną, ponieważ d'_o ma znak ujemny, a d'_p oraz t są dodatnie. Możemy nie stosować wartości bezwzględnej, jeżeli przyjmiemy znak ujemny dla d'_o, wówczas $d'_\text{p} = -d'_\text{o} + t$. Po podstawieniu tej zależności do Równania 2.15 otrzymujemy

$$\frac{n_2}{-d'_\text{o} + t} + \frac{n_1}{d_\text{o}} = \frac{n_1 - n_2}{R_2}. \tag{2.16}$$

Po połączeniu Równania 2.14 i Równania 2.16 otrzymujemy

$$\frac{n_1}{d_\text{p}} + \frac{n_1}{d_\text{o}} + \frac{n_2}{d'_\text{o}} + \frac{n_2}{-d'_\text{o} + t} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \tag{2.17}$$

W **przybliżeniu cienkiej soczewki** (ang. **thin-lens approximation**) przyjmujemy, że soczewka jest bardzo cienka w porównaniu z odległością pierwszego obrazu, czyli $t \ll d'_o$ (lub równoważnie, że $t \ll R_1, R_2$). W tym przypadku wartości trzeciego i czwartego wyrażenia po lewej stronie Równania 2.17 eliminują się i otrzymujemy

$$\frac{n_1}{d_p} + \frac{n_1}{d_o} = (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Dzieląc przez n_1 , otrzymujemy ostatecznie równanie

$$\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_o} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (2.18)$$

Podobnie jak dla zwierciadeł sferycznych, możemy zastosować zależność wynikającą z konstrukcji biegu promieni, aby pokazać, że dla cienkich soczewek spełnione jest równanie

$$\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{f}, \quad (2.19)$$

gdzie f jest ogniskową cienkiej soczewki (wyprowadzenie tego wzoru zostało pozostawione jako zadanie). Powyższe równanie jest **równaniem cienkiej soczewki** (ang. **thin-lens equation**). Ogniskowa cienkiej soczewki jest taka sama po lewej i po prawej stronie soczewki. Po połączeniu Równania 2.18 i Równania 2.19 otrzymujemy

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (2.20)$$

Jest to postać równania cienkiej soczewki nazywana **równaniem producentów soczewek** (ang. **lens maker's equation**) lub po prostu **równaniem soczewki.** Wynika z niego, że ogniskowa cienkiej soczewki zależy od promieni krzywizny soczewki oraz współczynnika załamania światła dla materiału soczewki i otaczającego ją ośrodka. Dla soczewki w powietrzu $n_1 = 1$, a $n_2 \equiv n$, zatem równanie soczewki upraszcza się do postaci

$$\frac{1}{f} = (n - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right). \quad (2.21)$$

Konwencja znaków dla soczewek

Aby równanie cienkich soczewek miało sens, należy stosować następującą **konwencję znaków:**

1. Odległość obrazu d_o jest dodatnia, jeżeli obraz jest po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot (tj. obraz rzeczywisty); w innym przypadku d_o jest ujemna (tj. obraz pozorny).
2. Ogniskowa f jest dodatnia dla soczewki skupiającej i ujemna dla soczewki rozpraszającej.
3. Promień R jest dodatni dla powierzchni wypukłej w kierunku przedmiotu i ujemny dla powierzchni wklęsłej w kierunku przedmiotu.

Powiększenie

Stosując konstrukcję biegu promieni dla przedmiotu o skończonych wymiarach umieszczonego na osi optycznej soczewki, można pokazać, że powiększenie p obrazu opisuje zależność

$$p \equiv \frac{h_o}{h_p} = -\frac{d_o}{d_p}, \quad (2.22)$$

gdzie symbol ≡ oznacza „jest definiowany jako". Jest to równanie analogiczne do równania dla zwierciadeł (zob. Równanie 2.8). Jeżeli $p > 0$, to obraz ma taką samą orientację pionową jak przedmiot (obraz jest prosty). Jeżeli $p < 0$, to obraz ma przeciwną orientację niż przedmiot (obraz jest odwrócony).

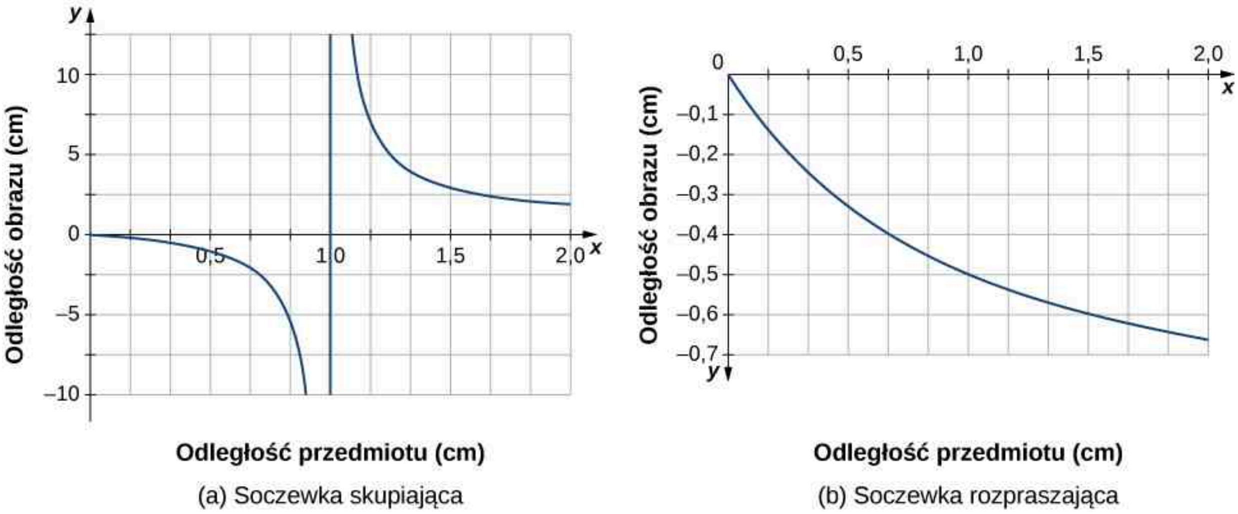
Stosowanie równania cienkiej soczewki

Równanie cienkiej soczewki ma szerokie zastosowanie w zagadnieniach związanych z soczewkami. W kolejnych przykładach omówimy wiele aspektów tworzenia obrazu przez soczewki.

Rozważmy cienkie soczewki skupiające. Gdzie powstaje obraz i jakie ma cechy, gdy przedmiot zbliża się do soczewki z nieskończoności? To zagadnienie można zilustrować, stosując równanie cienkiej soczewki dla danej ogniskowej i rysując wykres położenia obrazu jako funkcję odległości przedmiotu od soczewki. Innymi słowy, chodzi o wykres zależności

$$d_o = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_p}\right)^{-1}$$

dla danej wartości f. Wykres dla $f = 1\ \text{cm}$ jest pokazany w części (a) Rysunku 2.25.

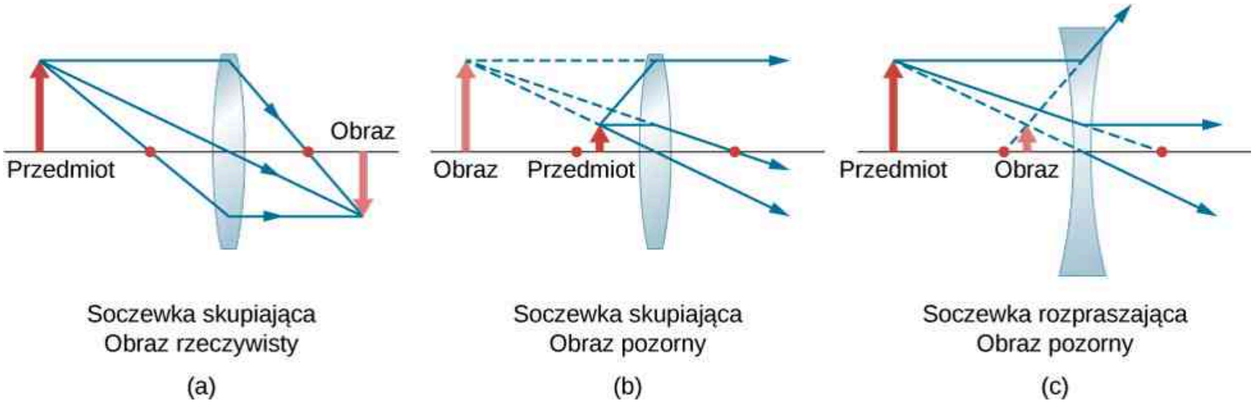


Rysunek 2.25 (a) Odległość obrazu od cienkiej, skupiającej soczewki o ogniskowej $f = 1\ \text{cm}$ jako funkcja odległości obrazu. (b) Odległość obrazu od cienkiej, tym razem rozpraszającej, soczewki o ogniskowej $f = -1\ \text{cm}$ jako funkcja odległości obrazu.

Dla przedmiotu znajdującego się w dużej odległości od soczewki w porównaniu z ogniskową f obraz powstaje w pobliżu płaszczyzny ogniskowej. W tym przypadku drugie wyrażenie po prawej stronie powyższego równania jest pomijalne w porównaniu z pierwszym wyrażeniem, a więc $d_o \approx f$.

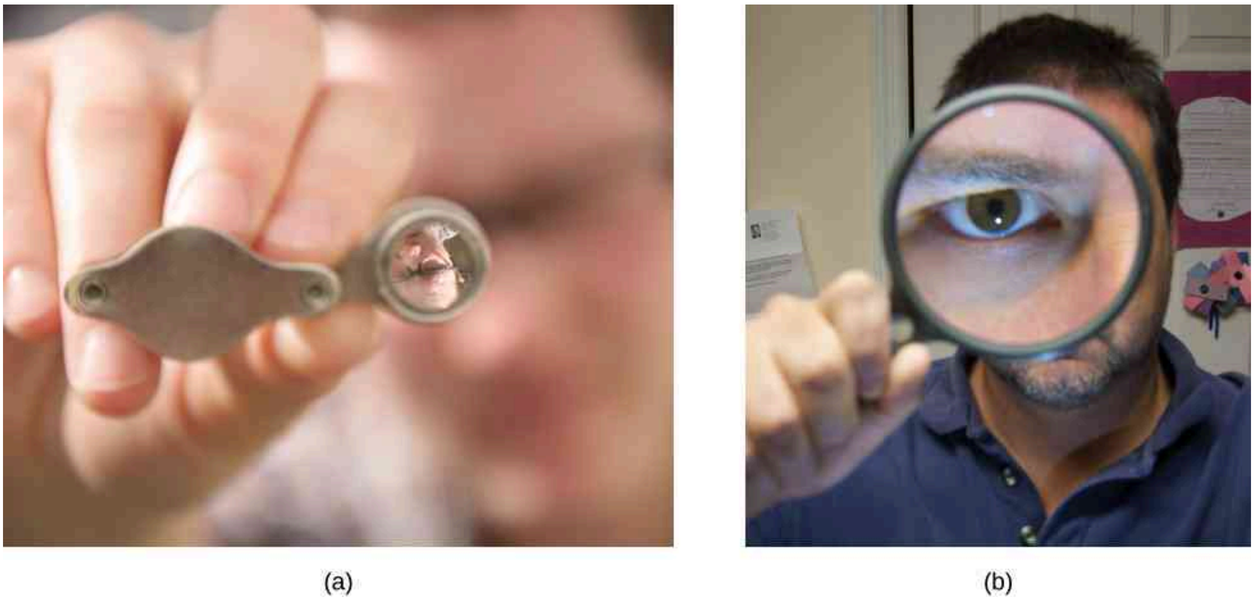
Powyższy opis zilustrowano na wykresie w części (a) Rysunku 2.25. Jak widać na nim, odległość obrazu zbliża się asymptotycznie do ogniskowej f równej $1\ \text{cm}$ dla większych odległości przedmiotu. Gdy przedmiot zbliża się do płaszczyzny ogniskowej, odległość obrazu rośnie do nieskończoności. Jest tak, jak oczekiwaliśmy, ponieważ przedmiot na płaszczyźnie ogniskowej tworzy równoległe promienie, dla których powstaje obraz w nieskończoności (tj. bardzo daleko od soczewki). Kiedy przedmiot znajduje się w odległości większej niż ogniskowa, odległość obrazu jest dodatnia, a więc obraz jest rzeczywisty (znajduje się po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot) i jest odwrócony (ponieważ $p = -d_o / d_p$). Gdy przedmiot znajduje się w odległości mniejszej niż ogniskowa, odległość obrazu jest ujemna, co oznacza, że obraz jest pozorny (znajduje się po tej samej stronie soczewki co przedmiot) i jest prosty.

Podobna zależność odległości obrazu od odległości przedmiotu dla cienkiej soczewki rozpraszającej o ogniskowej $f = -1\ \text{cm}$ jest pokazana na wykresie w części (b) Rysunku 2.25. W tym przypadku odległość jest ujemna dla wszystkich dodatnich wartości odległości przedmiotu, co znaczy, że obraz jest pozorny (znajduje się po tej samej stronie soczewki co przedmiot) i prosty. Te cechy można również analizować, stosując konstrukcję biegu promieni (Rysunek 2.26).



Rysunek 2.26 Schemat konstrukcji obrazu dla soczewki skupiającej (a), (b) oraz rozpraszającej (c). Czerwoną kropka oznaczono położenie ognisk soczewek. (a) Obraz rzeczywisty i odwrócony przedmiotu znajdującego się w odległości większej niż ogniskowa soczewki skupiającej. (b) Obraz pozorny i prosty przedmiotu znajdującego się w odległości mniejszej niż ogniskowa soczewki skupiającej. (c) Obraz pozorny i prosty przedmiotu znajdującego się w odległości większej niż ogniskowa soczewki rozpraszającej.

Aby zobaczyć konkretne przykłady prostych i odwróconych obrazów, spójrz na Rysunek 2.27, który pokazuje obrazy utworzone przez soczewki skupiające, gdy przedmiot (w tym przypadku twarz człowieka) jest położony w różnych odległościach od soczewki. Na zdjęciu (a) twarz człowieka jest dalej niż ogniskowa soczewki, więc powstaje obraz odwrócony. Na zdjęciu (b) twarz człowieka jest bliżej niż ogniskowa soczewki, a więc obraz jest prosty.



Rysunek 2.27 (a) Gdy soczewka skupiająca znajduje się w odległości większej od twarzy człowieka niż ogniskowa, powstaje obraz odwrócony. Zauważ, że obraz znajduje się w ognisku, a twarz nie, ponieważ obraz jest znacznie bliżej aparatu, za pomocą którego wykonano to zdjęcie, niż twarz. (b) Prosty obraz powstaje, gdy soczewka skupiająca znajduje się w odległości mniejszej niż ogniskowa od twarzy człowieka. Źródła: (a) modyfikacja pracy „DaMongMana”/Flickr; (b) modyfikacja pracy Caseya Flesera

Poniższe przykłady pozwolą ci lepiej zrozumieć, jak działają soczewki.

Strategia rozwiązywania zadań: soczewki

1. Ustal, czy konieczne jest wykonanie rysunku konstrukcji biegu promieni lub zastosowanie równania cienkich soczewek, czy może jedno i drugie. Rysunek jest bardzo przydatny, nawet gdy konstrukcja biegu promieni nie jest konieczna do rozwiązania zadania. Zaznacz na rysunku symbole i znane wartości.

2. Określ, co ma być wyznaczone w zadaniu (określ niewiadome).
3. Zrób listę danych, które mogą być wykorzystane przy rozwiązywaniu zadania (określ dane).
4. Jeżeli konstrukcja biegu promieni jest konieczna, wykorzystaj zasady jej tworzenia opisane na początku tego rozdziału.
5. Większość zadań wymaga użycia równania cienkiej soczewki i/lub równania soczewki. Przekształć je w celu wyprowadzenia niewiadomych i podstaw dane. Możesz połączyć oba równania.
6. Sprawdź, czy obliczone wartości są sensowne. Czy znaki są poprawne? Czy rysunek konstrukcji biegu promieni jest zgodny z obliczeniami?

Przykład 2.3

Wykorzystanie równania soczewki

Oblicz promień krzywizny dwuwklęsłej, symetrycznej soczewki szklanej o współczynniku załamania $1{,}55$, dla której ogniskowa w powietrzu wynosi $20\ \text{cm}$ (obydwie powierzchnie mają taki sam promień krzywizny).

Strategia rozwiązania

Zastosuj równanie soczewki w postaci

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

gdzie $R_1 < 0$ i $R_2 > 0$. Ponieważ tworzymy symetryczną soczewkę dwuwklęsłą, to $|R_1| = |R_2|$.

Rozwiązanie

Możemy określić promień krzywizny R z równania

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) \cdot \frac{-2}{R}.$$

Rozwiązując to równanie dla R oraz podstawiając $f = -20\ \text{cm}$, $n_2 = 1{,}55$ i $n_1 = 1$, otrzymujemy

$$R = -2f\left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right) = -2 \cdot (-20\ \text{cm}) \cdot \left(\frac{1{,}55}{1} - 1\right) = 22\ \text{cm}.$$

Przykład 2.4

Soczewki skupiające i różne odległości przedmiotu

Oblicz położenie, orientację i powiększenie obrazu dla przedmiotu o wysokości $3\ \text{cm}$, dla następujących odległości przedmiotu od soczewki wypukłej o ogniskowej równej $10\ \text{cm}$:

a. $d_\text{p} = 50\ \text{cm}$;
b. $d_\text{p} = 5\ \text{cm}$;
c. $d_\text{p} = 20\ \text{cm}$.

Strategia rozwiązania

Skorzystamy z równania cienkiej soczewki $1/d_\text{o} + 1/d_\text{p} = 1/f$. Równanie przekształcimy tak, aby uzyskać odległość obrazu d_o, a następnie podstawimy podane wartości odległości obrazu i ogniskowej.

Rozwiązanie

a. Dla $d_\text{p} = 50\ \text{cm}$, $f = +10\ \text{cm}$ otrzymujemy

$$d_o = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_p}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10\,\text{cm}} - \frac{1}{50\,\text{cm}}\right)^{-1} = 12{,}5\,\text{cm}\,.$$

Odległość obrazu jest dodatnia, a więc obraz jest rzeczywisty i znajduje się po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot w odległości $12{,}5\,\text{cm}$ od soczewki. Aby obliczyć powiększenie i orientację obrazu, korzystamy z zależności

$$p = -\frac{d_o}{d_p} = -\frac{12{,}5\,\text{cm}}{50\,\text{cm}} = -0{,}25.$$

Ujemne powiększenie oznacza, że obraz jest odwrócony. Ponieważ $|p| < 1$, obraz jest mniejszy niż przedmiot. Wysokość obrazu obliczamy z zależności

$$|h_o| = |p| h_p = 0{,}25 \cdot 3\,\text{cm} = 0{,}75\,\text{cm}\,.$$

b. Dla $d_p = 5\,\text{cm}, f = +10\,\text{cm}$

$$d_o = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_p}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10\,\text{cm}} - \frac{1}{5\,\text{cm}}\right)^{-1} = -10\,\text{cm}\,.$$

Odległość obrazu jest ujemna, a więc obraz jest pozorny i znajduje się po tej samej stronie soczewki co przedmiot w odległości $10\,\text{cm}$ od soczewki. Powiększenie i orientację obrazu obliczamy z równania

$$p = -\frac{d_o}{d_p} = -\frac{-10\,\text{cm}}{5\,\text{cm}} = +2.$$

Dodatnie powiększenie oznacza, że obraz jest prosty (tj. ma taką samą orientację jak przedmiot). Ponieważ $|p| > 0$, obraz jest większy niż przedmiot. Wysokość obrazu wynosi

$$|h_o| = |p| h_p = 2 \cdot 3\,\text{cm} = 6\,\text{cm}\,.$$

c. Dla $d_p = 20\,\text{cm}, f = +10\,\text{cm}$

$$d_o = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_p}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{10\,\text{cm}} - \frac{1}{20\,\text{cm}}\right)^{-1} = 20\,\text{cm}\,.$$

Odległość obrazu jest dodatnia, więc obraz jest rzeczywisty i znajduje się po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot w odległości $20\,\text{cm}$. Powiększenie wynosi

$$p = -\frac{d_o}{d_p} = -\frac{20\,\text{cm}}{20\,\text{cm}} = -1.$$

Ujemne powiększenie oznacza, że obraz jest odwrócony. Ponieważ $|p| = 1$, obraz ma taki sam rozmiar jak przedmiot.

Podczas rozwiązywania zadań z optyki geometrycznej często trzeba połączyć konstrukcję biegu promieni z równaniami soczewek. Ilustruje to rozwiązanie kolejnego przykładu.

Przykład 2.5

Wybór ogniskowej i rodzaju soczewki

Masz za zadanie wyświetlić obraz żarówki na ekranie znajdującym się w odległości $1{,}5\,\text{m}$. Musisz wybrać odpowiednią soczewkę – skupiającą lub rozpraszającą, o odpowiedniej ogniskowej (Rysunek 2.28). Odległość pomiędzy soczewką a żarówką wynosi $0{,}75\,\text{m}$ i nie można jej zmienić. Dodatkowo należy określić powiększenie i orientację obrazu.

Strategia rozwiązania

Obraz jest rzeczywisty, zatem wybierz soczewkę skupiającą. Ogniskową soczewki można obliczyć, korzystając z równania cienkiej soczewki. Odległości przedmiotu i obrazu wynoszą odpowiednio $d_{\text{p}} = 0{,}75\,\text{m}$ i $d_{\text{o}} = 1{,}5\,\text{m}$.

Rozwiązanie

Wyprowadź ogniskową z równania cienkiej soczewki i podstaw podane wartości odległości obrazu i przedmiotu

$$\frac{1}{d_{\text{p}}} + \frac{1}{d_{\text{o}}} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = \left(\frac{1}{d_{\text{p}}} + \frac{1}{d_{\text{o}}}\right)^{-1},$$

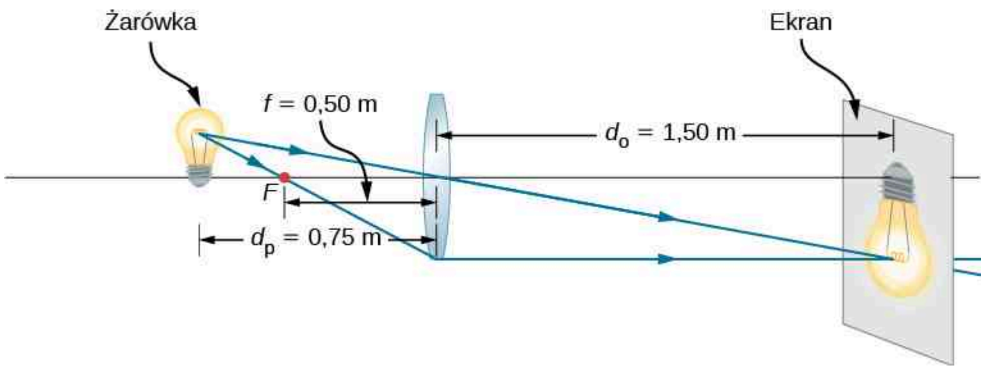
$$f = \left(\frac{1}{0{,}75\,\text{m}} + \frac{1}{1{,}5\,\text{m}}\right)^{-1} = 0{,}5\,\text{m}.$$

Powiększenie wynosi

$$p = -\frac{d_{\text{o}}}{d_{\text{p}}} = -\frac{1{,}5\,\text{m}}{0{,}75\,\text{m}} = -2.$$

Znaczenie

Ujemny znak powiększenia oznacza, że obraz jest odwrócony. Jak należało się spodziewać dla soczewki skupiającej, ogniskowa jest dodatnia. Do sprawdzenia obliczeń warto wykorzystać konstrukcję biegu promieni (zob. Rysunek 2.28). Zgodnie z oczekiwaniem obraz jest odwrócony, rzeczywisty i większy niż przedmiot.



Rysunek 2.28 Żarówka znajduje się w odległości $0{,}75\,\text{m}$ od soczewki o ogniskowej równej $0{,}5\,\text{m}$ i tworzy obraz rzeczywisty na ekranie. Konstrukcja biegu promieni pozwala przewidzieć położenie i rozmiar obrazu.

2.5 | Oko

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

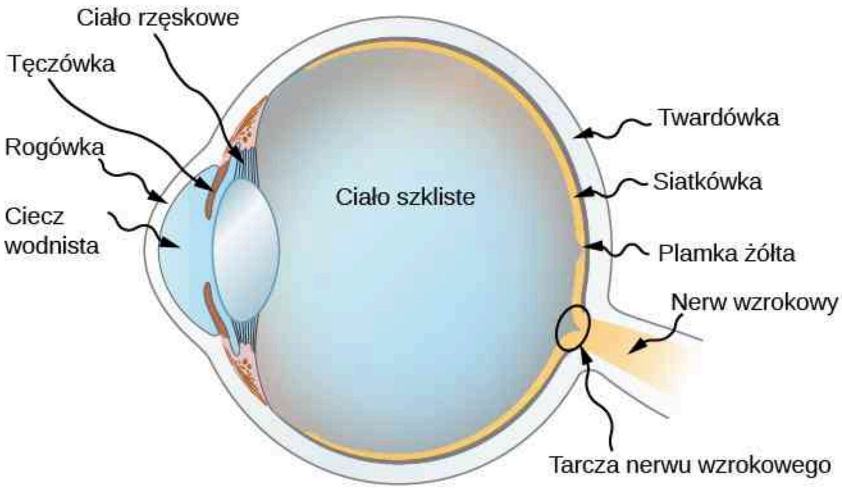
- rozumieć fizyczne podstawy tworzenia obrazów przez ludzkie oko;
- rozpoznawać różne przyczyny wad wzroku oraz stosować zasady optyki przy korekcji tych wad.

Ludzkie oko jest prawdopodobnie najbardziej fascynującym i najważniejszym układem optycznym. Nasze oczy pozwalają nam określać kierunek, ruch, kolory i odległość. W tym podrozdziale poznamy optykę geometryczną oka.

Fizyka oka

Oko jest wyjątkowe. Potrafi tworzyć obrazy o niezwykłym bogactwie detali i kolorów. Jednakże nasze oczy nieraz potrzebują korekcji, aby osiągnąć to, co nazywamy dobrym wzrokiem. Właściwie to dobry wzrok powinien być nazywany „idealnym”, ponieważ prawie połowa ludzkości wymaga jakiejś korekcji wzroku, a konieczność noszenia okularów nie jest w żadnym stopniu „anomalna”. Tworzenie obrazu przez nasze oczy i możliwości korekcji wzroku rozumiemy dzięki optyce, której zasady zostały omówione wcześniej w tym rozdziale.

Rysunek 2.29 przedstawia schematycznie budowę anatomiczną oka. **Rogówka** (ang. **cornea**) i soczewka oka tworzą układ optyczny, który w przybliżeniu działa jak pojedyncza cienka soczewka. Żeby dało się dobrze widzieć, obraz rzeczywisty musi padać na światłoczułą **siatkówkę** (ang. **retina**), która znajduje się w ustalonej odległości od soczewki. Elastyczna soczewka oka dopasowuje swój promień krzywizny, aby utworzyć na siatkówce obrazy przedmiotów znajdujących się w różnych odległościach. Środek obrazu przypada na część siatkówki, tzw. **plamkę żółtą** (ang. **fovea**), w której znajduje się największe zagęszczenie receptorów światła i największa ostrość wzrokowa. Źrenica regulująca ilość światła wpadającego do oka, w połączeniu z adaptacją chemiczną siatkówki, pozwala widzieć światło o natężeniu od najsłabiej widzialnego do 10^{10} razy większego (bez uszkodzenia oka). Jest to nadzwyczajnie duży zakres detekcji. Proces przetwarzania wzrokowych impulsów nerwowych rozpoczyna się w siatkówce i jest kontynuowany w mózgu. Nerw wzrokowy przekazuje sygnały przyjęte przez oko do mózgu.



Rysunek 2.29 Rogówka i soczewka oka współdziałają w tworzeniu rzeczywistego obrazu na światłoczułej siatkówce, która ma największe zagęszczenie receptorów w obszarze plamki żółtej, a w pobliżu nerwu wzrokowego znajduje się obszar plamki ślepej. Promień krzywizny soczewki oka zmienia się w taki sposób, aby utworzyć ostry obraz na siatkówce oka dla różnych odległości przedmiotu.

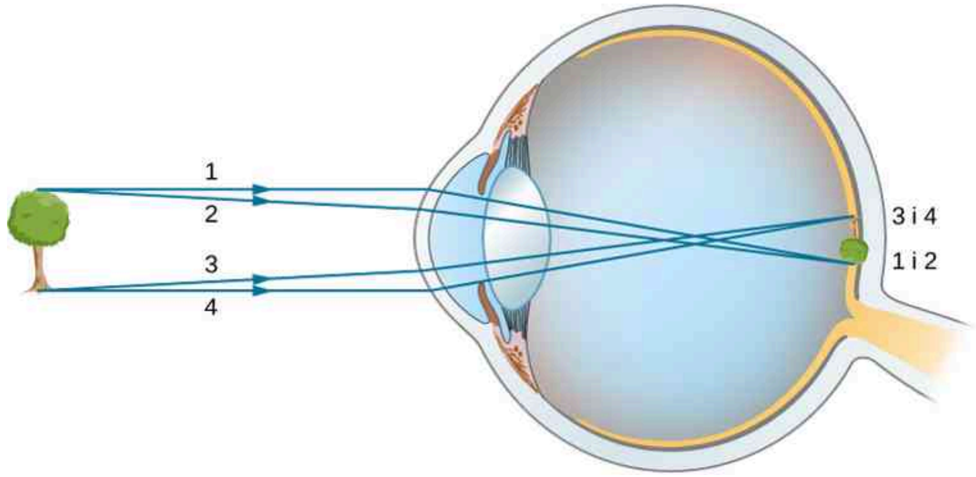
Współczynniki załamania światła poszczególnych tkanek oka są bardzo istotne dla jego zdolności tworzenia obrazów. W Tabeli 2.1 podano współczynniki załamania światła dla głównych elementów oka. Największa zmiana tego współczynnika występuje na powierzchni pomiędzy powietrzem a rogówką, gdzie promienie światła załamują się najbardziej. Schemat promieni na Rysunku 2.30 przedstawia model tworzenia obrazu przez rogówkę i soczewkę oka. Rogówka jest soczewką skupiającą o ogniskowej około $2,3 \text{ cm}$ i powoduje największe skupienie promieni światła w oku. Soczewka oka jest soczewką skupiającą o ogniskowej około $6,4 \text{ cm}$ i zapewnia precyzyjne skupienie promieni światła, niezbędne do utworzenia wyraźnego obrazu na siatkówce. Rogówka i soczewka mogą być traktowane jak pojedyncza cienka soczewka, mimo że promienie światła przechodzą przez kilka warstw tkanek o różnych współczynnikach załamania, zmieniających ich kierunek na każdej powierzchni granicznej. Obraz, jaki powstaje w oku, jest podobny do obrazu utworzonego przez pojedynczą soczewkę skupiającą, tzn. jest rzeczywisty i odwrócony. Mózg, przetwarzając sygnały optyczne powstające w oku, ponownie odwraca obraz, aby uzyskać obraz prosty.

Materiał	Współczynnik załamania światła
Woda	1,33
Powietrze	1
Rogówka	1,38

Tabela 2.1 Współczynniki załamania światła istotne dla oka.

Materiał	Współczynnik załamania światła
Ciecz wodnista	1,34
Soczewka oka	1,41 [1]
Ciało szkliste	1,34

Tabela 2.1 Współczynniki załamania światła istotne dla oka.



Rysunek 2.30 W ludzkim oku obraz tworzy się na siatkówce. Promienie wierzchołka i podstawy przedmiotu pokazują, że na siatkówce powstaje obraz rzeczywisty i odwrócony. Odległość przedmiotu od oka nie jest w rzeczywistej skali.

Jak widać, obraz musi padać dokładnie na siatkówkę, aby był wyraźny, co oznacza, że odległość obrazu d_o musi być równa odległości soczewki od siatkówki. Odległość soczewki od siatkówki nie zmienia się, więc odległość obrazu d_o jest taka sama dla przedmiotów znajdujących się w każdej odległości od oka. Mięśnie rzęskowe oka dostosowują kształt soczewki, ogniskując obraz bliskich lub odległych przedmiotów. Zmiana kształtu soczewki oznacza zmianę jej ogniskowej. Ten mechanizm oka nazywa się **akomodacją** (ang. **accommodation**).

Najmniejsza odległość przedmiotu, dla której oko jest w stanie wytworzyć jego ostry obraz na siatkówce, jest nazywana **punktem bliży** (ang. **near point**). Analogicznie, **punkt dali** (ang. **far point**) to największa odległość przedmiotu, dla której oko tworzy jego ostry obraz na siatkówce. Osoba ze zdrowym wzrokiem może widzieć wyraźnie przedmioty znajdujące się w odległości od 25 cm do nieskończoności. Punkt bliży oddala się z wiekiem i może osiągać nawet kilka metrów u niektórych starszych osób. W tym podręczniku przyjmiemy, że punkt bliży znajduje się w odległości 25 cm od oka.

Aby ilościowo określić tworzenie obrazu przez oko, zastosujemy równanie cienkiej soczewki. Na początku ustalimy **zdolność skupiającą** (ang. **optical power**) soczewki oka

$$Z = \frac{1}{f}, \tag{2.23}$$

gdzie ogniskowa f jest podana w metrach. Jednostką zdolności skupiającej jest dioptria (D), przy czym $1\text{ D} = 1 / \text{m} = 1\text{ m}^{-1}$. Optycy opisują okulary korekcyjne lub szkła kontaktowe właśnie w **dioptriach** (ang. **diopter**). Używając definicji zdolności skupiającej, można napisać równanie cienkiej soczewki w postaci

$$Z = \frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_o}. \tag{2.24}$$

1. Jest to wartość średnia. Rzeczywisty współczynnik załamania światła w soczewce zmienia się i ma największą wartość w jej środku.

Stosowanie pojęcia zdolności skupiającej jest wygodne, ponieważ dla dwóch lub więcej soczewek znajdujących się blisko siebie efektywna zdolność skupiająca układu jest zbliżona do sumy zdolności skupiającej pojedynczych soczewek

$$Z_{\text{łączna}} = Z_{\text{soczewki 1}} + Z_{\text{soczewki 2}} + Z_{\text{soczewki 3}} + \ldots \tag{2.25}$$

Przykład 2.6

Efektywna ogniskowa oka

Rogówka i soczewka oka mają ogniskowe o długości 2,3 cm i 6,4 cm. Oblicz długość ogniskowej i zdolność skupiającą oka.

Strategia rozwiązania

Zdolności skupiające położonych blisko siebie soczewek sumują się, a więc

$$Z_{\text{oka}} = Z_{\text{rogówki}} + Z_{\text{soczewki}}.$$

Rozwiązanie

Stosując równania na zdolność skupiającą dla ogniskowych, otrzymujemy

$$\frac{1}{f_{\text{oka}}} = \frac{1}{f_{\text{rogówki}}} + \frac{1}{f_{\text{soczewki}}} = \frac{1}{2{,}3\,\text{cm}} + \frac{1}{6{,}4\,\text{cm}}.$$

Ogniskowa oka (rogówki i soczewki łącznie) wynosi zatem

$$f_{\text{oka}} = 1{,}69\,\text{cm},$$

a zdolność skupiająca oka

$$Z_{\text{oka}} = \frac{1}{f_{\text{oka}}} = \frac{1}{0{,}0169\,\text{m}} = 59\,\text{D}.$$

Żeby dało się widzieć wyraźnie, odległość obrazu d_o musi być równa odległości od soczewki do siatkówki. Dla zdrowego oka zakres wyraźnego widzenia dotyczy obiektów znajdujących się w odległościach d_p od 25 cm do nieskończoności. Następny przykład pokazuje, jak obliczać odległość obrazu dla obiektu położonego w punkcie bliży oka.

Przykład 2.7

Obraz przedmiotu znajdującego się w punkcie bliży oka

Ogniskowa ludzkiego oka wynosi 1,7 cm. Przedmiot znajduje się w punkcie bliży oka. Jak daleko za soczewką powstaje obraz?

Strategia rozwiązania

Punkt bliży oka znajduje się w odległości 25 cm od oka, a więc odległość do przedmiotu od soczewki wynosi $d_p = 25\,\text{cm}$. Wyznaczamy odległość obrazu, korzystając z równania cienkiej soczewki

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d_p}.$$

Rozwiązanie

$$d_o = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_p}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{1{,}7\,\text{cm}} - \frac{1}{25\,\text{cm}}\right)^{-1} = 1{,}8\,\text{cm}.$$

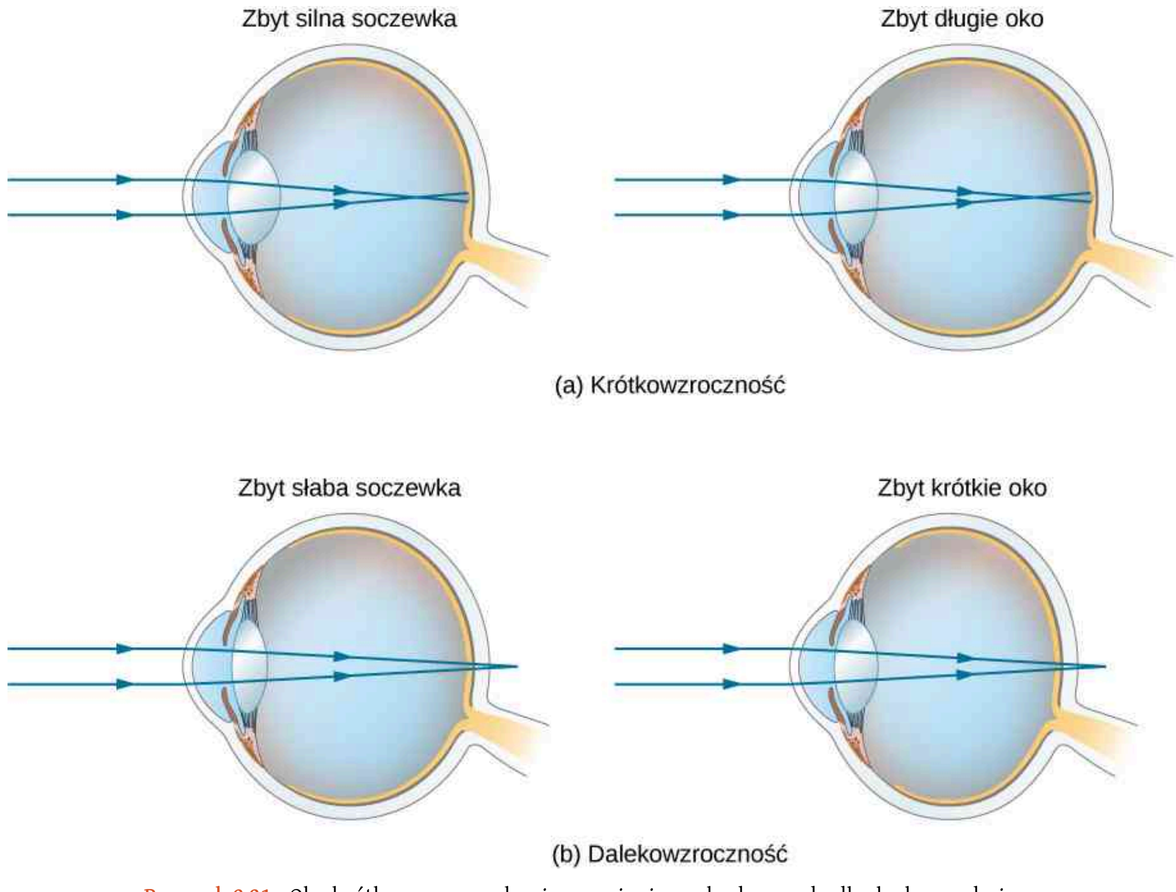
Z powyższego przykładu wynika, że obraz tworzy się w odległości $1{,}8\ \text{cm}$ za soczewką.

Znaczenie

Ze wzoru na powiększenie wiemy, że $p = -1{,}8\,\text{cm} \,/\, 25\,\text{cm} = -0{,}073$. Ponieważ $p < 0$, obraz jest odwrócony względem przedmiotu. Wartość p świadczy o tym, że obraz jest dużo mniejszy niż przedmiot; faktycznie obraz to tylko 7% wielkości przedmiotu.

Korekcja wzroku

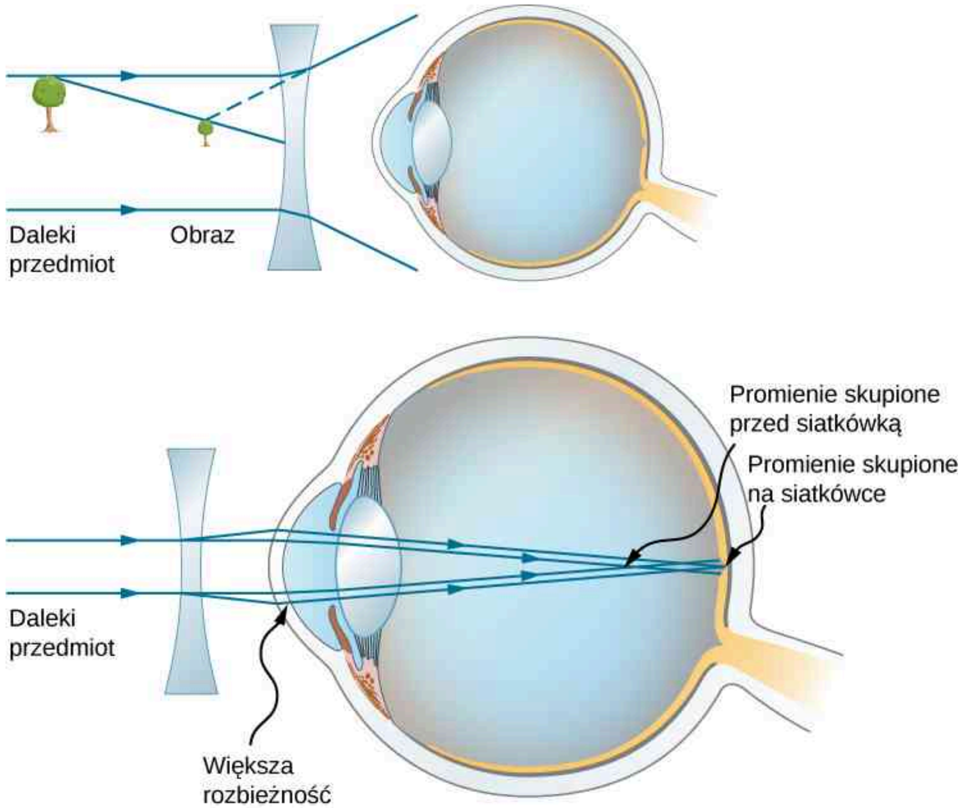
Potrzeba różnego rodzaju korekcji wzroku jest powszechna. Typowe wady wzroku łatwo wyjaśnić w oparciu o zasady optyki geometrycznej i niektóre z nich można łatwo skorygować. Rysunek 2.31 przedstawia dwie najczęstsze wady wzroku. **Krótkowzroczność** (ang. **nearsightedness**, **myopia**) jest wadą polegającą na wyraźnym widzeniu przedmiotów znajdujących się blisko oka, przedmioty znajdujące się dalej są widziane nieostro. Oko krótkowzroczne silniej skupia równoległe promienie światła pochodzące od odległego przedmiotu, skutkiem czego promienie te skupiają się przed siatkówką. Bardziej zbieżne promienie pochodzące od bliskiego przedmiotu skupiają się na siatkówce, dając wyraźny obraz. Odległość najdalszego przedmiotu widzianego wyraźnie nazywana jest punktem dali oka (dla zdrowego oka punkt dali jest w nieskończoności). **Dalekowzroczność** (ang. **farsightedness**) lub inaczej **nadwzroczność** (ang. **hyperopia**) jest wadą polegającą na wyraźnym widzeniu przedmiotów znajdujących się w dużej odległości od oka, przedmioty znajdujące się blisko widziane są nieostro. Oko dalekowzroczne niewystarczająco skupia promienie pochodzące od bliskich przedmiotów, skutkiem czego promienie te skupiają się za siatkówką.



Rysunek 2.31 Oko krótkowzroczne skupia promienie pochodzące od odległych przedmiotów przed siatkówką, a więc kiedy padają one na siatkówkę, są rozbieżne i tworzą rozmazany obraz. Krótkowzroczność jest wynikiem zbyt dużej zdolności skupiającej soczewki oka lub zbyt długiego oka. (b) Oko nadwzroczne skupia promienie pochodzące od bliskich przedmiotów za siatkówką, a obraz powstający na siatkówce jest rozmazany. Nadwzroczność jest wynikiem niewystarczającej zdolności skupiającej soczewki oka lub zbyt krótkiego oka.

Ponieważ oko krótkowzroczne zbyt mocno skupia promienie światła, korekcja krótkowzroczności polega na zasto-

sowaniu w okularach soczewek rozpraszających, jak pokazano na Rysunku 2.32. Soczewka rozpraszająca powoduje rozbieganie się promieni, co kompensuje nadmierną zdolność skupiającą soczewki oka. Obraz utworzony przez korekcyjną soczewkę rozpraszającą służy jako przedmiot dla oka. Ponieważ oko krótkowzroczne nie może skupiać się na przedmiotach znajdujących się poza jego punktem dali, korekcyjna soczewka rozpraszająca musi tworzyć obrazy przedmiotów znajdujących się w odległości mniejszej niż punkt dali oka.



Rysunek 2.32 Korekcja krótkowzroczności wymaga zastosowania soczewki rozpraszającej, która kompensuje zbyt silne skupienie promieni przez oko. Soczewka rozpraszająca tworzy obraz w odległości mniejszej od oka niż odległość, w jakiej znajduje się przedmiot. Ten obraz staje się przedmiotem dla oka, a osoba krótkowzroczna może widzieć go wyraźnie, ponieważ znajduje się on bliżej oka niż punkt dali.

Przykład 2.8

Korekcja krótkowzroczności

Ile wynosi zdolność skupiająca soczewek okularów, które korygują wzrok osoby krótkowzrocznej, jeśli jej punkt dali wynosi 30 cm? Przyjmij, że soczewki korygujące znajdują się w odległości $1{,}5\text{ cm}$ od oka.

Strategia rozwiązania

Chcemy, aby osoba krótkowzroczna widziała odległe obrazy wyraźnie, co znaczy, że dla przedmiotów znajdujących się w nieskończoności soczewka korekcyjna musi tworzyć obraz w odległości 30 cm od oka. Obraz odległy o 30 cm od oka będzie w odległości $30\text{ cm} - 1{,}5\text{ cm} = 28{,}5\text{ cm}$ od soczewki korekcyjnej, czyli $d_o = -28{,}5\text{ cm}$ dla $d_p \longrightarrow \infty$. Odległość obrazu jest ujemna, ponieważ obraz znajduje się po tej samej stronie soczewki co przedmiot.

Rozwiązanie

Ponieważ wartości d_o i d_p są znane, możemy obliczyć zdolność skupiającą soczewek okularów, korzystając z Równania 2.24

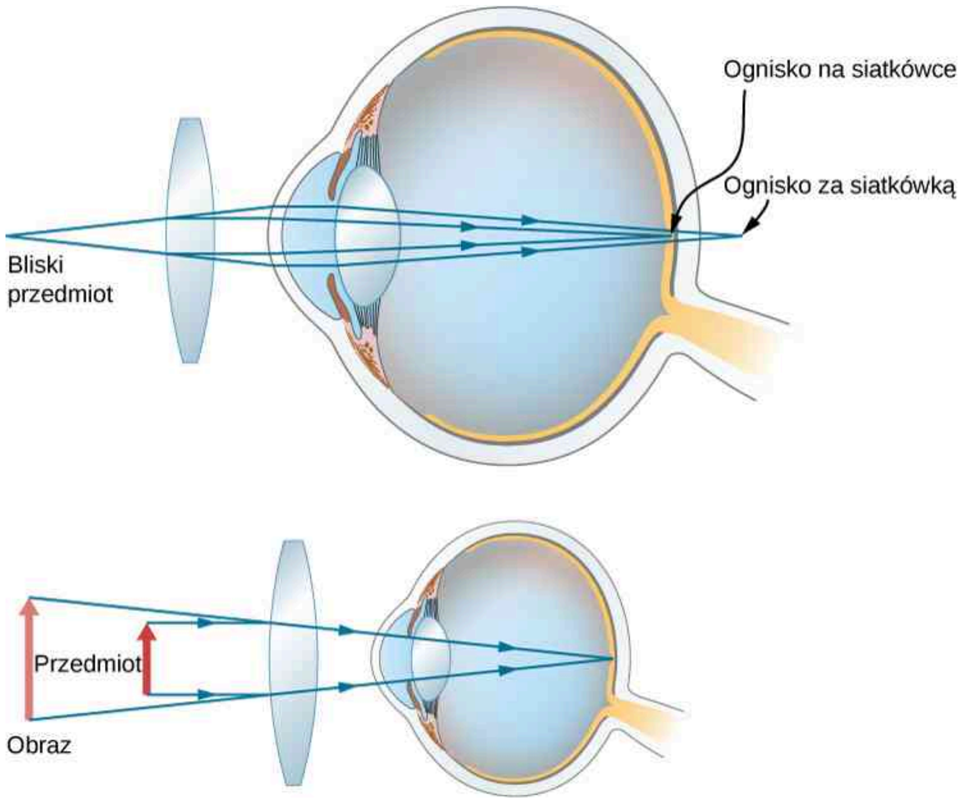
$$Z = \frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_o} = \left[\frac{1}{\infty}\right] + \frac{1}{-0{,}285\text{ cm}} = -3{,}51\text{ D}.$$

Znaczenie

Ujemna zdolność skupiająca oznacza, że soczewka jest rozpraszająca (wklęsła). Soczewki okularów korekcyjnych dla osób krótkowzrocznych są najcieńsze w środku, a ich zdolność skupiająca jest ujemna (podawana w dioptriach ze znakiem minus).

Korekcja nadwzroczności polega na zastosowaniu korekcyjnych soczewek skupiających, jak pokazano na Rysunku 2.33.

Takie soczewki tworzą obraz rzeczywistych przedmiotów, które znajdują się w odległości mniejszej niż punkt bliży oka, w odległości pomiędzy punktem bliży a punktem dali. Aby określić zdolność skupiającą korekcyjnych soczewek skupiających, musimy znać odległość punktu bliży, jak wyjaśniono w Przykładzie 2.9.



Rysunek 2.33 Korekcja nadwzroczności za pomocą soczewki skupiającej, która kompensuje niewystarczające skupienie promieni przez soczewkę oka. Soczewka skupiająca tworzy obraz w odległości większej od oka niż ta, w jakiej znajduje się przedmiot, aby osoba nadwzroczna mogła widzieć go wyraźnie.

Przykład 2.9

Korekcja nadwzroczności

Jaka powinna być zdolność skupiająca soczewek okularów, aby osoba dalekowzroczna, dla której punkt bliży wynosi $1\,\mathrm{m}$, mogła widzieć wyraźnie obraz znajdujący się $25\,\mathrm{cm}$ od oka? Przyjmujemy, że soczewka korekcyjna znajduje się w odległości $1{,}5\,\mathrm{cm}$ od oka.

Strategia rozwiązania

Kiedy przedmiot znajduje się w odległości $25\,\mathrm{cm}$ od oka, soczewka okularów korekcyjnych musi tworzyć jego obraz w odległości $1\,\mathrm{m}$ (w punkcie bliży), aby osoba dalekowzroczna mogła widzieć go wyraźnie. Obraz będący 1 m od oka jest w odległości $100\,\mathrm{cm} - 1{,}5\,\mathrm{cm} = 98{,}5\,\mathrm{cm}$ od soczewek okularów, ponieważ znajdują się one w odległości $1{,}5\,\mathrm{cm}$ od oka. Zatem $d_{\mathrm{o}} = -98{,}5\,\mathrm{cm}$. Znak minus oznacza, że obraz znajduje się po tej samej stronie soczewki co przedmiot. Przedmiot znajduje się w odległości $25\,\mathrm{cm} - 1{,}5\,\mathrm{cm} = 23{,}5\,\mathrm{cm}$ od soczewek okularów, a więc $d_{\mathrm{p}} = 23{,}5\,\mathrm{cm}$.

Rozwiązanie

Ponieważ d_o i d_p są znane, możemy obliczyć zdolność skupiającą soczewek okularów, korzystając z Równania 2.24

$$Z = \frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{0{,}235\,\mathrm{m}} + \frac{1}{-0{,}985\,\mathrm{m}} = +3{,}24\,\mathrm{D}.$$

Znaczenie

Dodatnia zdolność skupiająca świadczy o tym, że mamy do czynienia z soczewką skupiającą (wypukłą). Soczewki okularów osób nadwzrocznych są najgrubsze w środku, a ich zdolność skupiająca jest dodatnia (podawana w dioptriach z plusem).

2.6 | Aparat fotograficzny

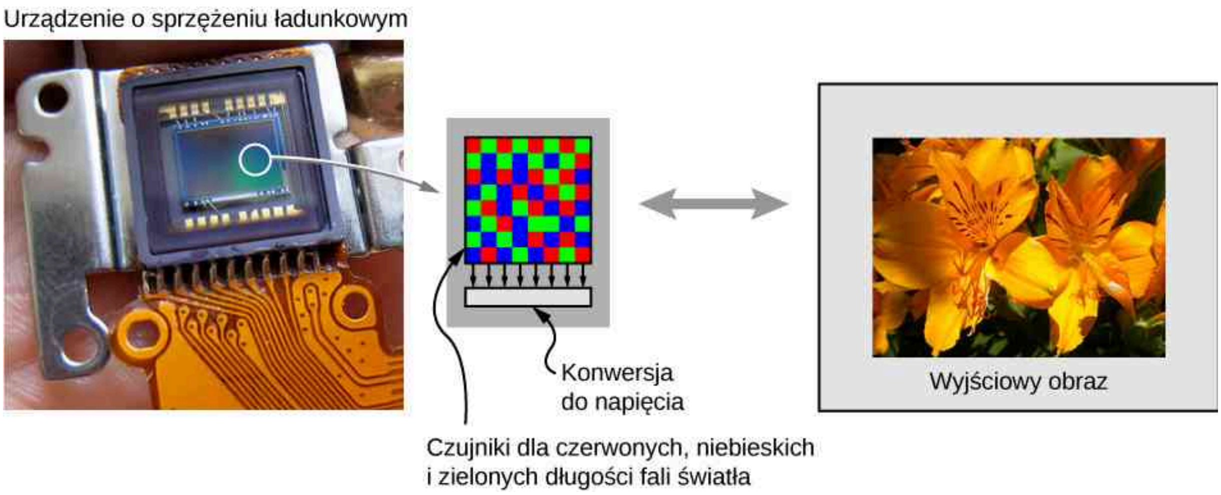
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać optykę aparatu fotograficznego;
- charakteryzować obraz tworzony przez aparat fotograficzny.

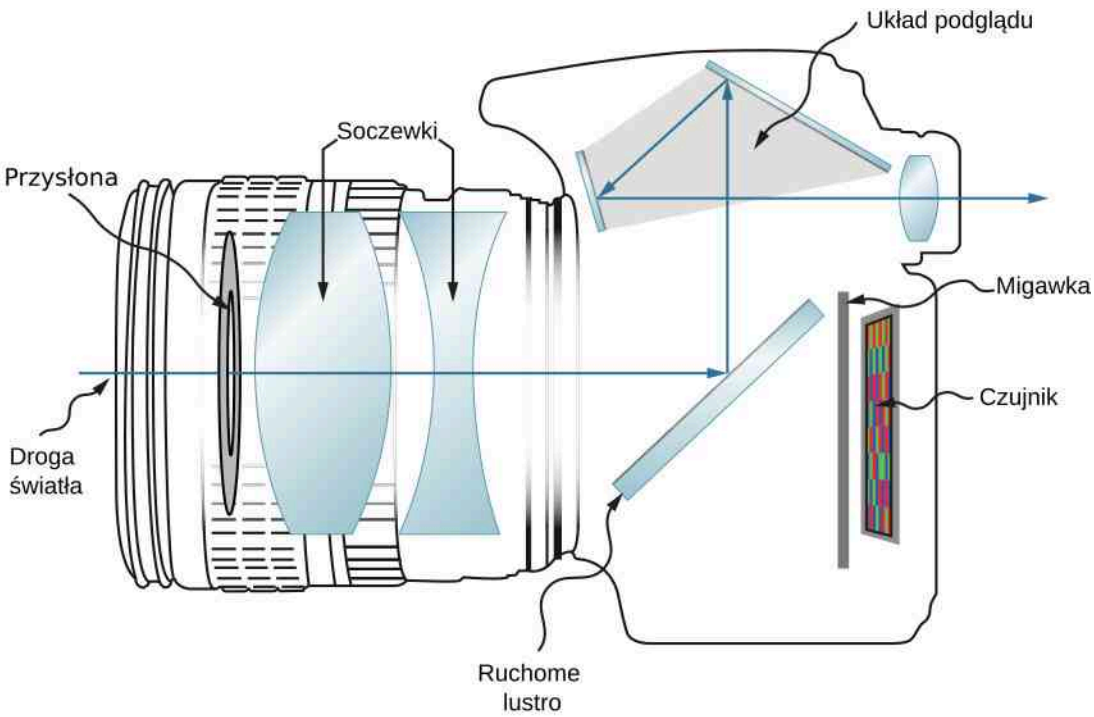
Aparaty fotograficzne (ang. **camera**) są powszechnie używane na co dzień. W latach 1825–1827 francuski wynalazca **Joseph Niépce (1765–1833)** z powodzeniem utrwalał obrazy przy użyciu swojego prymitywnego aparatu. Od tamtej pory w dziedzinie aparatów fotograficznych i detektorów wykorzystujących zapis fotograficzny dokonał się ogromny postęp.

Początkowo fotografie były utrwalane przy wykorzystaniu reakcji światłoczułych związków srebra, takich jak chlorek srebra lub bromek srebra. Papier fotograficzny zawierający związki srebra był używany powszechnie do czasu pojawienia się fotografii cyfrowej w latach 80. XX wieku, bazującej na detekcji obrazów przez tzw. **matrycę CCD** (ang. **charge-coupled device**). CCD to układ światłoczułych elementów półprzewodnikowych, tzw. pikseli. Każdy **piksel** (ang. **pixel**) reaguje wyłącznie na intensywność światła, lecz zastosowanie filtrów barwnych (w kolorach podstawowych: czerwonym, zielonym i niebieskim) umożliwia otrzymanie kolorowych obrazów cyfrowych (Rysunek 2.34). Przy najwyższej rozdzielczości jeden piksel matrycy CCD odpowiada jednemu pikselowi obrazu. Niekiedy, aby zmniejszyć rozmiar pliku, grupuje się kilka pikseli CCD w jeden piksel obrazu; otrzymany obraz ma mniejszą rozdzielczość i występuje w nim zjawisko pikselizacji.



Rysunek 2.34 Matryca CCD zamienia sygnały świetlne na sygnały elektryczne, jak również służy do elektronicznego przetwarzania i przechowywania obrazów. To urządzenie jest podstawowym elementem wszystkich aparatów i kamer cyfrowych, od tych wykorzystywanych w telefonach komórkowych aż po profesjonalne kamery filmowe i detektory satelitarne. Źródło: modyfikacja pracy Bruce'a Turnera

Oczywiście elektronika stanowi kluczową część aparatu cyfrowego, jednakże fizyczną podstawą działania każdego aparatu fotograficznego jest optyka. W praktyce układ optyczny aparatu fotograficznego można potraktować jak pojedynczą soczewkę z przedmiotem znajdującym się w odległości znacznie większej niż ogniskowa soczewki (Rysunek 2.35).



Rysunek 2.35 Nowoczesne aparaty cyfrowe są wyposażone w układ kilku soczewek pozwalający tworzyć wyraźne obrazy z minimalną aberracją. Kolorowy obraz jest uzyskiwany dzięki wykorzystaniu czerwonych, niebieskich i zielonych filtrów na matrycy CCD.

Na przykład aparat fotograficzny w smartfonie standardowo wyposażony jest w nieruchomą, szerokokątną soczewkę o ogniskowej około $4\text{ mm} - 5\text{ mm}$. Ta ogniskowa jest mniej więcej równa grubości telefonu. Obraz utworzony przez soczewkę jest skupiany na matrycy CCD zamontowanej po przeciwnej stronie telefonu. W telefonie komórkowym soczewka i matryca CCD nie mogą się przesuwać względem siebie. Jak w takim razie możliwe jest uzyskanie ostrych obrazów przedmiotów zarówno odległych, jak i bliskich?

Z poprzedniego rozdziału wiemy, że ludzkie oko może ostro widzieć zarówno odległe, jak i bliskie przedmioty dzięki zmianom ogniskowej. Aparat fotograficzny w telefonie komórkowym nie może tego zrobić, ponieważ odległość od soczewki do matrycy CCD jest stała. Kluczem jest właśnie mała ogniskowa aparatu. Załóżmy, że mamy aparat z ogniskową o długości 5 mm. Jaka powinna być odległość obrazu, abyśmy mogli sami zrobić sobie zdjęcie, tzw. selfie? Odległość przedmiotu dla takiego zdjęcia jest równa długości ręki, w której trzymamy telefon, czyli około 50 cm. Używając równania cienkiej soczewki, możemy zapisać

$$\frac{1}{5\text{ mm}} = \frac{1}{500\text{ mm}} + \frac{1}{d_o}.$$

Po przekształceniu otrzymujemy wyrażenie na odległość obrazu

$$\frac{1}{d_o} = \frac{1}{5\text{ mm}} - \frac{1}{500\text{ mm}}.$$

Zauważ, że odległość przedmiotu jest 100 razy większa niż ogniskowa. Widzimy ponadto, że wyrażenie $1 / 500\text{ mm}$ jest znacznie mniejsze niż $1 / 5\text{ mm}$, co oznacza, że odległość obrazu jest praktycznie równa ogniskowej aparatu. Z dokładnych obliczeń wynika, że odległość obrazu wynosi $d_o = 5{,}05\text{ mm}$, wartość ta jest prawie równa ogniskowej aparatu.

Rozważmy teraz przypadek odległego przedmiotu. Powiedzmy, że chcemy zrobić zdjęcie osoby stojącej około 5 m od nas. Korzystając z równania cienkiej soczewki, otrzymamy wartość odległości obrazu równą $5{,}005\text{ mm}$. Im dalej przedmiot znajduje się od soczewki, tym bliższa wartości ogniskowej jest odległość obrazu. W skrajnym przypadku nieskończenie odległego przedmiotu odległość obrazu jest dokładnie równa ogniskowej soczewki.

Jak widać, różnica pomiędzy odległością obrazu dla selfie i dla odległego przedmiotu jest równa około $0{,}05\ \text{mm}$, czyli około $50\ \mu\text{m}$. Nawet mała odległość przedmiotu – taka jak odległość, w jakiej trzymamy aparat – jest o dwa rzędy wielkości większa od ogniskowej soczewki, w wyniku czego różnice w odległości obrazu są znikome ($50\ \mu\text{m}$ to mniej niż grubość kartki papieru). Tak małe różnice nie mają większego wpływu na matrycę leżącą równo w odległości ogniskowej od soczewki. Dodatkowo jakość obrazu można zmienić, wykorzystując oprogramowanie aparatu.

W tradycyjnych aparatach fotograficznych zazwyczaj stosuje się ruchome soczewki, aby móc zmieniać odległość soczewki od obrazu (regulacja ostrości w obiektywie). Skomplikowane układy soczewek w drogich **lustrzankach** (ang. **mirror reflex camera**) oraz w obiektywach o **zmiennej ogniskowej** (ang. **zoom**) pozwalają na otrzymanie wspaniałej jakości obrazów fotograficznych. Opis optyki tych aparatów wykracza jednak poza zakres tego podręcznika.

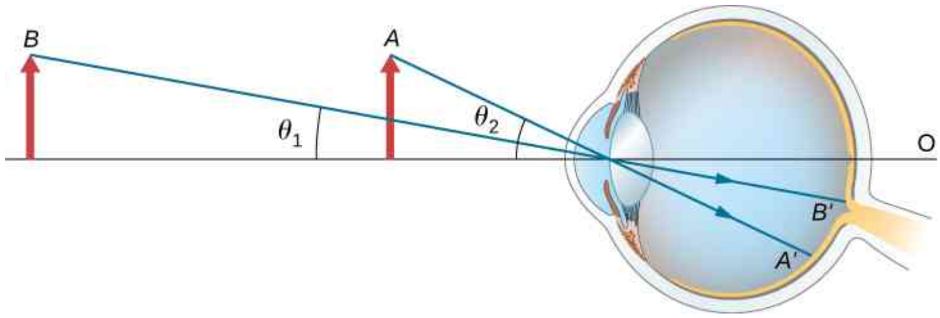
2.7 | Proste przyrządy powiększające

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

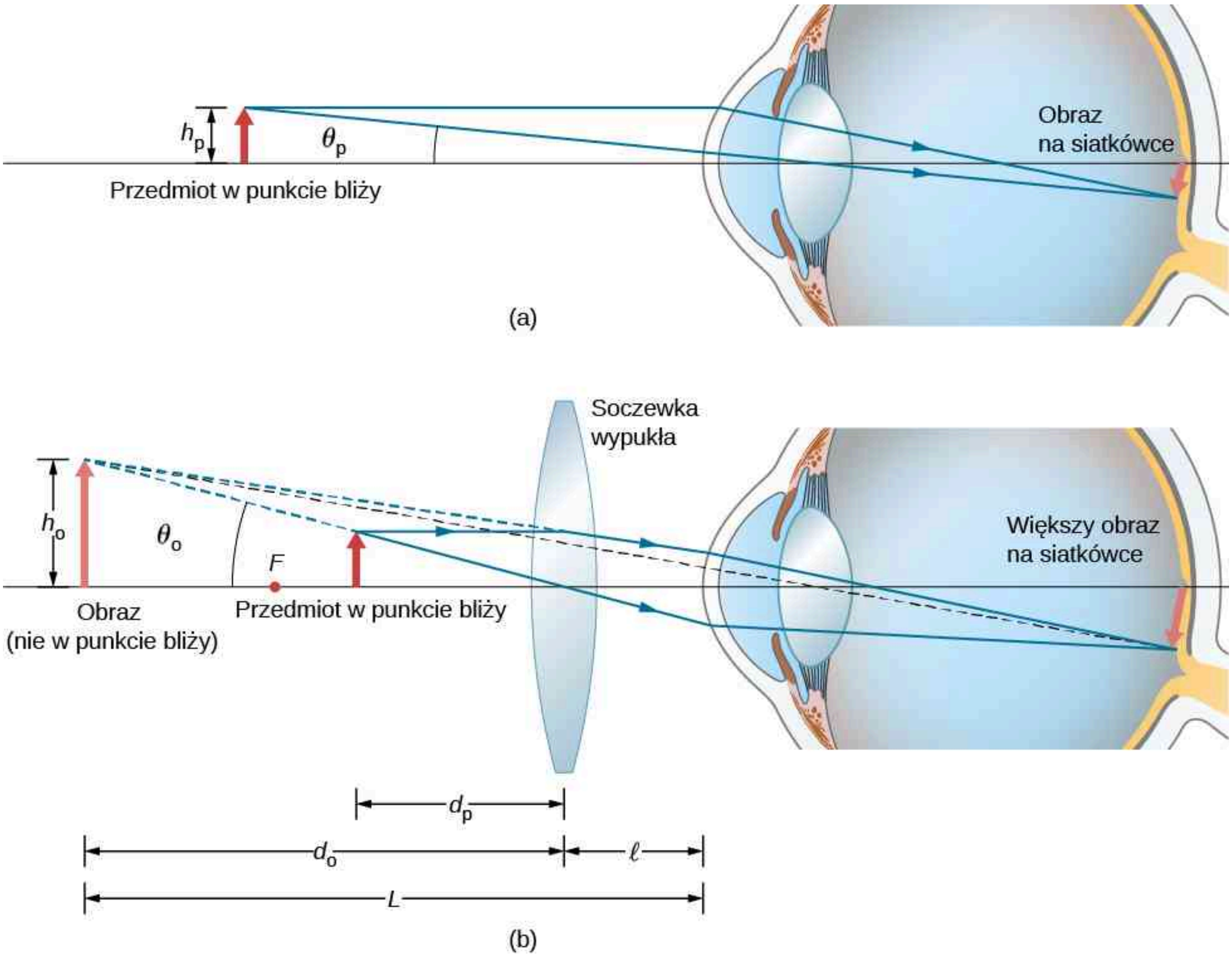
- rozumieć optykę prostych przyrządów powiększających;
- charakteryzować obrazy tworzone przez proste przyrządy powiększające.

Wielkość przedmiotu oglądanego ludzkim okiem zależy od jego wielkości kątowej. Jak pokazano na Rysunku 2.36, wielkość kątowa przedmiotu jest większa w położeniu A niż w położeniu B. Z tego wynika, że przedmiot znajdujący się w punkcie A tworzy większy obraz na siatkówce oka (OA'), niż gdy jest w punkcie B (OB'). Oznacza to, że przedmioty o większych rozmiarach kątowych widzimy jako większe, ponieważ tworzą one większe obrazy na siatkówce oka.



Rysunek 2.36 Postrzegany rozmiar przedmiotu zależy od jego wielkości kątowej. Gdy przedmiot znajduje się w punkcie A, na siatkówce oka powstaje większy obraz niż wówczas, gdy ten sam przedmiot znajduje się w punkcie B (porównaj wysokości obrazów OA' i OB').

Wiemy, że gdy odległość przedmiotu od soczewki wypukłej jest mniejsza niż ogniskowa, jego obraz jest pozorny, prosty i powiększony (patrz część (b) Rysunku 2.26). Z tego wynika, że gdy obraz utworzony przez soczewkę wypukłą służy jako przedmiot dla oka, jak pokazano na Rysunku 2.37, to obraz powstający na siatkówce jest większy niż przedmiot wyjściowy. Soczewkę wypukłą używaną w takiej sytuacji nazywa się **szkłem powiększającym** (ang. **magnifying glass**) lub **lupą** (ang. **simple magnifier**).



Rysunek 2.37 Lupa jest soczewką wypukłą używaną do tworzenia powiększonego obrazu przedmiotu na siatkówce oka. (a) Wielkość kątowa przedmiotu wynosi θ_p . (b) Przy zastosowaniu soczewki wypukłej obraz utworzony przez nią ma wielkość kątową θ_o , przy czym $\theta_o > \theta_p$. Oznacza to, że obraz powstający na siatkówce oka jest większy dzięki zastosowaniu soczewki wypukłej.

Aby obliczyć powiększenie lupy, porównamy wielkość kątową obrazu tworzonego przez soczewkę z wielkością kątową przedmiotu obserwowanego bez soczewki, jak pokazano na Rysunku 2.37. Przyjmujemy, że przedmiot znajduje się w punkcie bliży oka, ponieważ jest to odległość przedmiotu, dla której nieuzbrojone oko może utworzyć największy obraz danego przedmiotu na siatkówce. Porównamy powiększony obraz utworzony przez soczewkę z maksymalnym rozmiarem obrazu dla nieuzbrojonego oka. Powiększenie obrazu obserwowanego przez oko nazywa się **powiększeniem kątowym** p_k (ang. **angular magnification**), definiuje się je jako stosunek wielkości kątowej θ_o obrazu utworzonego przez soczewkę do wielkości kątowej θ_p przedmiotu widzianego przez nieuzbrojone oko

$$p_k = \frac{\theta_o}{\theta_p}. \tag{2.26}$$

Rozważmy sytuację pokazaną na Rysunku 2.37. Szkło powiększające znajduje się w odległości l od oka, a obraz utworzony przez szkło powiększające powstaje w odległości L od oka. Chcemy obliczyć powiększenie kątowe dla każdego możliwego l i L. W przybliżeniu małych kątów możemy przyjąć, że $\theta_o = h_o / L$. Z kolei w punkcie bliży $\theta_p = h_p / 25\ \text{cm}$. Powiększenie kątowe wynosi więc

$$p_k = \frac{\theta_o}{\theta_p} = \frac{h_o \cdot 25\ \text{cm}}{L h_p}. \tag{2.27}$$

Korzystając z Równania 2.9 dla powiększenia liniowego

$$p = -\frac{d_o}{d_p} = \frac{h_o}{h_p}$$

oraz równania cienkiej soczewki

$$\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{f},$$

otrzymujemy następujące wyrażenie opisujące powiększenie kątowe soczewki powiększającej

$$p_k = -\frac{d_o}{d_p} \cdot \frac{25\ \mathrm{cm}}{L} = -d_o \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{d_o}\right) \cdot \frac{25\ \mathrm{cm}}{L} = \left(1 - \frac{d_o}{f}\right) \cdot \frac{25\ \mathrm{cm}}{L}. \tag{2.28}$$

Na części (b) Rysunku 2.37 widzimy, że wartość bezwzględna odległości obrazu wynosi $|d_o| = L - l$. Zauważ, że $d_o < 0$, ponieważ obraz jest pozorny, a więc, pominąwszy wartość bezwzględną, otrzymujemy: $-d_o = L - l$. Podstawiwszy to wyrażenie do Równania 2.28, otrzymujemy ostateczną postać równania na powiększenie kątowe soczewki powiększającej

$$p_k = \frac{25\ \mathrm{cm}}{L} \cdot \left(1 + \frac{L - l}{f}\right). \tag{2.29}$$

Zwróć uwagę, że wszystkie wartości liczbowe w tym równaniu muszą być podawane w centymetrach. Często chcemy, aby obraz znajdował się w punkcie bliży oka ($L = 25\ \mathrm{cm}$) gwarantującym maksymalne powiększenie, i trzymamy soczewkę powiększającą blisko oka ($l = 0\ \mathrm{cm}$). W takim przypadku powyższe równanie upraszcza się do postaci

$$p_k = 1 + \frac{25\ \mathrm{cm}}{f}, \tag{2.30}$$

co oznacza, że największe powiększenie występuje dla soczewki z najkrótszą ogniskową. Dodatkowo, gdy obraz jest w punkcie bliży oka, a soczewka jest trzymana blisko oka ($l = 0\ \mathrm{cm}$), to $L = d_o = 25\ \mathrm{cm}$, to wtedy Równanie 2.27 przekształca się do postaci

$$p_k = \frac{h_o}{h_p} = p, \tag{2.31}$$

gdzie p to powiększenie liniowe wyprowadzone dla zwierciadeł sferycznych i cienkich soczewek. Natomiast gdy obraz znajduje się w nieskończoności ($L \longrightarrow \infty$), Równanie 2.29 przyjmuje postać

$$p_{k_{L \longrightarrow \infty}} = \frac{25\ \mathrm{cm}}{f}. \tag{2.32}$$

Otrzymane powiększenie jest wyrażone przez stosunek odległości bliży oka do ogniskowej soczewki powiększającej. Z tego wynika, że soczewka o krótszej ogniskowej daje większe powiększenie. Mimo że to powiększenie jest mniejsze o 1 od powiększenia otrzymywanego przez obraz w punkcie bliży oka, to określa ono najbardziej komfortowe warunki widzenia, ponieważ mięśnie oka są rozluźnione, gdy patrzymy na odległe przedmioty.

Porównując ze sobą Równanie 2.29 oraz Równanie 2.32, widzimy, że zakres powiększenia kątowego danej soczewki skupiającej wynosi

$$\frac{25\ \mathrm{cm}}{f} \le p_k \le 1 + \frac{25\ \mathrm{cm}}{f}. \tag{2.33}$$

Przykład 2.10

Powiększanie diamentu

Jubiler chce obejrzeć diament o średnicy 3 mm za pomocą szkła powiększającego. Trzyma go w punkcie bliży oka (25 cm), a soczewkę powiększającą blisko oka.

a. Jaka powinna być ogniskowa szkła powiększającego, aby jubiler mógł widzieć obraz diamentu o średnicy 15 mm?
b. Jaka powinna być ogniskowa szkła powiększającego, aby otrzymać 10-krotne powiększenie?

Strategia rozwiązania

Musimy określić wymagane powiększenie szkła powiększającego. Ponieważ jubiler trzyma soczewkę powiększającą blisko oka, możemy użyć Równania 2.30, aby ustalić ogniskową.

Rozwiązanie

a. Wymagane powiększenie liniowe to stosunek oczekiwanej średnicy obrazu do prawdziwej średnicy diamentu (Równanie 2.32). Ponieważ jubiler trzyma szkło powiększające blisko oka, a obraz tworzy się w punkcie bliży oka, powiększenie liniowe jest takie samo jak kątowe, a więc

$$p_{\text{k}} = p = \frac{h_{\text{o}}}{h_{\text{p}}} = \frac{15\text{ mm}}{3\text{ mm}} = 5.$$

Ogniskowa f soczewki powiększającej może zostać obliczona przez rozwiązanie Równania 2.30 dla f

$$p_{\text{k}} = 1 + \frac{25\text{ cm}}{f},$$
$$f = \frac{25\text{ cm}}{p_{\text{k}} - 1} = \frac{25\text{ cm}}{5 - 1} = 6{,}3\text{ cm}.$$

b. Aby otrzymać obraz powiększony 10-krotnie, ponownie rozwiązujemy Równanie 2.30 dla f, ale tym razem podstawiamy $p_{\text{k}} = 10$. Otrzymujemy wówczas wynik

$$f = \frac{25\text{ cm}}{p_{\text{k}} - 1} = \frac{25\text{ cm}}{10 - 1} = 2{,}8\text{ cm}.$$

Znaczenie

Zwróć uwagę, że większe powiększenie daje soczewka o krótszej ogniskowej. Musimy więc używać soczewki o promieniu krzywizny mniejszym niż kilka centymetrów i trzymać ją bardzo blisko oka. Nie jest to zbyt wygodne. Mikroskopy optyczne, o których będzie mowa w następnym podrozdziale, okazały się dobrym rozwiązaniem w takich sytuacjach.

2.8 | Mikroskopy i teleskopy

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zasady działania mikroskopów i teleskopów;
- opisywać obrazy utworzone przez te układy oraz obliczać ich powiększenie.

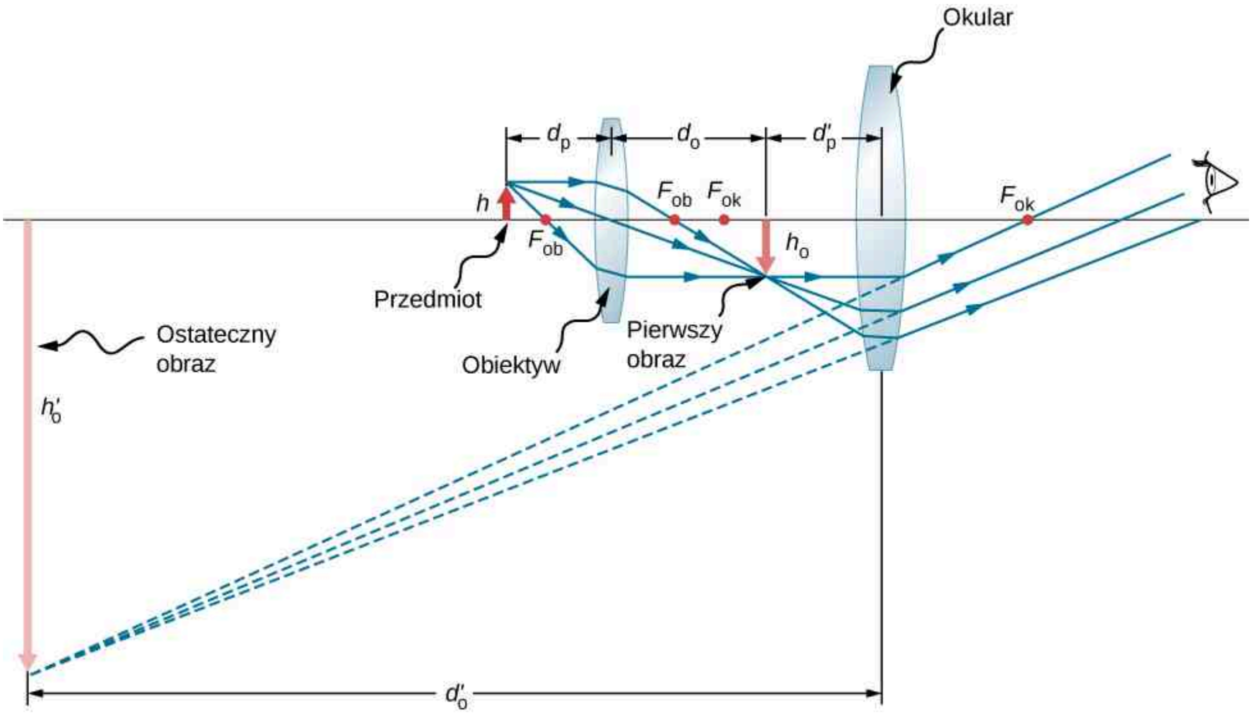
Mikroskopy i teleskopy to układy optyczne, które ogromnie przyczyniły się do naszego obecnego rozumienia świata w skalach mikro i makro. Wynalezienie tych urządzeń doprowadziło do licznych odkryć w dziedzinach takich jak fizyka, astronomia czy biologia. W tym podrozdziale opiszemy działanie tych układów na gruncie praw fizyki.

Mikroskopy

Mimo że oko ludzkie ma doskonałą zdolność widzenia przedmiotów zarówno wielkich, jak i małych, to nie radzi sobie z dostrzeganiem drobnych szczegółów. Pragnienie, by zobaczyć to, co nie jest widoczne gołym okiem, doprowadziło do wynalezienia powiększających przyrządów optycznych. Wiemy już, że pojedyncza soczewka wypukła może tworzyć powiększony obraz, ale przy pomocy takiej soczewki trudno jest uzyskać duże powiększenie. Powiększenie większe niż 5-krotne otrzymane przy pomocy pojedynczej soczewki wypukłej jest najczęściej związane ze zniekształceniem obrazu. Aby uzyskać jeszcze większe powiększenie, możemy dołożyć do zwykłej lupy jedną lub większą liczbę dodatkowych soczewek. W tym podrozdziale poznamy zasady działania mikroskopów – przyrządów, które pozwalają zobaczyć szczegóły niewidoczne gołym okiem.

Pierwsze mikroskopy skonstruowali na początku XVII wieku producenci okularów z Holandii i Danii. Najprostszy **mikroskop optyczny** (ang. **compound microscope**) składa się z dwóch soczewek wypukłych (Rysunek 2.38). **Obiektyw** (ang. **objective**) to soczewka wypukła o krótkiej ogniskowej (duża zdolność skupiająca), o typowym powiększeniu od 5 do 100 razy. **Okular** (ang. **eyepiece, ocular**) jest soczewką wypukłą o dłuższej ogniskowej.

Zadaniem mikroskopu jest utworzenie powiększonego obrazu małych przedmiotów, w czym biorą udział obie soczewki. Dodatkowo, powiększony obraz jest tworzony daleko od oka obserwatora, co jest istotne, ponieważ oko obserwatora nie może zogniskować się na przedmiotach lub obrazach znajdujących się zbyt blisko (tj. bliżej niż punkt bliży oka).



Rysunek 2.38 Mikroskop optyczny składa się z dwóch soczewek: obiektywu i okularu. Obiektyw tworzy pierwszy obraz, który jest większy niż przedmiot. Ten pierwszy obraz znajduje się w zasięgu ogniskowej okularu i jest przedmiotem dla jego soczewki. Okular tworzy ostateczny obraz, który jest dodatkowo powiększony.

Aby zrozumieć, jak mikroskop na Rysunku 2.38 tworzy obraz, przeanalizujmy po kolei działanie dwóch soczewek. Przedmiot znajduje się za ogniskiem obiektywu F_{ob}, jednak na tyle blisko, że odległość przedmiotu można przybliżyć ogniskową f^{ob} obiektywu, który tworzy odwrócony obraz rzeczywisty, powiększony względem przedmiotu. Ten pierwszy obraz jest przedmiotem dla drugiej soczewki, czyli okularu. Okular jest tak ustawiony, że pierwszy obraz jest w zasięgu jego ogniskowej f^{ok}, co sprawia, że okular może dalej powiększyć obraz. W pewnym sensie okular działa jak lupa, która powiększa pośredniej wielkości obraz utworzony przez obiektyw. Obraz utworzony przez okular jest powiększonym obrazem pozornym. Ostateczny obraz jest odwrócony, ale znajduje się dalej od oka obserwatora niż przedmiot, co ułatwia jego obserwację.

Oko obserwatora widzi utworzony przez okular obraz pozorny, który jest przedmiotem dla soczewki oka. Obraz pozorny utworzony przez okular znajduje się w odległości dużo większej niż ogniskowa soczewki oka, a więc oko tworzy obraz rzeczywisty na siatkówce.

Powiększenie mikroskopu jest iloczynem powiększenia liniowego obiektywu p^{ob} i powiększenia kątowego okularu p_k^{ok}. Powiększenia te można obliczyć z zależności

$$p^{\mathrm{ob}} = -\frac{d_\mathrm{o}^{\mathrm{ob}}}{d_\mathrm{p}^{\mathrm{ob}}} \approx -\frac{d_\mathrm{o}^{\mathrm{ob}}}{f^{\mathrm{ob}}} \quad \text{(powiększenie liniowe – obiektyw),}$$

$$p_\mathrm{k}^{\mathrm{ok}} = 1 + \frac{25\ \mathrm{cm}}{f^{\mathrm{ok}}} \quad \text{(powiększenie kątowe – okular),}$$

gdzie f^{ob} i f^{ok} to odpowiednio ogniskowe obiektywu i okularu. Zakładamy, że ostateczny obraz powstaje w punkcie bliży oka zapewniającym maksymalne powiększenie. Zauważ, że powiększenie kątowe okularu jest takie samo, jak otrzymane wcześniej powiększenie dla zwykłego szkła powiększającego. Nie powinno to być zaskakujące, ponieważ okular właściwie jest szkłem powiększającym i mają tu zastosowanie te same prawa fizyki. **Powiększenie całkowite** (ang. **net magnification**) $p_{\mathrm{cał}}$ mikroskopu optycznego jest iloczynem powiększenia liniowego obiektywu i kątowego okularu

$$p_{\mathrm{cał}} = p^{\mathrm{ob}} p_\mathrm{k}^{\mathrm{ok}} = -\frac{d_\mathrm{o}^{\mathrm{ok}}\left(f^{\mathrm{ok}} + 25\ \mathrm{cm}\right)}{f^{\mathrm{ob}} f^{\mathrm{ok}}}. \tag{2.34}$$

Przykład 2.11

Powiększenie mikroskopu

Oblicz powiększenie przedmiotu znajdującego się w odległości $6{,}2\ \mathrm{mm}$ od mikroskopu optycznego, którego ogniskowe obiektywu i okularu wynoszą odpowiednio $6\ \mathrm{mm}$ i $50\ \mathrm{mm}$. Obiektyw i okular są od siebie oddalone o $23\ \mathrm{cm}$.

Strategia rozwiązania

Ta sytuacja jest podobna do pokazanej na Rysunku 2.38. Żeby obliczyć całkowite powiększenie, musimy znać powiększenie liniowe obiektywu i kątowe okularu. Aby określić odległość obrazu $d_\mathrm{o}^{\mathrm{ob}}$ od obiektywu, korzystamy z Równania 2.34 oraz równania cienkiej soczewki.

Rozwiązanie

Przekształciwszy równania cienkiej soczewki dla $d_\mathrm{o}^{\mathrm{ob}}$, otrzymujemy

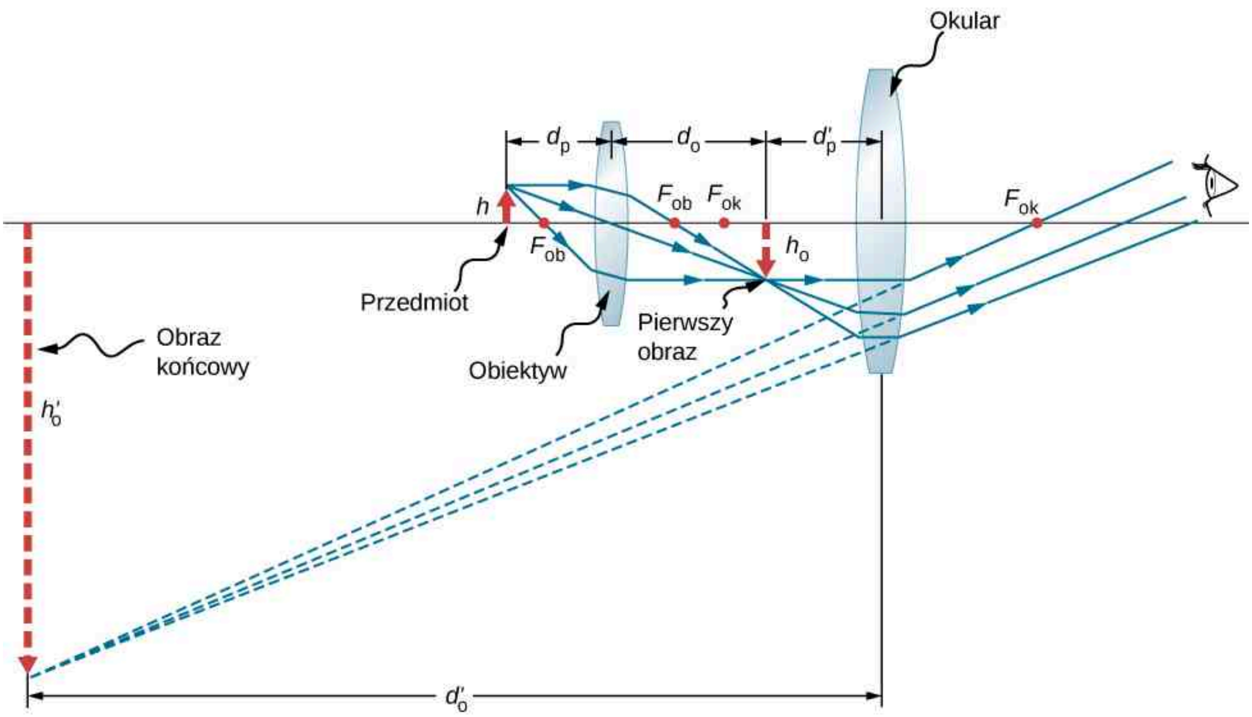
$$d_\mathrm{o}^{\mathrm{ob}} = \left(\frac{1}{f^{\mathrm{ob}}} - \frac{1}{d_\mathrm{p}^{\mathrm{ob}}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{6\ \mathrm{mm}} - \frac{1}{6{,}2\ \mathrm{mm}}\right)^{-1} = 186\,\mathrm{mm} = 18{,}6\,\mathrm{cm}\,.$$

Po podstawieniu tego wyniku oraz znanych wartości $f^{\mathrm{ob}} = 6{,}2\,\mathrm{mm} = 0{,}62\ \mathrm{cm}$ i $f^{\mathrm{ok}} = 50\,\mathrm{mm} = 5\ \mathrm{cm}$ do Równania 2.34 otrzymujemy

$$p_{\mathrm{cał}} = \frac{-d_\mathrm{o}^{\mathrm{ob}}\left(f^{\mathrm{ok}} + 25\,\mathrm{cm}\right)}{f^{\mathrm{ob}} f^{\mathrm{ok}}} = \frac{-18{,}6\,\mathrm{cm}\cdot(5\,\mathrm{cm} + 25\,\mathrm{cm})}{0{,}62\,\mathrm{cm}\cdot 5\,\mathrm{cm}} = -180.$$

Znaczenie

Zarówno obiektyw, jak i okular mają wkład w całkowite powiększenie, które jest duże i ujemne, co zgadza się z Rysunkiem 2.38, na którym obraz jest powiększony. Ponadto obraz jest pozorny i odwrócony, co nie jest możliwe do uzyskania przy zastosowaniu pojedynczego elementu optycznego (zob. Rysunek 2.26).



Rysunek 2.39 Mikroskop optyczny z obrazem utworzonym w nieskończoności.

Obliczmy teraz powiększenie mikroskopu dla przypadku, gdy obraz znajduje się w nieskończoności (Rysunek 2.39), w której to sytuacji oko najmniej się męczy. Powiększenie mikroskopu jest iloczynem powiększenia liniowego p^{ob} obiektywu i powiększenia kątowego p_{k}^{ok} okularu. Wiemy, że $p^{\text{ob}} = -d_{\text{o}}^{\text{ob}} \big/ d_{\text{p}}^{\text{ob}}$, a z równania soczewki otrzymujemy

$$p^{\text{ob}} = -\frac{d_{\text{o}}^{\text{ob}}}{d_{\text{p}}^{\text{ob}}} = 1 - \frac{d_{\text{o}}^{\text{ob}}}{f^{\text{ob}}} = \frac{f^{\text{ob}} - d_{\text{o}}^{\text{ob}}}{f^{\text{ob}}}. \tag{2.35}$$

Jeżeli obraz końcowy położony jest w nieskończoności, to – jak już wiemy – obraz utworzony przez obiektyw musi być położony w ognisku okularu. Można do tego dojść, podstawiając $d_{\text{o}} = \infty$ do równania cienkiej soczewki lub przypominając sobie, że promienie wpadające do soczewki przez ognisko wychodzą z niej jako promienie równoległe, a zatem przecinające się w nieskończoności. Dla wielu mikroskopów odległość pomiędzy ogniskiem obiektywu po stronie obrazu a ogniskiem okularu po stronie przedmiotu ustala się standardowo na $L = 16\,\text{cm}$. Odległość ta nazywana jest **długością tubusu** (ang. **tube length**) mikroskopu. Z Rysunku 2.39 wynika, że $L = f^{\text{ob}} - d_{\text{o}}^{\text{ob}}$. Podstawiając L do Równania 2.35, otrzymujemy

$$p^{\text{ob}} = \frac{L}{f^{\text{ob}}} = \frac{16\,\text{cm}}{f^{\text{ob}}}. \tag{2.36}$$

Teraz musimy obliczyć powiększenie kątowe okularu z obrazem w nieskończoności. Żeby to zrobić, bierzemy stosunek wielkości kątowej obrazu θ_{o} do wielkości kątowej przedmiotu θ_{p} wyznaczony w punkcie bliży oka (to najmniejsza odległość, z jakiej nieuzbrojone oko może oglądać przedmiot, zatem jego obraz na siatkówce jest w tym położeniu największy). Jeśli skorzystamy z Rysunku 2.39 i uwzględnimy przybliżenie małych kątów, otrzymujemy: $\theta_{\text{o}} \approx h_{\text{o}}^{\text{ob}} \big/ f^{\text{ok}}$ oraz $\theta_{\text{p}} \approx h_{\text{o}}^{\text{ob}} \big/ 25\,\text{cm}$, gdzie h_{o}^{ob} jest wysokością obrazu utworzonego przez obiektyw, będącego przedmiotem dla okularu. Z tego wynika, że powiększenie kątowe okularu wynosi

$$p_{\text{k}}^{\text{ok}} = \frac{\theta_{\text{o}}}{\theta_{\text{p}}} = \frac{h_{\text{o}}^{\text{ob}}}{f^{\text{ok}}} \cdot \frac{25\,\text{cm}}{h_{\text{o}}^{\text{ob}}} = \frac{25\,\text{cm}}{f^{\text{ok}}}. \tag{2.37}$$

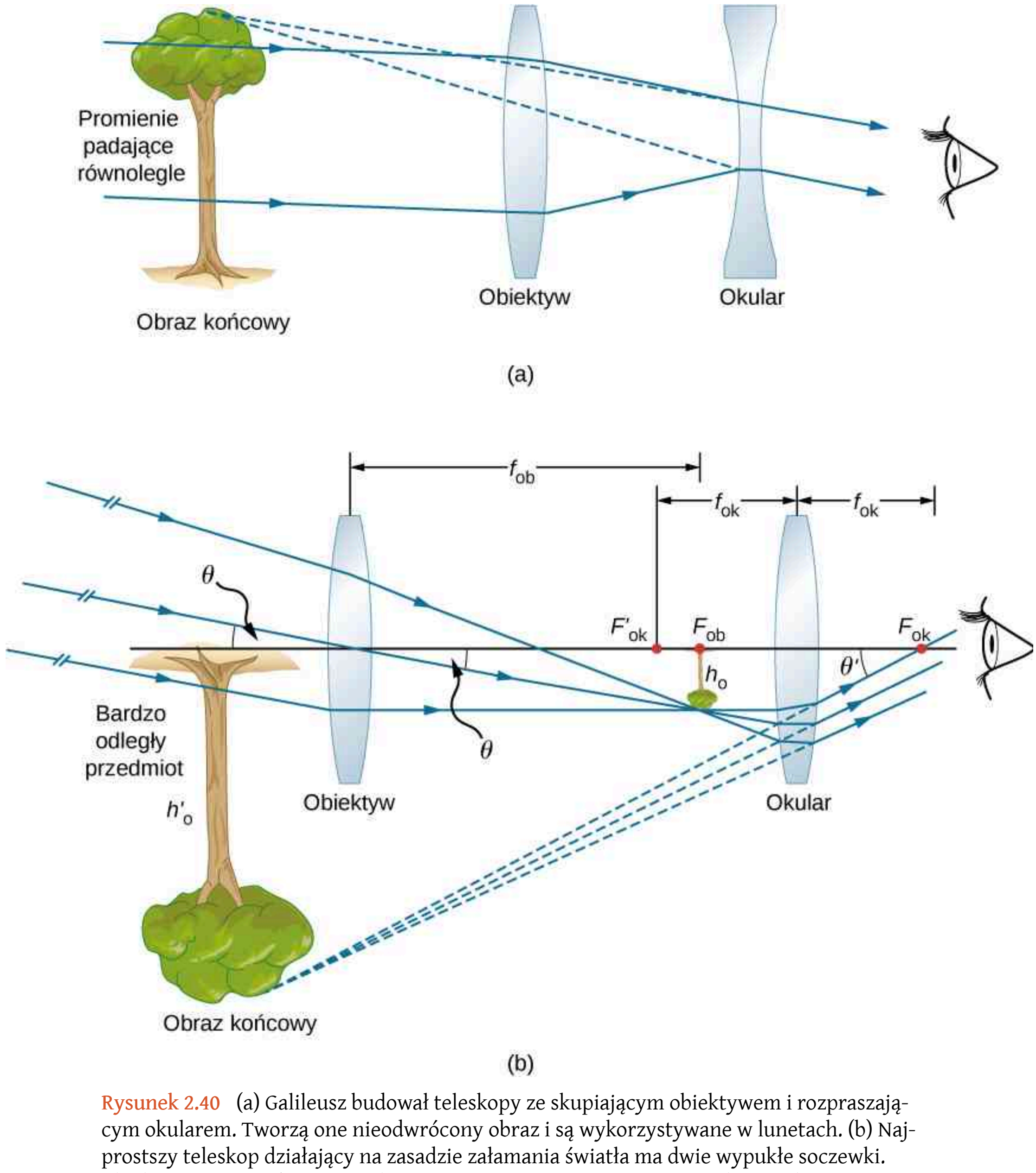
Powiększenie mikroskopu optycznego z obrazem w nieskończoności wynosi zatem

$$p_{\text{cał}} = p^{\text{ob}} p_{\text{k}}^{\text{ok}} = \frac{-16\,\text{cm} \cdot 25\,\text{cm}}{f^{\text{ob}} f^{\text{ok}}}. \tag{2.38}$$

Wartości ogniskowych muszą być podane w centymetrach. Znak minus oznacza, że obraz końcowy jest odwrócony. Zauważ, że jedynymi zmiennymi w równaniu są ogniskowe okularu i obiektywu, co sprawia, że równanie to jest szczególnie użyteczne.

Teleskopy

Teleskopy służą do obserwacji odległych przedmiotów i tworzą obraz, który jest większy niż obraz utworzony przez nieuzbrojone oko. Teleskopy zbierają dużo więcej światła niż oko, dzięki czemu umożliwiają obserwację ciemnych przedmiotów w większym powiększeniu i z lepszą rozdzielczością. Zostały one wynalezione około 1600 roku, a **Galileusz (1564–1642)** pierwszy zastosował je do badania nieba, co miało duże znaczenie dla rozwoju nauki. Za jego pomocą Galileusz obserwował księżyce Jowisza, kratery i góry na Księżycu czy szczegółową budowę plam słonecznych. Dzięki temu stwierdził, na przykład, że Droga Mleczna składa się z ogromnej liczby pojedynczych gwiazd.



Rysunek 2.40 (a) Galileusz budował teleskopy ze skupiającym obiektywem i rozpraszającym okularem. Tworzą one nieodwrócony obraz i są wykorzystywane w lunetach. (b) Najprostszy teleskop działający na zasadzie załamania światła ma dwie wypukłe soczewki. Obiektyw tworzy odwrócony obraz rzeczywisty w płaszczyźnie ogniskowej okularu. Ten obraz jest przedmiotem dla okularu. Okular tworzy obraz pozorny, odwrócony i powiększony.

Na Rysunku 2.40 (a) widzimy schemat **teleskopu refrakcyjnego** (ang. **refracting telescope**), potocznie nazywanego **refraktorem** (ang. **refractor**), zbudowanego z dwóch soczewek. Pierwsza z nich (obiektyw) tworzy obraz rzeczywisty

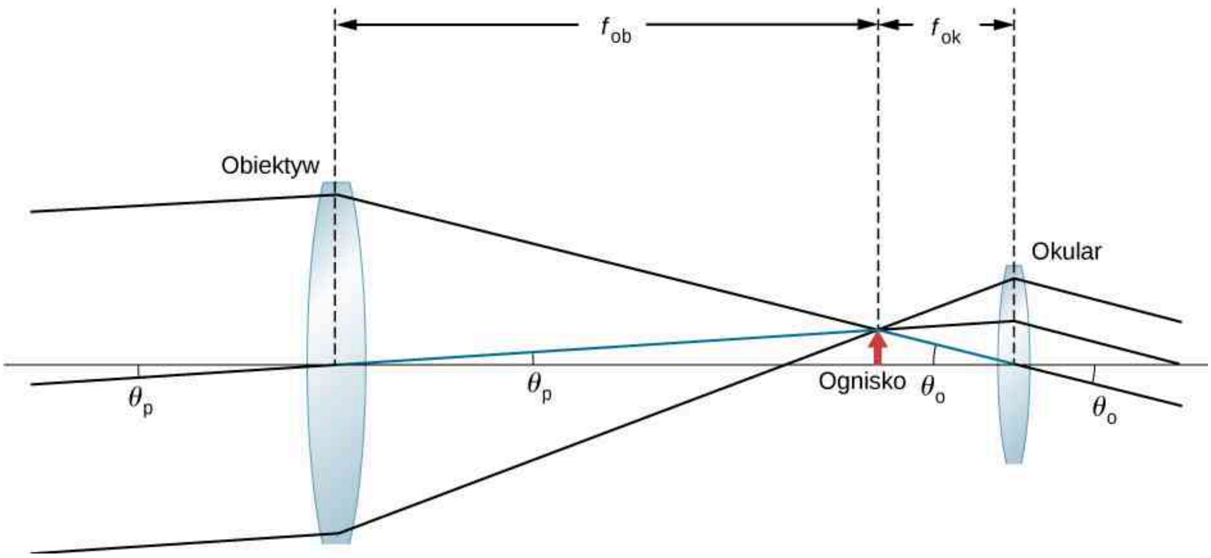
w zasięgu ogniskowej drugiej soczewki (okular). Obraz utworzony przez soczewkę obiektywu służy jako przedmiot dla okularu, który tworzy powiększony, pozorny obraz widziany przez oko obserwatora. Galileusz do obserwowania nieba używał właśnie takiego teleskopu.

Mimo że ustawienie soczewek w teleskopie refrakcyjnym wygląda podobnie jak w mikroskopie, występują pomiędzy nimi istotne różnice. W teleskopie przedmiot rzeczywisty znajduje się daleko i środkowy obraz jest mniejszy niż przedmiot. W mikroskopie rzeczywisty przedmiot znajduje się bardzo blisko i środkowy obraz jest większy niż przedmiot. Zarówno w teleskopie, jak i w mikroskopie okular powiększa środkowy obraz, jednakże w teleskopie jest to jedyne powiększenie.

Najbardziej rozpowszechniony rodzaj teleskopu dwusoczewkowego pokazano w części (b) Rysunku 2.40. Przedmiot jest daleko od teleskopu, praktycznie w nieskończoności w porównaniu z ogniskowymi soczewek ($d_\mathrm{p}^\mathrm{ob} \approx \infty$). Sprawia to, że padające promienie są praktycznie równoległe i skupiają się w płaszczyźnie ogniskowej. Z tego wynika, że pierwszy obraz powstaje w położeniu $d_\mathrm{o}^\mathrm{ob} = f^\mathrm{ob}$, jak pokazano na rysunku, i nie jest duży w porównaniu z tym, co widzimy, patrząc bezpośrednio na przedmiot. Jednakże okular teleskopu (podobnie jak okular mikroskopu) pozwala nam zbliżyć się bardziej niż punkt bliży do obrazu pierwszego i w ten sposób go powiększa. Podobnie jak dla zwykłej lupy, powiększenie kątowe teleskopu jest stosunkiem wielkości kątowej obrazu (θ_o w części (b) rysunku) do wielkości kątowej przedmiotu (θ_p w części (b) rysunku)

$$p_\mathrm{k} = \frac{\theta_\mathrm{o}}{\theta_\mathrm{p}}. \tag{2.39}$$

Aby otrzymać zależność na powiększenie zawierającą tylko parametry soczewek, musimy przyjąć, że płaszczyzna ogniskowa obiektywu leży bardzo blisko płaszczyzny ogniskowej okularu. Jeżeli założymy, że te płaszczyzny się na siebie nakładają, to mamy sytuację taką jak na Rysunku 2.41.



Rysunek 2.41 Płaszczyzna ogniskowa soczewki obiektywu teleskopu jest bardzo blisko płaszczyzny ogniskowej okularu. Wielkość kątowa obrazu θ_o oglądanego przez okular jest większa od wielkości przedmiotu θ_p oglądanego przez nieuzbrojone oko obserwatora.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że kąty θ_p i θ_o są małe, a więc możemy skorzystać z przybliżenia małych kątów ($\mathrm{tg}\,\theta \approx \theta$). W takim razie, jeżeli obraz powstający na płaszczyźnie ogniskowej ma wysokość h, to

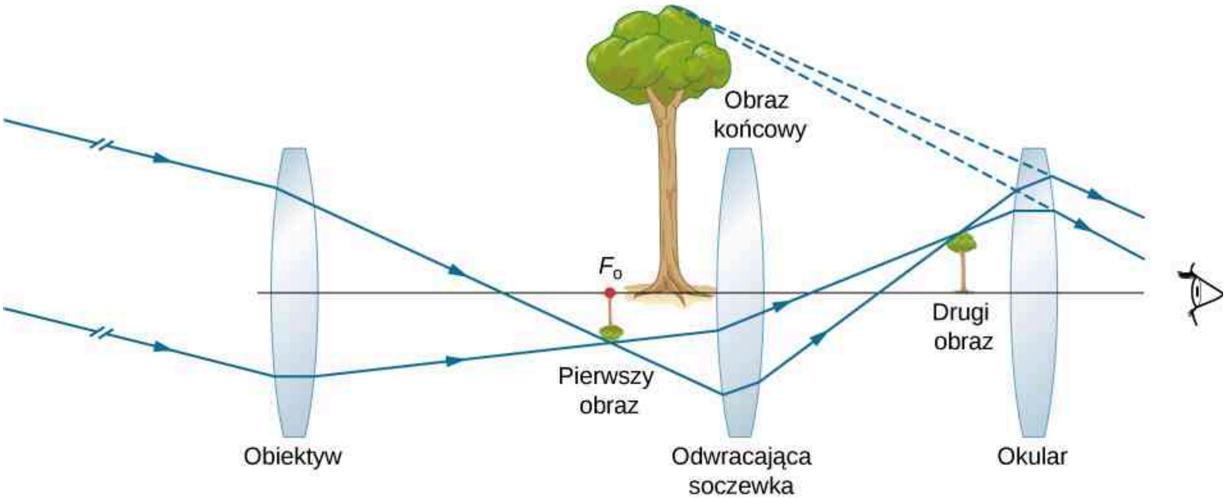
$$\theta_\mathrm{p} \approx \mathrm{tg}\,\theta_\mathrm{p} = \frac{h}{f^\mathrm{ob}},$$
$$\theta_\mathrm{o} \approx \mathrm{tg}\,\theta_\mathrm{o} = \frac{-h}{f^\mathrm{ok}}.$$

gdzie wprowadzono znak minus, ponieważ wysokość h jest ujemna, jeżeli mierzymy obydwa kąty w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Po podstawieniu tych zależności do Równania 2.39 otrzymujemy

$$p_k = \frac{-h_o}{f^{ok}} \cdot \frac{f^{ob}}{h_o} = \frac{-f^{ob}}{f^{ok}}. \quad (2.40)$$

Z tego wynika, że aby otrzymać największe powiększenie kątowe, najlepiej jest stosować obiektyw o długiej ogniskowej i okular o krótkiej ogniskowej. Im większe powiększenie kątowe p_k, tym większy jest przedmiot widzimy przez teleskop – i, co za tym idzie, widzimy więcej szczegółów. Ograniczenia w widzeniu szczegółów mogą wynikać z wielu przyczyn, między innymi z jakości wykonania soczewek czy też zakłóceń atmosferycznych. Typowy okular ma ogniskową o długości $2{,}5\ \mathrm{cm}$ lub $1{,}25\ \mathrm{cm}$. Jeżeli obiektyw teleskopu ma ogniskową równą $1\ \mathrm{m}$, to te okulary dają przybliżenie odpowiednio 40-krotne i 80-krotne. Innymi słowy, powiększenie kątowe sprawia, że obraz jest 40 lub 80 razy bliżej niż rzeczywisty przedmiot.

Ujemny znak powiększenia oznacza, że obraz jest odwrócony. Nie jest to istotne przy obserwacji gwiazd, ale stanowi istotny problem w innych zastosowaniach teleskopu, takich jak lunety na statkach czy celowniki optyczne. Jeżeli potrzebny jest obraz prosty, wtedy można zastosować **konstrukcję Galileusza** (ang. **Galileo's design**) przedstawioną w części (a) Rysunku 2.40. Częściej jednak dodaje się do układu trzecią soczewkę wypukłą jako okular, co wymaga zwiększenia odległości między dwiema poprzednimi soczewkami, ale odwraca ponownie obraz, jak pokazano na Rysunku 2.42.



Rysunek 2.42 Układ trzech soczewek w teleskopie tworzy prosty obraz końcowy. Pierwsze dwie soczewki są wystarczająco daleko od siebie, aby druga soczewka odwracała obraz pierwszej. Trzecia soczewka służy jako szkło powiększające i tworzy obraz prosty w położeniu łatwym do obserwacji.

Teleskop Yerkesa widoczny na Rysunku 2.43 to największy teleskop refrakcyjny na świecie. Ma średnicę 40 cali ($101{,}6\ \mathrm{cm}$) i znajduje się nad jeziorem Geneva w stanie Wisconsin (USA).

Budowanie dużych teleskopów refrakcyjnych jest bardzo trudne i kosztowne. Potrzebne są do tego duże, bardzo wysokiej jakości soczewki, których wykonanie jest technicznie skomplikowanym zadaniem. Teleskop refrakcyjny wygląda jak wielka luneta umieszczona na podstawie umożliwiającej obracanie jej w różnych kierunkach. Teleskop refrakcyjny ma kilka wad. Aberracja soczewek sprawia, że powstający obraz jest rozmazany. Dodatkowo soczewki, ze względu na swoją dużą grubość, pochłaniają więcej światła, co często sprawia, że trudno obserwować gwiazdy wysyłające słabe światło. Ponadto duże soczewki są bardzo ciężkie i deformują się pod własnym ciężarem. Wiele z tych wad teleskopów refrakcyjnych udało się wyeliminować przez wykorzystanie do zbierania światła zakrzywionego zwierciadła zamiast soczewki. Po raz pierwszy takie rozwiązanie zaproponował **Izaak Newton (1643–1727)**. Takie teleskopy nazywają się **teleskopami odbijającymi** (ang. **reflecting telescopes**), **teleskopami zwierciadlanymi** lub po prostu **reflektorami**.

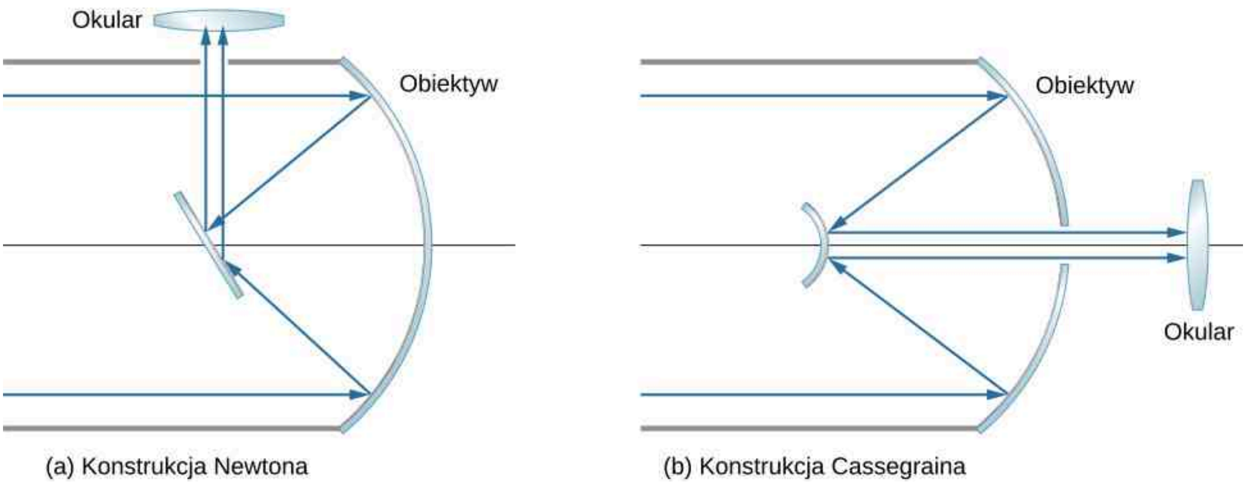


Rysunek 2.43 W 1897 roku Obserwatorium Yerkesa w Wisconsin (USA) zbudowało duży teleskop refrakcyjny z obiektywem o średnicy wynoszącej 40 cali i długości tuby 62 stopy. Źródło: Obserwatorium Yerkesa, Uniwersytet Chicago

Teleskopy zwierciadlane

Izaak Newton zaprojektował pierwszy teleskop zwierciadlany około 1670 roku, aby rozwiązać problem aberracji chromatycznej teleskopów refrakcyjnych. Aberracja chromatyczna powoduje, że światło o różnych barwach załamuje się w soczewce pod nieco różnymi kątami. W efekcie dookoła obrazu powstaje tęcza, a obraz jest rozmazany. W teleskopie zwierciadlanym promienie światła z odległego źródła padają na powierzchnię wklęsłego zwierciadła umieszczonego w dolnym końcu rury teleskopu. Zastosowanie zwierciadła zamiast soczewki eliminuje aberrację chromatyczną. Zwierciadło wklęsłe skupia promienie w swojej płaszczyźnie ogniskowej. Aby móc obserwować taki obraz, Newton zaproponował układ, w którym zogniskowane światło z wklęsłego zwierciadła zostaje odbite przez kolejne zwierciadło do okularu znajdującego się z boku rury teleskopu (część (a) Rysunku 2.44). To rozwiązanie jest popularne w wielu amatorskich teleskopach i nazywa się **konstrukcją Newtona** (ang. **Newtonian design**).

Niektóre teleskopy zwierciadlane odbijają skupione światło z powrotem w stronę środka zwierciadła głównego przy zastosowaniu dodatkowego zwierciadła wypukłego. W tej konfiguracji zbierające światło zwierciadło główne ma w środku otwór (część (b) Rysunku 2.44); światło następnie pada na okular. Ta konfiguracja obiektywu i okularu nazywa się **konstrukcją Cassegraina** (ang. **Cassegrain design**). Większość dużych teleskopów, w tym teleskop Hubble'a, jest zbudowana w ten właśnie sposób. Możliwe są również inne konfiguracje. W niektórych teleskopach detektor światła znajduje się dokładnie w punkcie, w którym promienie są skupiane przez zakrzywione zwierciadło główne.



Rysunek 2.44 Teleskopy zwierciadlane. (a) W konstrukcji Newtona okular jest umiejscowiony z boku teleskopu. (b) W konstrukcji Cassegraina okular znajduje się za otworem w zwierciadle głównym.

Większość stosowanych obecnie teleskopów to teleskopy zwierciadlane. Jednym z najstarszych tego typu jest teleskop Hale'a zbudowany na górze Palomar w południowej Kalifornii. Ma on zwierciadło główne o średnicy 200 cali

(508 cm). Jednym z największych teleskopów na świecie jest 10-metrowy teleskop Kecka w Obserwatorium Kecka na szczycie wygasłego wulkanu Mauna Kea na Hawajach. Właściwie pod tą nazwą kryją się dwa 10-metrowe teleskopy. Zwierciadło każdego z nich nie jest jednym wielkim elementem, lecz układem 36 sześciokątnych zwierciadeł. Co więcej, te dwa teleskopy mogą pracować razem, co w praktyce czyni z nich ekwiwalent 85-metrowego teleskopu. **Teleskop Hubble'a** (ang. **Hubble telescope**; Rysunek 2.45) to kolejny duży teleskop zwierciadlany, o średnicy zwierciadła głównego wynoszącej 2,4 m . Został on umieszczony na orbicie Ziemi w 1990 roku.



Rysunek 2.45 Teleskop kosmiczny Hubble'a widziany z promu kosmicznego Discovery. Źródło: modyfikacja pracy NASA

Powiększenie kątowe p_{k} teleskopu zwierciadlanego określa się przy użyciu Równania 2.36. Dla zwierciadła sferycznego ogniskowa jest połową promienia krzywizny, a więc wykonanie dużego lustrzanego obiektywu nie tylko pozwala zbierać więcej światła, ale także zwiększa powiększenie obrazu.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 2

KLUCZOWE POJĘCIA

aberracja (ang. aberration) zniekształcenie obrazu będące wynikiem odejścia od przybliżenia małych kątów

aberracja sferyczna (ang. spherical aberration) zniekształcenie obrazu utworzonego przez zwierciadło sferyczne; powstaje, gdy nie wszystkie promienie skupiają się w tym samym punkcie

akomodacja (ang. accommodation) proces dostosowania kształtu soczewki oka, przy użyciu mięśni rzęskowych, do oglądania przedmiotów znajdujących się w różnych odległościach; dostosowanie ogniskowej układu optycznego oka, tak aby na siatkówce oka powstał ostry obraz oglądanego przedmiotu

głębokość pozorna (ang. apparent depth) głębokość, na jakiej wydaje się, że przedmiot się znajduje, mierzona względem powierzchni oddzielającej dwa ośrodki o różnych współczynnikach załamania

koma (ang. coma) zniekształcenie obrazu, podobnie jak aberracja sferyczna, które powstaje, gdy padające promienie nie są równoległe do osi optycznej

konstrukcja biegu promieni (ang. ray tracing) technika wykorzystująca konstrukcje geometryczne, aby znaleźć i scharakteryzować obraz tworzony przez układ optyczny

konstrukcja Cassegraina (ang. Cassegrain design) teleskop, w którym światło skupiane przez wklęsłe zwierciadło kierowane jest przez otwór w tym zwierciadle do okularu zamontowanego w osi teleskopu

konstrukcja Newtona (ang. Newtonian design) teleskop, w którym światło skupiane przez zwierciadło wklęsłe zostaje odbite do okularu znajdującego się z boku teleskopu

krótkowzroczność (ang. nearsightedness, myopia) wada wzroku, w wyniku której obraz odległych przedmiotów jest nieostry, ponieważ promienie skupiają się przed siatkówką zamiast na siatkówce; krótkowidz widzi bliskie przedmioty wyraźnie

lupa (ang. simple magnifier) szkło powiększające z uchwytem

matryca CCD (ang. charge-coupled device) układ światłoczułych elementów (pikseli) rejestrujących natężenie światła i konwertujących sygnały optyczne na elektryczne o wartości proporcjonalnej do natężenia światła

mikroskop optyczny (ang. compound microscope) mikroskop zbudowany z dwóch soczewek wypukłych, z których jedna służy jako okular, a druga jako obiektyw

nadwzroczność (dalekowzroczność) (ang. farsightedness, hyperopia) wada wzroku, w wyniku której obraz bliskich przedmiotów jest nieostry, ponieważ promienie skupiają się za siatkówką zamiast na niej; dalekowidz widzi odległe przedmioty wyraźnie

obiektyw (ang. objective) soczewka znajdująca się najbliżej obserwowanego przedmiotu

obraz pozorny (ang. virtual image) obraz, który nie może być wyświetlony na ekranie, ponieważ promienie światła nie przechodzą przez ten obraz, a jedynie wydają się z niego wychodzić

obraz rzeczywisty (ang. real image) obraz, który może być wyświetlony na ekranie, ponieważ promienie światła przechodzą przez ten obraz

odległość obrazu (ang. image distance) odległość obrazu od osi przechodzącej przez środek elementu optycznego tworzącego obraz

odległość przedmiotu (ang. object distance) odległość przedmiotu od osi przechodzącej przez środek elementu optycznego tworzącego obraz

ognisko (ang. focal point) punkt, w którym skupione promienie się przecinają (zwierciadło wypukłe), lub punkt, z którego promienie światła zdają się wychodzić (zwierciadło wklęsłe)

ognisko drugie lub ognisko obrazu (ang. second focus, image focus) punkt, w którym wiązka równoległych promieni załamuje się na granicznej powierzchni sferycznej (powierzchnia skupiająca); punkt, w którym skupiają się przedłużenia promieni załamanych (powierzchnia rozpraszająca)

ognisko pierwsze lub ognisko przedmiotu (ang. first focus, object focus) dla przedmiotu umieszczonego w tym punkcie powstaje obraz w nieskończoności, po drugiej stronie sferycznej powierzchni pomiędzy dwoma ośrodkami

ogniskowa (ang. focal length) odległość wzdłuż osi optycznej od elementu optycznego skupiającego promienie do ogniska

okular (ang. eyepiece) soczewka (lub połączenie soczewek) w przyrządzie optycznym znajdująca się najbliżej oka obserwatora

oś optyczna (ang. optical axis) oś symetrii (obrotowa) zwierciadła

powiększenie (ang. magnification) stosunek wymiarów obrazu do wymiarów obiektu

powiększenie całkowite (ang. net magnification) $p_{\text{cał}}$ mikroskopu optycznego jest iloczynem powiększenia liniowego obiektywu i powiększenia kątowego okularu

powiększenie kątowe (ang. angular magnification) stosunek rozciągłości kątowej obrazu przedmiotu utworzonego przez lupę do rozciągłości kątowej przedmiotu obserwowanego nieuzbrojonym okiem

powiększenie liniowe (ang. linear magnification) stosunek wysokości obrazu do wysokości przedmiotu

przybliżenie cienkiej soczewki (ang. thin-lens approximation) założenie, że soczewka jest bardzo cienka w porównaniu z pierwszą odległością obrazu

przybliżenie małych kątów (ang. small-angle approximation) przybliżenie stosowane, gdy rozmiar zwierciadła sferycznego jest znacznie mniejszy niż jego promień; w tym przybliżeniu aberracja sferyczna jest pomijalna i zwierciadło ma dobrze określony punkt, w którym znajduje się ognisko

punkt bliży (ang. near point) najbliższy punkt, który oko widzi wyraźnie

punkt dali (ang. far point) najdalszy punkt, który oko widzi wyraźnie

płaszczyzna ogniskowa (ang. focal plane) płaszczyzna zawierająca ognisko i jego prostą prostopadłą do osi optycznej

płaszczyzna ogniskowa (ang. focal plane) płaszczyzna przechodząca przez ognisko i prostopadła do osi optycznej

rozpraszająca (wklęsła) soczewka (ang. diverging lens, concave lens) równoległe promienie światła po przejściu przez soczewkę odchylają się od jej osi optycznej

skupiająca (wypukła) soczewka (ang. converging lens, convex lens) równoległe promienie światła po przejściu przez soczewkę są skupiane w jednym punkcie po drugiej stronie soczewki

szkło powiększające (ang. magnifying glass) soczewka skupiająca, która tworzy powiększony obraz pozorny przedmiotu znajdującego się w odległości mniejszej niż ogniskowa

wierzchołek (ang. vertex) punkt, w którym powierzchnia zwierciadła przecina oś optyczną

zdolność skupiająca (ang. optical power) oznaczana Z, jest to odwrotność ogniskowej soczewki wyrażonej w metrach; jednostką zdolności skupiającej soczewki jest dioptria (D): $1\,\text{D} = 1\ /\ \text{m} = 1\,\text{m}^{-1}$

zwierciadło płaskie (ang. plane mirror) płaska (gładka) powierzchnia odbijająca

zwierciadło wklęsłe (ang. concave mirror) zwierciadło sferyczne z powierzchnią odbijającą po wewnętrznej stronie sfery

zwierciadło wypukłe (ang. convex mirror) zwierciadło sferyczne z powierzchnią odbijającą po zewnętrznej stronie sfery

zwierciadło zakrzywione (ang. curved mirror) zwierciadło utworzone przez zakrzywioną powierzchnię, na przykład sferyczną, eliptyczną lub paraboliczną

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Odległość obrazu zwierciadła płaskiego	$d_\text{p} = -d_\text{o}$
Ogniskowa zwierciadła sferycznego	$f = \frac{R}{2}$
Równanie zwierciadła	$\frac{1}{d_\text{p}} + \frac{1}{d_\text{o}} = \frac{1}{f}$
Powiększenie zwierciadła sferycznego	$p = \frac{h_\text{o}}{h_\text{p}} = -\frac{d_\text{o}}{d_\text{p}}$
Konwencja znaków dla zwierciadeł	
Ogniskowa f	+ dla zwierciadła wklęsłego − dla zwierciadła wypukłego

Odległość przedmiotu d_p	+ dla przedmiotu rzeczywistego – dla przedmiotu pozornego
Odległość obrazu d_o	+ dla obrazu rzeczywistego – dla obrazu pozornego
Powiększenie p	+ dla obrazu prostego – dla obrazu odwróconego
Równanie na głębokość pozorną	$h_o = \frac{n_2}{n_1} h_p$
Równanie powierzchni sferycznej	$\frac{n_1}{d_p} + \frac{n_2}{d_o} = \frac{n_2 - n_1}{R}$
Równanie cienkiej soczewki	$\frac{1}{d_p} + \frac{1}{d_o} = \frac{1}{f}$
Równanie soczewki	$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1\right)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$
Powiększenie przedmiotu	$p \equiv \frac{h_o}{h_p} = -\frac{d_o}{d_p}$
Zdolność skupiająca	$Z = \frac{1}{f}$
Zdolność skupiająca kilku soczewek znajdujących się blisko siebie	$Z_{całkowita} = Z_{soczewki\ 1} + Z_{soczewki\ 2} + Z_{soczewki\ 3} + \ldots$
Powiększenie kątowe p_k lupy	$p_k = \frac{\theta_o}{\theta_p}$
Powiększenie kątowe przedmiotu znajdującego się w odległości L od oka dla soczewki wypukłej o ogniskowej f, znajdującej się w odległości l od oka	$p_k = \frac{25\ \text{cm}}{L} \cdot \left(1 + \frac{L - l}{f}\right)$
Zakres powiększenia kątowego dla danej soczewki dla osoby o punkcie bliży równym 25 cm	$\frac{25\ \text{cm}}{f} \le p_k \le 1 + \frac{25\ \text{cm}}{f}$
Powiększenie całkowite mikroskopu optycznego	$p_{cał} = p^{ob} p_k^{ok} = \frac{-d_o^{ob}(f^{ok} + 25\ \text{cm})}{f^{ob} f^{ok}}$

PODSUMOWANIE

2.1 Obrazy tworzone przez zwierciadła płaskie

- Zwierciadło płaskie zawsze tworzy obraz pozorny (położony za zwierciadłem).
- Obraz i przedmiot znajdują się w takiej samej odległości od zwierciadła płaskiego, wymiary obrazu i przedmiotu są takie same i obraz jest tak samo zorientowany jak przedmiot.

2.2 Zwierciadła sferyczne

- Zwierciadła sferyczne mogą być wklęsłe (skupiające) lub wypukłe (rozpraszające).
- Ogniskowa zwierciadła sferycznego to połowa jego promienia krzywizny: $f = R / 2$.
- Równanie zwierciadła i konstrukcja biegu promieni pozwala na podanie dokładnego opisu obrazu tworzonego przez zwierciadło sferyczne.
- Aberracja sferyczna występuje dla zwierciadeł sferycznych, a aberracja komatyczna dla zwierciadeł sferycznych i parabolicznych.

2.3 Obrazy tworzone przez załamanie promieni światła

W tym podrozdziale wyjaśniono, jak pojedyncza powierzchnia załamująca tworzy obrazy:

- Kiedy patrzymy na przedmiot przez płaską powierzchnię graniczną pomiędzy dwoma ośrodkami o różnych współczynnikach załamania, to wydaje się, że przedmiot znajduje się w pozornej odległości h_o, która różni się od rzeczywistej odległości h_p w taki sposób, że: $h_o = (n_2 / n_1) h_p$.
- Obraz tworzony jest przez załamanie światła na powierzchni granicznej pomiędzy dwoma ośrodkami o współczynnikach załamania światła n_1 i n_2.
- Odległość obrazu zależy od: promienia krzywizny powierzchni, położenia przedmiotu oraz współczynników załamania światła obu ośrodków.

2.4 Cienkie soczewki

- Istnieją dwa rodzaje soczewek: skupiające i rozpraszające. Soczewka, która kieruje promienie światła w kierunku do (od) osi optycznej, nazywa się soczewką skupiającą (rozpraszającą).
- Dla soczewki skupiającej ognisko znajduje się w punkcie przecięcia skupionych promieni; dla soczewki rozpraszającej ognisko znajduje się w punkcie, z którego rozproszone promienie światła zdają się wychodzić.
- Odległość od środka cienkiej soczewki do jej ogniska nazywa się ogniskową f.
- Konstrukcja biegu promieni jest techniką geometryczną pozwalającą określić drogę promieni światła przechodzącego przez cienkie soczewki.
- Obraz rzeczywisty może być wyświetlony na ekranie.
- Obraz pozorny nie może być wyświetlony na ekranie.
- Soczewka skupiająca tworzy obrazy zarówno rzeczywiste, jak i pozorne, w zależności od położenia przedmiotu; soczewka rozpraszająca tworzy tylko obrazy pozorne.

2.5 Oko

- Tworzenie obrazu przez oko można opisać równaniem cienkiej soczewki.
- Oko tworzy obraz rzeczywisty na siatkówce, dostosowując swoją ogniskową w procesie nazywanym akomodacją.
- Krótkowzroczność powoduje niezdolność do wyraźnego widzenia odległych przedmiotów i jest korygowana za pomocą soczewki rozpraszającej, która zmniejsza zdolność skupiającą oka.
- Nadwzroczność powoduje niezdolność do wyraźnego widzenia bliskich przedmiotów i jest korygowana za pomocą soczewki skupiającej, która zwiększa zdolność skupiającą oka.
- W krótkowzroczności i nadwzroczności soczewki korygujące tworzą obrazy przedmiotów mieszczące się w przedziale odległości pomiędzy punktami bliży i dali dla danej osoby, dzięki czemu przedmioty widziane są wyraźnie.

2.6 Aparat fotograficzny

- W aparatach fotograficznych i kamerach do tworzenia obrazów stosuje się układy soczewek.
- Fotografia cyfrowa opiera się matrycach CCD, które zamieniają sygnały optyczne na sygnały elektryczne.

2.7 Proste przyrządy powiększające

- Szkło powiększające (lupa) jest soczewką skupiającą i tworzy pozorny, powiększony obraz przedmiotu znajdującego się w odległości mniejszej niż ogniskowa soczewki.
- Powiększenie kątowe opisuje powiększenie obrazu tworzonego przez szkło powiększające. Jest ono równe stosunkowi rozciągłości kątowej obrazu do rozciągłości kątowej przedmiotu obserwowanego przez nieuzbrojone oko.
- Powiększenie kątowe jest większe dla szkieł powiększających o krótszych ogniskowych.
- Szkło powiększające (lupa) daje maksymalnie 10-krotne powiększenie przedmiotu.

2.8 Mikroskopy i teleskopy

- Wiele urządzeń optycznych zawiera więcej elementów optycznych niż pojedyncza soczewka lub zwierciadło. Zasadę ich działania rozważa się poprzez analizę działania każdego elementu osobno. Obraz tworzony przez jeden element jest przedmiotem dla drugiego i tak dalej. Do każdego elementu stosuje się konstrukcję biegu promieni i równanie cienkiej soczewki, opisane w poprzednich rozdziałach.

- Łączne powiększenie zapewniane przez układ wieloelementowy jest iloczynem powiększenia liniowego jego poszczególnych elementów oraz powiększenia kątowego okularu. Dla dwuelementowego układu z obiektywem i okularem powiększenie wynosi

$$p_{\mathrm{k}} = p^{\mathrm{ob}} p_{\mathrm{k}}^{\mathrm{ok}},$$

gdzie p^{ob} jest powiększeniem liniowym obiektywu, a $p_{\mathrm{k}}^{\mathrm{ok}}$ powiększeniem kątowym okularu.

- Mikroskop jest układem wieloelementowym (czyli zawierającym więcej elementów optycznych niż pojedyncza soczewka czy zwierciadło), który pozwala obserwować przedmioty zbyt małe, aby widzieć ich szczegóły gołym okiem. Zarówno okular, jak i obiektyw mają swój udział w powiększeniu przedmiotu. Powiększenie mikroskopu optycznego z obrazem w nieskończoności można obliczyć, korzystając z równania

$$p_{\mathrm{cał}} = -\frac{16\,\mathrm{cm} \cdot 25\,\mathrm{cm}}{f^{\mathrm{ob}} f^{\mathrm{ok}}}.$$

$16\,\mathrm{cm}$ to standardowa odległość pomiędzy ogniskiem obiektywu (od strony obrazu) i ogniskiem okularu (od strony przedmiotu), $25\,\mathrm{cm}$ jest punktem bliży oka obserwatora, a f^{ob} i f^{ok} są ogniskowymi obiektywu i okularu.

- Prosty teleskop można wykonać z dwóch soczewek. Teleskop służy do oglądania obiektów zbyt odległych, aby ich szczegóły były widoczne gołym okiem.
- Powiększenie kątowe p_{k} teleskopu można obliczyć z zależności

$$p_{\mathrm{k}} = -\frac{f^{\mathrm{ob}}}{f^{\mathrm{ok}}},$$

gdzie f^{ob} i f^{ok} to ogniskowe obiektywu i okularu.

PYTANIA

2.1 Obrazy tworzone przez zwierciadła płaskie

1. Jakie są różnice pomiędzy obrazem rzeczywistym i pozornym? Czy obraz utworzony przez pojedyncze zwierciadło jest rzeczywisty, czy pozorny?

2. Czy można zobaczyć obraz pozorny? Uzasadnij swoją odpowiedź.

3. Czy można sfotografować obraz pozorny?

4. Czy można wyświetlić obraz pozorny na ekranie?

5. Czy wyświetlenie obrazu rzeczywistego na ekranie jest konieczne, aby go zobaczyć?

6. Wymyśl układ zwierciadeł pozwalający zobaczyć tył własnej głowy. Jaka jest minimalna liczba zwierciadeł wymagana do tego zadania?

7. Jeżeli chcesz zobaczyć całe swoje ciało w lustrze (zwierciadło płaskie), to jak wysokie musi być to lustro? Czy jego rozmiar zależy od twojej odległości od lustra? Wykonaj rysunek.

2.2 Zwierciadła sferyczne

8. W jakiej odległości zawsze znajduje się obraz: d_{p}, d_{o}, czy f?

9. W jakim przypadku obraz będzie znajdował się w ognisku zwierciadła sferycznego?

10. Co oznacza ujemne powiększenie? Co oznacza powiększenie, którego wartość bezwzględna jest mniejsza niż 1?

11. Czy obraz może być większy niż przedmiot, nawet gdy jego powiększenie jest ujemne? Uzasadnij.

2.3 Obrazy tworzone przez załamanie promieni światła

12. Wyprowadź wzór na głębokość pozorną ryby w akwarium, korzystając z prawa Snella.

13. Korzystając z linijki i kątomierza znajdź obraz tworzony w wyniku załamania światła w wymienionych poniżej przypadkach. Przyjmij, że powierzchnia graniczna jest między szkłem a powietrzem. Użyj współczynnika załamania 1 dla powietrza i 1,5 dla szkła. (Wskazówka: Zastosuj prawo Snella).

a. Punktowy obraz znajduje się na osi wklęsłej powierzchni w odległości od wierzchołka równej ogniskowej.
b. Punktowy obraz znajduje się na osi wklęsłej powierzchni w odległości od wierzchołka większej niż ogniskowa.
c. Punktowy obraz znajduje się na osi wypukłej powierzchni w odległości od wierzchołka równej ogniskowej.
d. Punktowy obraz znajduje się na osi wypukłej powierzchni w odległości od wierzchołka większej niż ogniskowa.
e. Powtórz sytuacje od (a) do (d) dla punktu znajdującego się poza osią.

2.4 Cienkie soczewki

14. Można przyjąć, że płasko-równoległy kawałek szkła jest soczewką o nieskończonej ogniskowej. Jeśli tak jest, to gdzie powstaje obraz? Jaka jest relacja pomiędzy d_o i d_p?

15. Gdy ogniskujesz widok na obiekcie, który chcesz sfotografować, dostosowujesz odległość soczewki od filmu lub matrycy. Zakładając, że soczewka aparatu działa jak cienka soczewka, odpowiedz, dlaczego nie może ona pozostawać w stałej odległości od filmu, aby uzyskać ostry obraz przedmiotów znajdujących się zarówno blisko, jak i daleko od aparatu fotograficznego?

16. Cienka soczewka ma dwa ogniska, po każdej stronie w równych odległościach od środka, i powinna zachowywać się tak samo dla światła padającego z dowolnej strony. Czy soczewki okularów korekcyjnych są cienkimi soczewkami?

17. Czy ogniskowa soczewki zmieni się, gdy zostanie zanurzona w wodzie? Uzasadnij.

2.5 Oko

18. Jeżeli z powodu zaćmy soczewka oka zostaje usunięta (zabieg taki wykonywano już w starożytności), to dlaczego przepisuje się w takiej sytuacji okulary z soczewkami o mocy $16\,\text{D}$?

19. Dlaczego widzisz rozmazany obraz, gdy otwierasz oczy pod wodą? W jaki sposób maska umożliwia wyraźne widzenie?

20. W ostatnich czasach coraz powszechniejsze stają się zabiegi wymiany zmętniałej soczewki u osób z zaćmą na soczewki sztuczne wszczepiane w ich miejsce. Dobiera się je w taki sposób, aby pacjent dobrze widział przedmioty odległe. Czy osoba po takim zabiegu potrzebuje okularów do czytania? Czy jeśli była krótkowzroczna, jej nowa soczewka będzie mocniejsza czy słabsza od usuniętej?

21. Jeżeli kształt rogówki ma być zmieniony (można to zrobić operacyjnie lub za pomocą soczewek kontaktowych), aby skorygować krótkowzroczność, to krzywizna rogówki będzie większa czy mniejsza? Uzasadnij.

2.8 Mikroskopy i teleskopy

22. Optyka geometryczna opisuje oddziaływanie światła z makroskopowymi przedmiotami. Dlaczego więc poprawne jest zastosowanie optyki geometrycznej do analizowania obrazów otrzymanych przy pomocy mikroskopu?

23. Obraz tworzony przez mikroskop na Rysunku 2.38 nie może być wyświetlony na ekranie. Czy dodatkowe soczewki lub zwierciadła spowodują, że ten obraz będzie można pokazać na ekranie?

24. Jak należałoby zmienić położenie okularu względem obiektywu, aby obraz powstający w mikroskopie lub teleskopie mógł być pokazany na ekranie?

ZADANIA

2.1 Obrazy tworzone przez zwierciadła płaskie

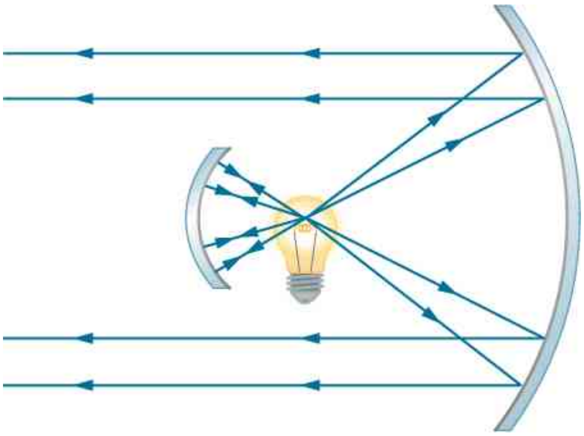
25. Przeanalizuj układ dwóch zwierciadeł płaskich ustawionych względem siebie pod kątem $120°$. Przedmiot zostaje umieszczony na dwusiecznej kąta pomiędzy zwierciadłami. Wykonaj rysunek i zaznacz bieg promieni (jak na Rysunku 2.4), aby pokazać, ile powstaje obrazów.

26. Przeanalizuj układ dwóch zwierciadeł płaskich ustawionych względem siebie pod kątem $60°$. Narysuj konstrukcję biegu promieni, aby pokazać, jak powstaje obraz odwrócony.

27. Stosując więcej niż jedno zwierciadło płaskie, wykonaj konstrukcję biegu promieni, aby pokazać, jak powstaje obraz odwrócony.

2.2 Zwierciadła sferyczne

28. Na rysunku widzimy żarówkę zawieszoną pomiędzy dwoma zwierciadłami sferycznymi. Jedno z nich tworzy wiązkę równoległych promieni światła, a drugie zapobiega ucieczce światła. Gdzie znajduje się włókno żarówki w stosunku do ogniskowej lub promienia krzywizny każdego zwierciadła?



29. Dlaczego zwierciadła rozpraszające są często używane w lusterkach wstecznych samochodów? Jaka jest główna wada wynikająca z korzystania z tego typu zwierciadeł zamiast zwierciadeł płaskich?

30. W niektórych teleobiektywach stosuje się zwierciadło zamiast soczewki. Jaki promień krzywizny powinno mieć zwierciadło, aby zastąpić soczewkę o ogniskowej $800\ \mathrm{mm}$?

31. Oblicz ogniskową zwierciadła, jakim jest błyszcząca, wypukła powierzchnia łyżki o promieniu krzywizny równym $3\ \mathrm{cm}$.

32. W grzejnikach elektrycznych stosuje się zwierciadła wklęsłe do odbijania promieniowania podczerwonego wytwarzanego przez gorące spirale. Pamiętajmy, że prawo odbicia stosuje się także dla promieniowania podczerwonego. Gdzie znajdują się spirale grzejnika, jeżeli zwierciadło ma promień krzywizny równy $50\ \mathrm{cm}$ i tworzy obraz spirali w odległości $3\ \mathrm{m}$?

33. Oblicz powiększenie elementu grzejnego (spirali) z poprzedniego zadania. Zauważ, że duże powiększenie pomaga rozproszyć energię.

34. Ile wynosi ogniskowa lustra do makijażu, zapewniającego $1{,}5$-krotne powiększenie, gdy twarz osoby znajduje się $12\ \mathrm{cm}$ od niego? Rozwiąż to zadanie, postępując dokładnie według etapów opisanych w Sposób rozwiązywania zadań: zwierciadła sferyczne.

35. Człowiek stojący w odległości $3\ \mathrm{m}$ od wypukłego zwierciadła widzi swój obraz w powiększeniu $0{,}25$ razy.

a. Gdzie powstaje jego obraz?
b. Jaka jest ogniskowa zwierciadła?
c. Jaki jest promień krzywizny zwierciadła?

36. Przedmiot o wysokości $1{,}5\ \mathrm{cm}$ znajduje się w odległości $3\ \mathrm{cm}$ od rogówki oka, a jego odbity obraz ma wysokość $0{,}167\ \mathrm{cm}$.
a. Jakie jest powiększenie?
b. Gdzie powstaje obraz?
c. Oblicz promień krzywizny zwierciadła wypukłego utworzonego przez rogówkę.

(Ta technika jest używana przez optyków do mierzenia krzywizny rogówki przy dobieraniu soczewek okularów lub szkieł kontaktowych, przyrząd stosowany do określania krzywizny rogówki oka nazywa się keratometrem).

37. Konstrukcja biegu promieni dla zwierciadła płaskiego pokazuje, że obraz znajduje się za zwierciadłem w odległości równej odległości przedmiotu. Jest to wyrażone zależnością: $d_o = -d_p$, ujemna wartość odległość obrazu wynika z konwencji znaków (obraz pozorny). Jaka jest ogniskowa zwierciadła płaskiego?

38. Wykaż, że dla zwierciadła płaskiego $h_o = h_p$, wiedząc, że obraz powstaje za zwierciadłem w odległości równej odległości przedmiotu.

39. Zastosuj prawo odbicia światła, aby udowodnić, że ogniskowa zwierciadła wynosi połowę jego promienia krzywizny, czyli $f = R/2$. Zauważ, że jest to prawdziwe dla zwierciadła sferycznego tylko wtedy, gdy jego rozmiary są małe w porównaniu z promieniem krzywizny.

40. Oblicz intensywność promieniowania podczerwonego w $\mathrm{W/m^2}$ przekazywanego przez wklęsłe zwierciadło grzejnika elektrycznego z Ćwiczenia 2.32 na osobę znajdującą się w odległości $3\ \mathrm{m}$. Przyjmij, że moc elementu grzejnego (spirali) wynosi $1500\ \mathrm{W}$, a jego powierzchnia wynosi $100\ \mathrm{cm^2}$ oraz że lustro odbija i skupia połowę promieniowania.

41. Dwa lustra są ustawione pod kątem $60°$, a przedmiot znajduje się w punkcie równo oddalonym od luster. Korzystając z kątomierza, narysuj precyzyjnie promienie, aby znaleźć położenie wszystkich obrazów. Jeśli będzie to konieczne ze względu na nakładające się promienie obrazów, wykonaj kilka rysunków.

42. Dwa równoległe, płaskie lustra stoją naprzeciwko siebie w odległości $3\ \mathrm{cm}$. Punktowy przedmiot znajduje się między lustrami w odległości $1\ \mathrm{cm}$ od jednego z nich. Określ współrzędne wszystkich obrazów.

2.3 Obrazy tworzone przez załamanie promieni światła

43. Przedmiot znajduje się w odległości $30\ \mathrm{cm}$ od wierzchołka wklęsłej powierzchni wykonanej ze szkła o promieniu krzywizny $10\ \mathrm{cm}$. Gdzie powstaje obraz utworzony przez załamującą powierzchnię i jakie jest jego powiększenie? Przyjmij, że $n_{\text{powietrza}} = 1$, a $n_{\text{szkła}} = 1{,}5$.

44. Przedmiot znajduje się w odległości $30\ \mathrm{cm}$ od wierzchołka wypukłej powierzchni wykonanej ze szkła o promieniu krzywizny $80\ \mathrm{cm}$. Gdzie powstaje obraz utworzony przez załamującą powierzchnię i jakie jest jego powiększenie?

45. Przedmiot znajduje się w wodzie w odległości 15 cm od wierzchołka wypukłej powierzchni wykonanej ze szkła o promieniu krzywizny 10 cm. Gdzie powstaje obraz utworzony przez załamującą powierzchnię i jakie jest jego powiększenie? Przyjmij że $n_{\text{wody}} = 4/3$ i $n_{\text{szkła}} = 1{,}5$.

46. Przedmiot znajduje się w wodzie w odległości 30 cm od wierzchołka wypukłej powierzchni wykonanej z pleksiglasu o promieniu krzywizny 80 cm. Gdzie powstaje obraz utworzony przez załamującą powierzchnię i jakie jest jego powiększenie? Przyjmij że $n_{\text{wody}} = 4/3$ i $n_{\text{pleksi}} = 1{,}65$.

47. Przedmiot znajduje się w powietrzu w odległości 5 cm od wierzchołka wklęsłej powierzchni wykonanej ze szkła o promieniu krzywizny 20 cm. Gdzie powstaje obraz utworzony przez załamującą powierzchnię i jakie jest jego powiększenie? Przyjmij, że $n_{\text{powietrza}} = 1$ i $n_{\text{szkła}} = 1{,}5$.

48. Wyprowadź równanie sferycznej powierzchni wklęsłej dla załamania światła na powierzchni wklęsłej. (Wskazówka: Postępuj podobnie, jak przy wyprowadzaniu wzoru dla powierzchni wypukłej opisanym w tekście).

2.4 Cienkie soczewki

49. W jakiej odległości od soczewki musi znajdować się film lub matryca w aparacie fotograficznym przy wykonywaniu zdjęcia kwiatu będącego w odległości 75 cm? Ogniskowa soczewki aparatu wynosi 35 mm. Postępuj ściśle według schematu opisanego w Strategia rozwiązywania zadań: soczewki.

50. Projektor slajdów ma soczewkę o ogniskowej 100 mm.
a. W jakiej odległości znajduje się ekran, jeśli slajd umieszczono 103 mm od soczewki i jego obraz na ekranie jest ostry?
b. Jeśli slajd ma wymiary 24 mm na 36 mm, to jakie są rozmiary obrazu?

Strategia rozwiązywania zadań: soczewki.

51. Lekarz, badając znamię, korzysta ze szkła powiększającego o ogniskowej 15 cm, znajdującego się w odległości $13{,}5\text{ cm}$ od znamienia.
a. Gdzie powstaje obraz?
b. Jakie jest jego powiększenie?
c. Jak duży jest obraz znamienia o średnicy 5 mm?

52. Fotografowana osoba stoi w odległości 3 m od aparatu o ogniskowej 50 mm.
a. W jakiej odległości od filmu musi znajdować się soczewka?
b. Jeśli klatka filmu ma wysokość 36 mm, a osoba ma 175 cm wzrostu, to jaki procent tej osoby zmieści się w kadrze?
c. Omów sensowność tego ustawienia, bazując na swoim doświadczeniu w zakresie fotografowania i pozowania do zdjęć.

53. Soczewka aparatu używanego do robienia zdjęć z bliskiej odległości ma ogniskową o długości 22 mm. Od filmu może być oddalona maksymalnie o 33 mm.
a. Jaka jest najmniejsza odległość przedmiotu, który może zostać sfotografowany?
b. Jakie jest powiększenie tego przedmiotu?

54. Przypuśćmy, że w twoim aparacie fotograficznym soczewka obiektywu jest w odległości 51 mm od kliszy.
a. Jak daleko znajduje się ostro widoczny przedmiot?
b. Jaką wysokość ma przedmiot, jeśli jego obraz mierzy 2 cm?

55. Jaka jest długość ogniskowej szkła powiększającego, które daje trzykrotne powiększenie w odległości 5 cm od przedmiotu, np. rzadkiej monety?

56. Powiększenie książki znajdującej się w odległości $7{,}5\text{ cm}$ od soczewki o ogniskowej 10 cm wynosi 3.
a. Oblicz powiększenie książki, gdy znajduje się ona w odległości $8{,}5\text{ cm}$ od szkła powiększającego;
b. Powtórz obliczenia dla książki znajdującej się w odległości $9{,}5\text{ cm}$ od szkła powiększającego;
c. Opisz, jak zmienia się powiększenie, gdy zwiększa się odległość przedmiotu od szkła powiększającego.

57. Załóżmy, że fotografujesz góry znajdujące się w odległości 10 km aparatem z teleobiektywem o ogniskowej 200 mm.
a. Gdzie powstaje obraz?
b. Jaka jest wysokość obrazu skalnej ściany o wysokości 1000 m na jednej z gór?

58. Fotografujesz Słońce, używając aparatu z obiektywem o ogniskowej 100 mm. Jaką średnicę ma tarcza słoneczna na kliszy, jeśli Słońce ma średnicę $1{,}4 \cdot 10^6\text{ km}$ i znajduje się w odległości $1{,}5 \cdot 10^8\text{ km}$?

59. Korzystając z równania cienkiej soczewki, wykaż, że powiększenie soczewki jest określone przez jej ogniskową oraz odległość przedmiotu i jest wyrażone równaniem $p = f / (f - d_{\text{p}})$.

60. Przedmiot o wysokości 3 cm znajduje się w odległości 5 cm od soczewki skupiającej o ogniskowej 20 cm. Gdzie powstaje obraz przedmiotu i jaka jest jego wysokość?

61. Przedmiot o wysokości 3 cm umieszczono w odległości 5 cm od rozpraszającej soczewki o ogniskowej 20 cm. Czy po drugiej stronie soczewki powstał obraz? W jakiej odległości i jakiej wielkości?

62. Przedmiot o wysokości $3\,\text{cm}$ umieszczono $25\,\text{cm}$ przed rozpraszającą soczewką o ogniskowej $20\,\text{cm}$. Za nią umieszczono soczewkę skupiającą o ogniskowej $20\,\text{cm}$. Odległość między soczewkami wynosi $5\,\text{cm}$. Oblicz położenie i wielkość finalnego obrazu.

63. Dwie soczewki wypukłe o ogniskowych $20\,\text{cm}$ i $10\,\text{cm}$ znajdują się w odległości $30\,\text{cm}$ od siebie, przy czym soczewka o dłuższej ogniskowej jest po prawej stronie. Przedmiot o wysokości $2\,\text{cm}$ znajduje się dokładnie pośrodku pomiędzy soczewkami. Opisz, co zobaczysz – czyli, gdzie powstają obrazy, czy są proste czy odwrócone oraz jakie jest ich powiększenie.

2.5 Oko

Jeżeli w poniższych zadaniach nie podano odległości od soczewki do siatkówki, przyjmujemy, że wynosi ona $2\,\text{cm}$.

64. Jaka jest zdolność skupiająca oka patrzącego na przedmiot oddalony o $50\,\text{cm}$?

65. Oblicz zdolność skupiającą oka patrzącego na przedmiot oddalony o $3\,\text{m}$.

66. Druk w książkach ma zazwyczaj około $3{,}5\,\text{mm}$ wysokości. Jak wysoki jest obraz druku na siatkówce, jeśli książka znajduje się w odległości $30\,\text{cm}$ od oka?

67. Załóżmy, że ostrość widzenia pewnej osoby jest taka, że widzi ona wyraźnie przedmioty, które tworzą na siatkówce obraz o wysokości $4\,\mu\text{m}$. Jaka jest maksymalna odległość, przy której może ona czytać litery o wysokości $75\,\text{cm}$ narysowane na samolocie?

68. Jaki jest punkt dali u osoby, której oczy mają zdolność skupiającą $50{,}5\,\text{D}$?

69. Laser zmieniający kształt rogówki u pacjenta zredukował zdolność skupiającą oka o $9\,\text{D}$, z dokładnością około $\pm 5\%$.

a. Jakiego zakresu soczewek okularów (w dioptriach) pacjent będzie potrzebował po tej operacji?

b. Czy przed operacją pacjent był krótkowidzem, czy dalekowidzem? Uzasadnij.

70. Zdolność skupiająca zdrowego oka dla bliskich przedmiotów wynosi $54\,\text{D}$. Laserowa korekcja oka u pacjenta zwiększyła ją o $3\,\text{D}$. Zakładając, że po operacji zdolność skupiająca oka pacjenta odpowiada zdolności skupiającej zdrowego oka, oblicz, ile wynosił punkt bliży u tego pacjenta przed operacją?

71. Patrząc na przedmioty odległe, ludzkie oko ma zdolność skupiającą $50\,\text{D}$. Jaki był wcześniej punkt dali u pacjenta, u którego w wyniku operacji zdolność skupiająca została zmniejszona o $7\,\text{D}$, aby widział ostro odległe przedmioty?

72. Oczy studenta czytającego z tablicy mają zdolność skupiającą $51\,\text{D}$. Jak daleko znajduje się tablica?

73. Zdolność skupiająca zdrowego oka dla odległych przedmiotów wynosi $50\,\text{D}$. Młoda kobieta o normalnej zdolności skupiającej ma 10-procentową zdolność akomodacji, tj. zwiększenia zdolności skupiającej oczu. W jakiej odległości jest najbliższy przedmiot, jaki może widzieć wyraźnie?

74. Dla mężczyzny z silną krótkowzrocznością punkt dali znajduje się w odległości $20\,\text{cm}$. Jaka powinna być zdolność skupiająca soczewek kontaktowych, które skorygują jego wadę wzroku?

75. Osoba krótkowzroczna otrzymała soczewki kontaktowe o zdolności skupiającej $-4\,\text{D}$. Jaki jest jej punkt dali?

76. Soczewki kontaktowe umiarkowanie nadwzrocznej osoby mają zdolność skupiającą $0{,}75\,\text{D}$, a punkt bliży dla tej osoby znajduje się w odległości $29\,\text{cm}$. Ile wynosi zdolność skupiająca warstwy płynnej pomiędzy rogówką a soczewką, jeżeli przy uwzględnieniu obecności warstwy płynnej korekcja jest idealna?

2.7 Proste przyrządy powiększające

77. Jakie jest powiększenie obrazu powstającego na siatkówce oka, jeśli obraz ma rozciągłość kątową $30°$, a przedmiot $5°$?

78. Jakie powiększenie daje lupa o ogniskowej $10\,\text{cm}$ trzymana $3\,\text{cm}$ od oka, gdy przedmiot znajduje się $12\,\text{cm}$ od oka?

79. W jakiej odległości od przedmiotu powinieneś trzymać szkło powiększające o ogniskowej $2{,}1\,\text{cm}$, aby otrzymać 10-krotne powiększenie? Przyjmij, że oko znajduje się $5\,\text{cm}$ od szkła powiększającego.

80. Trzymasz lupę o ogniskowej $5\,\text{cm}$ tuż przy powierzchni oka. Jakie jest jej powiększenie, jeżeli punkt bliży twojego oka znajduje się w odległości $25\,\text{cm}$?

81. Patrzysz na górę przez szkło powiększające o ogniskowej $f = 10\,\text{cm}$. Jakie jest powiększenie?

82. Patrzysz na przedmiot, trzymając szkło powiększające o ogniskowej $2{,}5\,\text{cm}$ w odległości $10\,\text{cm}$ od przedmiotu. Jak daleko od oka powinno znajdować się szkło powiększające, aby dało 10-krotne powiększenie?

83. Szkło powiększające tworzy obraz w odległości $10\,\text{cm}$ od soczewki, po przeciwnej stronie soczewki niż przedmiot, który znajduje się w odległości $10\,\text{cm}$. Jakie jest powiększenie soczewki dla osoby o typowym punkcie bliży, jeżeli oczy tej osoby znajdują się w odległości $12\,\text{cm}$ od przedmiotu?

84. Przedmiot oglądany nieuzbrojonym okiem ma rozciągłość kątową $2°$. Jaka jest rozciągłość kątowa obrazu, jeżeli patrzysz na przedmiot przez szkło o 10-krotnym

powiększeniu?

85. Dla rozluźnionego oka powiększenie kątowe lupy wynosi 4. Jakie największe powiększenie może dać ta lupa?

86. Jaki zakres powiększenia jest możliwy dla soczewki skupiającej o ogniskowej $7\,\text{cm}$?

87. Lupa daje powiększenie kątowe $4{,}5$, gdy używana jest przez młodą osobę o punkcie bliży znajdującym się w odległości $18\,\text{cm}$. Jakie jest maksymalne powiększenie kątowe dla starszej osoby, której punkt bliży wynosi $45\,\text{cm}$?

2.8 Mikroskopy i teleskopy

88. Mikroskop o całkowitym powiększeniu 800 ma obiektyw, który powiększa 200 razy.
a. Jakie jest powiększenie kątowe okularu?
b. Mikroskop jest wyposażony w dwa dodatkowe obiektywy o powiększeniach 100 i 400. Jakie inne całkowite powiększenia mikroskopu są jeszcze możliwe?

89. a. Jakie jest powiększenie obiektywu mikroskopu o ogniskowej $0{,}15\,\text{cm}$, znajdującego się w odległości $0{,}155\,\text{cm}$ od oglądanego przedmiotu?
b. Jakie jest całkowite powiększenie przy zastosowaniu okularu o 8-krotnym powiększeniu?

90. Gdzie musi znajdować się przedmiot względem mikroskopu, aby jego obiektyw o ogniskowej $0{,}5\,\text{cm}$ tworzył powiększenie równe -400?

91. Ameba znajduje się w odległości $0{,}305\,\text{cm}$ od obiektywu mikroskopu o ogniskowej $0{,}3\,\text{cm}$.
a. Gdzie powstaje obraz utworzony przez soczewkę obiektywu?
b. Jakie jest powiększenie tego obrazu?
c. Okular o ogniskowej $2\,\text{cm}$ znajduje się w odległości $20\,\text{cm}$ od obiektywu. Gdzie powstaje ostateczny obraz?
d. Ile wynosi powiększenie kątowe okularu?
e. Jakie jest całkowite powiększenie (zob. Rysunek 2.39)?

92. **Nieracjonalne wyniki.** Koledzy pokazują ci obraz w mikroskopie. Mówią, że mikroskop ma obiektyw o ogniskowej $0{,}5\,\text{cm}$ i okular o ogniskowej $5\,\text{cm}$. Obliczyli, że całkowite powiększenie mikroskopu wynosi $250\,000$. Czy te wartości są realne dla tego mikroskopu?

Jeżeli nie podano inaczej, w kolejnych zadaniach przyjmujemy, że odległość soczewki oka od siatkówki wynosi $2\,\text{cm}$.

93. Jakie jest powiększenie kątowe teleskopu, który ma obiektyw o ogniskowej $100\,\text{cm}$ i okular o ogniskowej $2{,}5\,\text{cm}$?

94. Oblicz odległość pomiędzy obiektywem a okularem teleskopu z poprzedniego zadania konieczną do powstania ostatecznego obrazu bardzo odległego od oka obserwatora. Zauważ, że teleskop jest zazwyczaj używany do oglądania bardzo odległych obiektów.

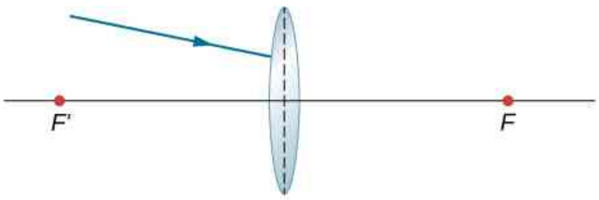
95. Duży teleskop refrakcyjny ma zwierciadło obiektywu o promieniu krzywizny $10\,\text{m}$. Jakie jest powiększenie kątowe teleskopu, gdy używany jest okular o ogniskowej $3\,\text{m}$?

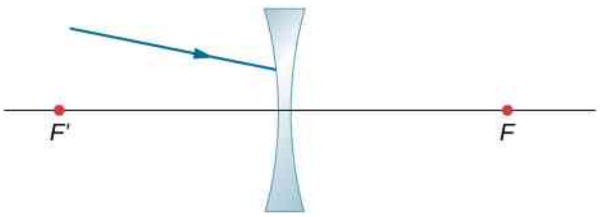
96. Obiektywem małego teleskopu jest zwierciadło wklęsłe o promieniu krzywizny $2\,\text{m}$. Jego okular ma ogniskową $4\,\text{cm}$.
a. Jakie jest powiększenie kątowe teleskopu?
b. Jaką rozciągłość kątową ma plama słoneczna o średnicy $25\,000\,\text{km}$?
c. Jaka jest rozciągłość kątowa jej obrazu?

97. Lornetka powiększająca $7{,}5$-krotnie daje powiększenie kątowe $-7{,}5$. Zwierciadła służą wyłącznie do otrzymania prostego obrazu. Jeżeli lornetka ma obiektyw o ogniskowej $75\,\text{cm}$, to jaka jest ogniskowa okularu?

98. **Wymyśl własne zadanie.** Przyjrzyj się teleskopowi podobnemu do tego, jakiego używał Galileusz, a więc teleskopowi, który ma obiektyw z soczewką skupiającą i okular z soczewką rozpraszającą, jak pokazano w części (a) Rysunku 2.40. Wymyśl zadanie, w którym należy obliczyć położenie i rozmiar utworzonego obrazu. Należy się zastanowić, ile powinny wynosić ogniskowe soczewek oraz położenie i rozmiar przedmiotu. Ustal dane tak, aby powiększenie kątowe było większe niż 1.

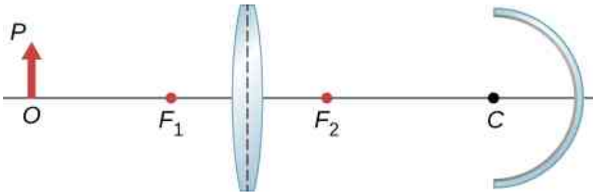
99. Skorzystaj z techniki konstrukcji biegu promieni, aby określić, w którą stronę będzie skierowany promień załamany przez cienką soczewkę na poniższym rysunku. Wskazówka: W każdym przypadku wybierz punkt P na podanym promieniu. Potraktuj ten punkt jak przedmiot. Teraz znajdź jego obraz Q. Skorzystaj z zasady: wszystkie promienie po przeciwnej stronie soczewki albo przejdą przez punkt Q, albo będzie się wydawało, że wychodzą z punktu Q.





100. Zastosuj technikę konstrukcji biegu promieni, aby narysować ostateczny obraz na poniższym rysunku. Wskazówka: Znajdź pośredni obraz utworzony przez

soczewkę. Zastosuj go jako przedmiot dla zwierciadła i znajdź ostateczny obraz, który tworzy zwierciadło.



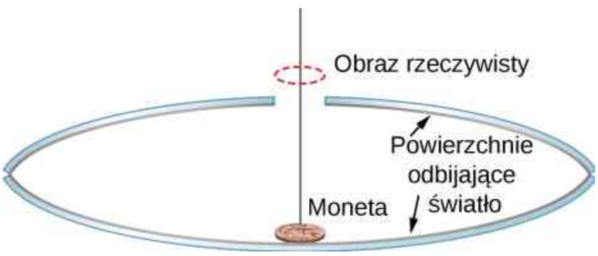
101. Zwierciadło wklęsłe o promieniu krzywizny 10 cm znajduje się w odległości 30 cm od cienkiej soczewki wypukłej o ogniskowej 15 cm . Oblicz położenie i powiększenie małej żarówki znajdującej się 50 cm od soczewki.

102. Przedmiot o wysokości 3 cm znajduje się w odległości 25 cm od soczewki skupiającej o ogniskowej 20 cm . Za soczewką umieszczono zwierciadło wklęsłe o ogniskowej 20 cm . Odległość pomiędzy soczewką a zwierciadłem wynosi 5 cm . Określ położenie, orientację i rozmiar końcowego obrazu.

103. Przedmiot o wysokości 3 cm znajduje się w odległości 25 cm naprzeciwko soczewki skupiającej o ogniskowej 20 cm . W odległości 10 cm od tej soczewki znajduje się kolejna soczewka skupiająca o ogniskowej 20 cm . Za soczewkami umieszczono zwierciadło wklęsłe o ogniskowej 15 cm , w odległości 50 cm od drugiej soczewki. Określ położenie, orientację i rozmiar końcowego obrazu.

104. Przedmiot o wysokości 2 cm znajduje się w odległości 50 cm od soczewki rozpraszającej o ogniskowej 40 cm . Za soczewką w odległości 30 cm znajduje się zwierciadło wypukłe o ogniskowej 15 cm . Określ położenie, orientację i rozmiar końcowego obrazu.

105. Dwa zwierciadła wklęsłe znajdują się naprzeciwko siebie, jedno z nich ma mały otwór w środku. Moneta leży na dolnym zwierciadle (zob. poniższy rysunek). Gdy patrzysz z boku, nad otworem widać obraz rzeczywisty monety. Wytłumacz, jak to jest możliwe.



106. Lampa o wysokości 5 cm znajduje się w odległości 40 cm od soczewki skupiającej o ogniskowej 20 cm . W odległości 15 cm za soczewką znajduje się płaskie zwierciadło. Gdzie widzisz obraz, gdy patrzysz na zwierciadło?

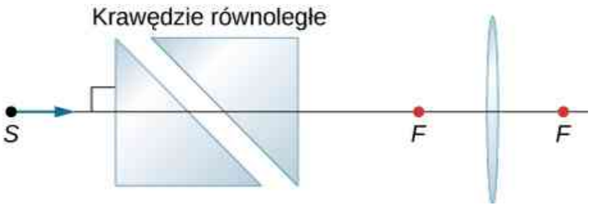
107. Równoległe promienie z odległego źródła padają na soczewkę skupiającą o ogniskowej 20 cm pod kątem 15° względem poziomu. Znajdź położenie obrazu rzeczywistego obserwowanego na ekranie znajdującym się na płaszczyźnie ogniskowej.

108. Równoległe promienie z odległego źródła padają na soczewkę rozpraszającą o ogniskowej 20 cm pod kątem 10° względem poziomu. Jeśli będziesz patrzył przez soczewkę, to gdzie w płaszczyźnie pionowej powinien pojawić się obraz?

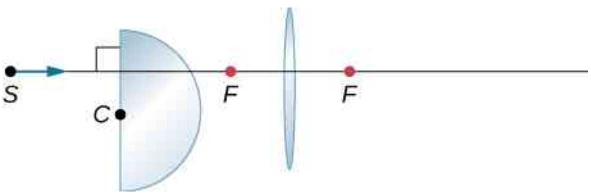
109. Żarówkę umieszczono w odległości 10 cm od zwierciadła płaskiego, które znajduje się naprzeciwko zwierciadła wypukłego o promieniu krzywizny 8 cm . Zwierciadło płaskie jest w odległości 30 cm od wierzchołka zwierciadła wypukłego. Znajdź położenie dwóch obrazów w zwierciadle wypukłym. Czy istnieją inne obrazy? Jeżeli tak, to gdzie się znajdują?

110. Punktowe źródło światła znajduje się w odległości 50 cm od soczewki skupiającej o ogniskowej 30 cm . Zwierciadło wklęsłe o ogniskowej 20 cm jest w odległości 25 cm za soczewką. Gdzie powstaje końcowy obraz i jakie są jego powiększenie oraz orientacja?

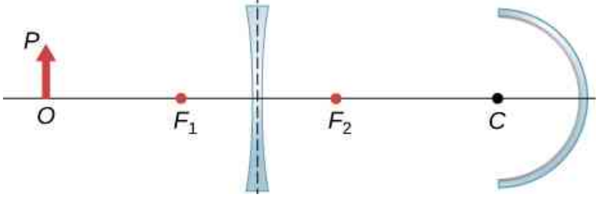
111. Dokończ konstrukcję biegu promieni, aby dowiedzieć się, w jaki sposób poziomy promień wychodzący z punktu S rozchodzi się za soczewką. Przyjmij, że współczynnik załamania szkła, z którego wykonano pryzmat, wynosi 1,5 .



112. Dokończ konstrukcję biegu promieni i narysuj bieg poziomego promienia z punktu S po przejściu przez soczewkę. Przyjmij, że współczynnik załamania szkła wynosi 1,55 .

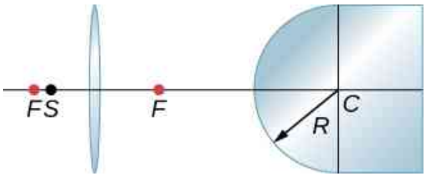


113. Dokończ konstrukcję biegu promieni, aby otrzymać końcowy obraz.



114. Znajdź punkt w szkle, gdzie promienie wychodzące z punktu S skupiają się po załamaniu w soczewce

i na wypukłej granicy pomiędzy powietrzem i szkłem. Wykonaj niezbędną konstrukcję biegu promieni. Promień krzywizny powierzchni załamującej szkła R określ za pomocą linijki.



115. Soczewka rozpraszająca ma ogniskową $20\,\text{cm}$. Jaka jest jej zdolność skupiająca Z w dioptriach?

116. Dwie soczewki o ogniskowych f_1 i f_2 są sklejone razem przeźroczystym materiałem o pomijalnej grubości. Wykaż, że łączna zdolność skupiająca obydwu soczewek stanowi po prostu ich sumę.

117. Jakie będzie powiększenie kątowe soczewki wypukłej o ogniskowej $2{,}5\,\text{cm}$?

118. Jaki jest wzór na powiększenie kątowe soczewki wypukłej o ogniskowej f, jeżeli oko obserwatora jest bardzo blisko soczewki, a punkt bliży znajduje się w odległości D od oka?

ZADANIA DODATKOWE

119. Za pomocą linijki i kątomierza narysuj promienie, aby znaleźć obrazy w następujących przypadkach:
a. punktowy przedmiot umieszczony na osi zwierciadła wklęsłego w odległości mniejszej od ogniskowej od wierzchołka zwierciadła;
b. punktowy przedmiot umieszczony na osi zwierciadła wklęsłego w odległości większej od ogniskowej od wierzchołka zwierciadła;
c. punktowy przedmiot umieszczony na osi zwierciadła wypukłego w odległości mniejszej od ogniskowej od wierzchołka zwierciadła;
d. punktowy przedmiot umieszczony na osi zwierciadła wypukłego w odległości większej od ogniskowej od wierzchołka zwierciadła.
e. Powtórz (a)–(d) dla punktowego przedmiotu umieszczonego poza osią zwierciadła.

120. Gdzie powinien być umieszczony przedmiot o wysokości $3\,\text{cm}$ naprzeciwko wklęsłego zwierciadła o promieniu $20\,\text{cm}$, aby powstał jego obraz rzeczywisty o wysokości $2\,\text{cm}$?

121. Przedmiot o wysokości $3\,\text{cm}$ umieszczono w odległości $5\,\text{cm}$ od wypukłego zwierciadła o promieniu $20\,\text{cm}$. Gdzie powstanie obraz? Jaka jest wysokość obrazu? Jaka jest jego orientacja?

122. Szukasz zwierciadła, które pozwoli ci zobaczyć czterokrotnie powiększony obraz pozorny przedmiotu znajdującego się w odległości $5\,\text{cm}$ od wierzchołka zwierciadła. Jakiego rodzaju zwierciadła potrzebujesz? Jaki powinien być promień krzywizny tego zwierciadła?

123. Wyprowadź następujące równanie dla wypukłego zwierciadła

$$\frac{1}{VP} - \frac{1}{VO} = -\frac{1}{VF},$$

gdzie VP jest odległością przedmiotu P od wierzchołka V, VO jest odległością obrazu O od wierzchołka V, a VF jest odległością ogniska F od wierzchołka V. (Wskazówka: Zastosuj układ trójkątów podobnych).

124. a. Narysuj promienie, aby utworzyć obraz pionowego przedmiotu znajdującego się w odległości większej niż ogniskowa na osi optycznej soczewki skupiającej;
b. Stosując zasady geometrii, udowodnij, że powiększenie p jest wyrażone równaniem: $p = h_\text{o} \big/ h_\text{p} = -d_\text{o} \big/ d_\text{p}$.

125. Zastosuj inny rysunek dla sytuacji z poprzedniego zadania, aby wyprowadzić równanie cienkiej soczewki: $1 \big/ d_\text{p} + 1 / d_\text{o} = 1 / f$.

126. Fotografujesz osobę mającą $2\,\text{m}$ wzrostu aparatem z obiektywem o ogniskowej $5\,\text{cm}$. Wysokość obrazu rejestrowanego na kliszy fotograficznej nie może być większa niż $2\,\text{cm}$.
a. W jakiej najmniejszej odległości od obiektywu może stanąć fotografowana osoba?
b. Jaka powinna być odległość obiektywu od kliszy fotograficznej dla odległości z podpunktu (a)?

127. Oblicz ogniskową cienkiej soczewki płasko-wypukłej, jeśli przednia powierzchnia tej soczewki jest płaska, a tylna ma promień krzywizny $R_2 = -35\,\text{cm}$. Przyjmij, że współczynnik załamania światła dla tej soczewki jest równy $1{,}5$.

128. Oblicz ogniskową dwuwypukłej soczewki o promieniach krzywizny $R_1 = 20\,\text{cm}$ i $R_2 = 15\,\text{cm}$. Przyjmij, że współczynnik załamania światła dla soczewki jest równy $1{,}5$.

129. Krótkowidz nie widzi wyraźnie przedmiotów znajdujących się w odległości większej niż $20\,\text{cm}$. Jak blisko lustra musi stanąć ten mężczyzna, aby widzieć dokładnie, co robi w trakcie golenia?

130. Mama widzi, że na recepcie przepisano dla jej dziecka soczewki kontaktowe o zdolności skupiającej $0{,}75\,\text{D}$. W jakiej odległości znajduje się punkt bliży dziecka?

131. Powtórz poprzednie zadanie dla okularów znajdu-

jących się w odległości $2{,}2\ \mathrm{cm}$ od oczu.

132. Osobie krótkowzrocznej przepisano soczewki kontaktowe o zdolności skupiającej $-4\,\mathrm{D}$. Punkt dali dla tej osoby znajduje się w odległości $22{,}5\ \mathrm{cm}$. Jaka jest zdolność skupiająca warstwy cieczy łzowej pomiędzy rogówką a soczewką kontaktową, jeśli korekcja z udziałem tej warstwy jest idealna?

133. **Nieracjonalne wyniki.** Chłopiec ma punkt bliży w odległości $50\ \mathrm{cm}$, a punkt dali w odległości $500\ \mathrm{cm}$. Czy soczewki o zdolności skupiającej $-4\,\mathrm{D}$ skorygują jego punkt dali aż do nieskończoności?

134. Oblicz kątowe powiększenie obrazu utworzonego przez szkło powiększające o ogniskowej $f = 5\ \mathrm{cm}$, jeśli przedmiot znajduje się w odległości $d_{\mathrm{p}} = 4\ \mathrm{cm}$ od soczewki, a soczewka znajduje się blisko oka.

135. Ogniskowe obiektywu i okularu mikroskopu są równe odpowiednio $2{,}5\ \mathrm{cm}$ oraz $10\ \mathrm{cm}$ i znajdują się w odległości $12\ \mathrm{cm}$ od siebie. Przedmiot o wielkości $70\,\mathrm{\mu m}$ znajduje się w odległości $6\ \mathrm{cm}$ od obiektywu. Jaka jest wielkość obrazu pozornego tworzonego przez ten układ optyczny?

136. Używając konstrukcji biegu promieni w odpowiedniej skali, znajdź położenie obrazu na siatkówce oka, jeśli soczewka oka ma ogniskową $2{,}5\ \mathrm{cm}$, a punkt bliży dla oka znajduje się w odległości $24\ \mathrm{cm}$. Wskazówka: Umieść przedmiot w punkcie bliży oka.

137. Ogniskowe obiektywu i okularu mikroskopu wynoszą odpowiednio $3\ \mathrm{cm}$ oraz $10\ \mathrm{cm}$. Ustal, jaka powinna być odległość pomiędzy obiektywem i okularem, jeśli ten układ optyczny ma dawać 10-krotne powiększenie.

138. U pewnego dalekowidza punkt bliży znajduje się w odległości $100\ \mathrm{cm}$. Jak daleko przed lub za siatkówką oka powstaje obraz przedmiotu umieszczonego $25\ \mathrm{cm}$ od oczu tego dalekowidza? Przyjmij, że odległość rogówki od siatkówki oka wynosi $2{,}5\ \mathrm{cm}$.

139. Punkt dali u osoby krótkowzrocznej znajduje się w odległości $80\ \mathrm{cm}$.

a. Jakiego rodzaju soczewek korekcyjnych potrzebuje ta osoba, jeśli soczewki muszą być w odległości $1{,}5\ \mathrm{cm}$ od oczu?

b. Jaka byłaby zdolność skupiająca soczewek kontaktowych dla tej osoby? Załóż, że odległość soczewek kontaktowych od oczu wynosi zero.

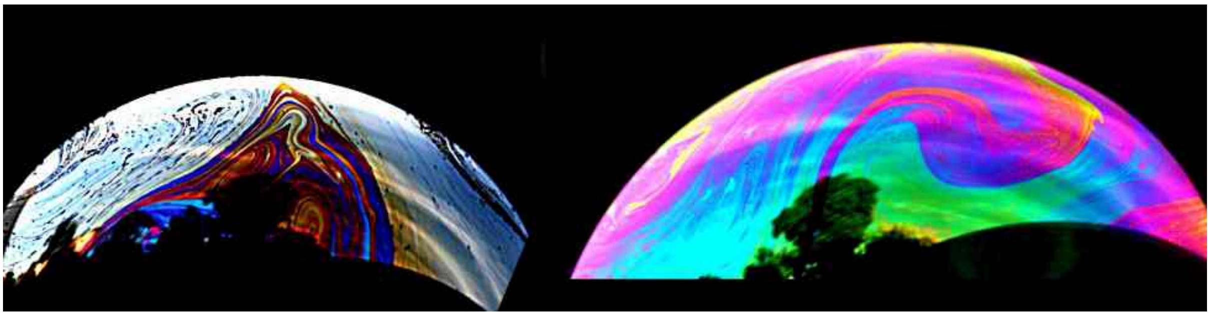
140. W teleskopie obiektywem jest zwierciadło wklęsłe o promieniu krzywizny równym $2\,\mathrm{m}$, a okularem jest zwierciadło wypukłe o ogniskowej $5\ \mathrm{cm}$. Oblicz, jaką pozorną wielkość ma obserwowane przezeń 25-metrowe drzewo znajdujące się w odległości $10\ \mathrm{km}$.

141. Dwie gwiazdy odległe od siebie o $10^9\ \mathrm{km}$ są obserwowane przez teleskop jako niezależne obiekty w kącie 10^{-5} radianów. Jeśli ogniskowe okularu i obiektywu teleskopu są równe odpowiednio $1{,}5\ \mathrm{cm}$ i $3\,\mathrm{m}$, to w jakiej odległości od obserwatora znajdują się gwiazdy?

142. Jaka jest średnica kątowa Księżyca oglądanego przez lornetkę o ogniskowej okularu $1{,}2\ \mathrm{cm}$ i ogniskowej obiektywu $8\ \mathrm{cm}$? Przyjmij, że promień Księżyca wynosi $1{,}74 \cdot 10^6\ \mathrm{m}$, a odległość Księżyca od obserwatora $3{,}8 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$.

143. Nieznana planeta znajdująca się w odległości $10^{12}\ \mathrm{m}$ od Ziemi jest obserwowana przez teleskop, którego ogniskowa okularu wynosi $1\ \mathrm{cm}$, a ogniskowa obiektywu wynosi $1\ \mathrm{m}$. Jeśli w teleskopie ta odległa planeta jest obserwowana w kącie 10^{-5} radianów, to jakie ma prawdziwe rozmiary?

3 | INTERFERENCJA



Rysunek 3.1 Bańki mydlane mają postać sfer o bardzo cienkich ściankach, utworzonych przez przezroczystą ciecz. Obserwowane kolory nie są wynikiem zafarbowania ani zabarwienia cieczy, ale efektem interferencji światła, podczas której wzmacniane są fale o długościach zależnych od grubości błonki.

Treść rozdziału

Wstęp

Interferencja (czyli nakładanie się lub superpozycja fal) jest zjawiskiem, w którym najbardziej ujawnia się falowa natura światła. Cechy fal są łatwe do zaobserwowania, gdy światło oddziałuje z obiektami, których rozmiar jest porównywalny z długością jego fali. Zjawisko interferencji obserwujemy dla wszystkich rodzajów fal, np. fal powstających na wodzie lub światła słonecznego.

Jeśli kiedykolwiek widzieliście mieniące się różnymi kolorami bańki mydlane w świetle słonecznym i zastanawialiście się, w jaki sposób woda z mydłem może wytworzyć kolor czerwony, niebieski czy zielony, to zetknęliście się z jednym ze zjawisk, które może być wytłumaczone tylko falową naturą światła (patrz Rysunek 3.1). Podobnie jest w przypadku kolorów obserwowanych na plamie benzyny rozlanej na wodzie lub kolorowych refleksów obserwowanych na powierzchni płyt CD lub DVD. Te i inne interesujące zjawiska optyczne nie mogą być w pełni wyjaśnione w ramach optyki geometrycznej. W takich przypadkach światło oddziałuje z przedmiotami, przejawiając w sposób szczególny swoją falową naturę. Dział optyki, który opisuje zachowanie się światła wskazujące na jego naturę falową, nazywamy optyką falową (czasami również optyką fizyczną). Właśnie takie właściwości światła będą omawiane w tym rozdziale.

3.1 | Doświadczenie Younga z dwiema szczelinami

Cel dydaktyczny

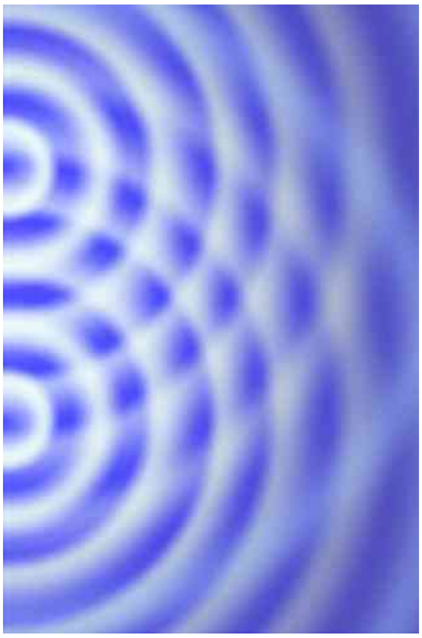
W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zjawisko interferencji;
- określać warunki konstruktywnej i destruktywnej interferencji na dwóch szczelinach.

Holenderski fizyk **Christiaan Huygens (1629–1695)**, w przeciwieństwie do Isaaca Newtona, pojmował światło jako falę. Newton cieszył się wówczas ogromnym szacunkiem i jego rozumienie światła było uznawane jako obowiązujące; sam fakt, że światło podlegało zasadzie Huygensa, nie mógł być uznany za bezpośredni dowód, że jest falą. Powszechna

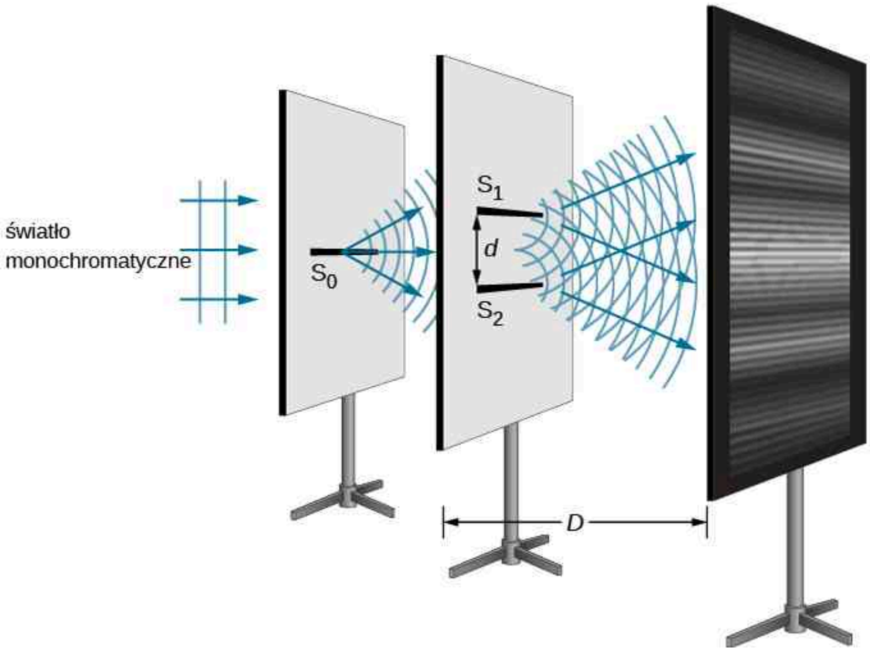
akceptacja falowej natury światła nastąpiła dopiero wiele lat później, w 1801 roku, kiedy angielski fizyk i lekarz **Thomas Young (1773–1829)** zademonstrował efekt interferencji w swoim słynnym doświadczeniu, w którym światło przechodziło przez dwie szczeliny.

Fale światła pochodzące z więcej niż jednego źródła mogą interferować w sposób analogiczny do fal na wodzie (patrz Rysunek 3.2). Jeśli światło jest falą (a wiemy, że jest falą elektromagnetyczną), to powinno po spełnieniu odpowiednich warunków także wykazywać efekty interferencyjne. W doświadczeniu Younga światło słoneczne było przepuszczane przez pojedynczy **mały otwór** (ang. **pinhole**) w pierwszej przesłonie, a następnie trafiało na dwa małe otwory w drugiej przesłonie. Światło wychodzące z tych dwóch otworów padało na ekran, na którym można było zaobserwować obraz, składający się z jasnych i ciemnych obszarów. Obraz ten, nazywany **obrazem interferencyjnym** (ang. **interference pattern**), może być wyjaśniony tylko efektami interferencyjnymi, czyli wynikającymi z nakładania się fal.



Rysunek 3.2 Fotografia obrazu interferencyjnego wytworzonego przez fale kołowe w specjalnym zbiorniku z wodą do badania właściwości fal (ang. **ripple tank**). Dwa cienkie pręty zamocowane pionowo poruszają się w górę i w dół, dotykając cyklicznie powierzchni wody. Pręty oscylują cyklicznie, wytwarzają rozchodzącą się na wodzie falę kołową. Punkty, w których woda jest spokojna, odpowiadają interferencji destruktywnej.

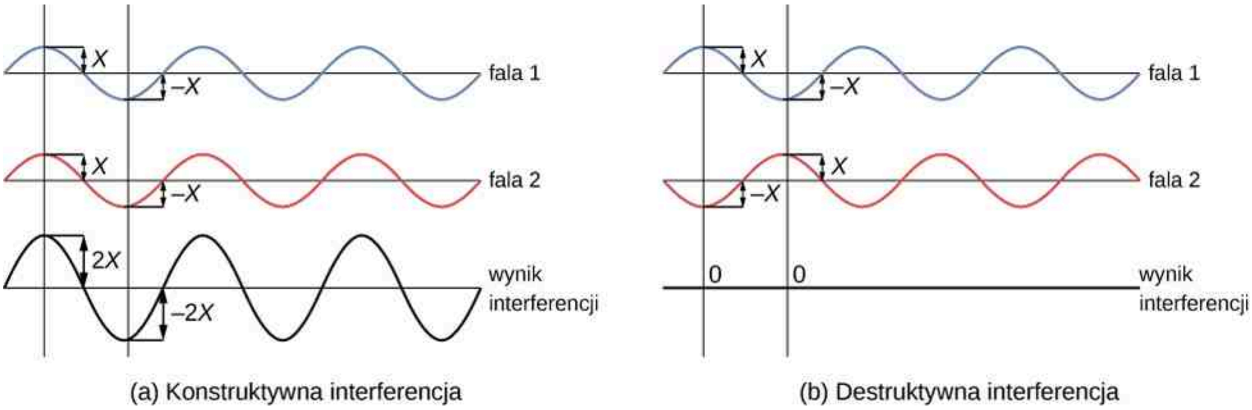
Zjawisko interferencji na dwóch szczelinach możemy przeanalizować, posługując się Rysunkiem 3.3, który przedstawia eksperyment analogiczny do doświadczenia Younga. **Światło monochromatyczne** (ang. **monochromatic light**) pada na pierwszą szczelinę S_0, a opuszczając ją pada na dwie kolejne, S_1 i S_2, równoodległe od S_0. Obraz widoczny na ekranie, składający się z ciemnych i jasnych **prążków interferencyjnych** (ang. **interference fringes**), jest wynikiem interferencji światła przechodzącego przez szczeliny S_1 i S_2. Zakładamy, że wszystkie szczeliny są odpowiednio wąskie, tak że każdy ich punkt może być potraktowany jako punktowe źródło półkolistych fal wtórnych (patrz zasada Huygensa w rozdziale Natura światła). Odległość pomiędzy szczelinami S_1 i S_2 wynosi d ($d \geq 1\ \mathrm{mm}$), natomiast odległość pomiędzy ekranem a szczelinami w drugiej przesłonie D ($\approx 1\ \mathrm{m}$) jest dużo większa niż d.



Rysunek 3.3 Doświadczenie interferencyjne z dwiema szczelinami dla monochromatycznego źródła światła i wąskich szczelin. Na ekranie są widoczne prążki interferencyjne, powstałe wskutek interferencji półkolistych fal wtórnych, wychodzących ze szczelin S_1 i S_2 .

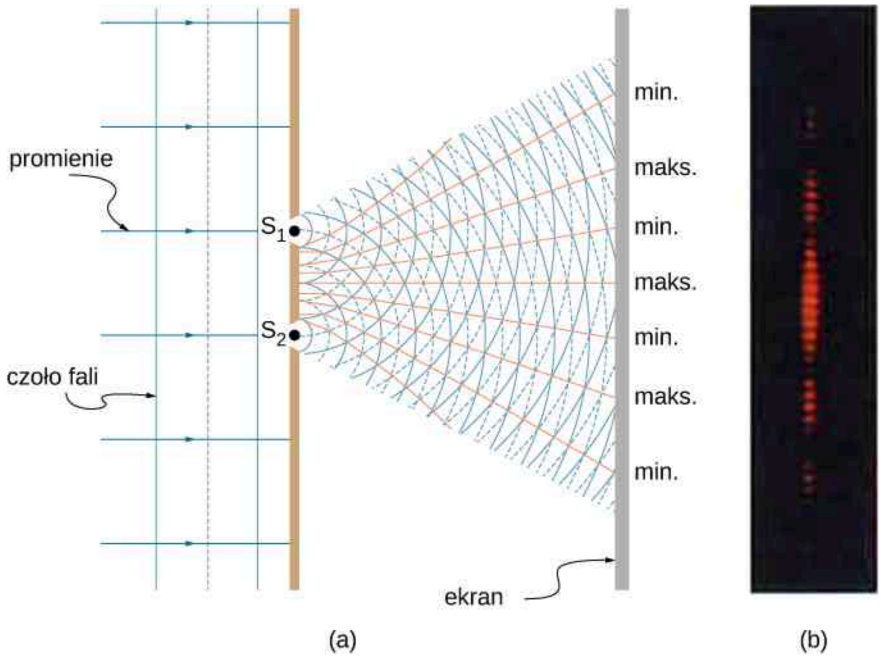
Skoro założyliśmy, że każdy punkt szczeliny możemy uznać za punktowe źródło światła monochromatycznego, to fale wtórne wychodzące ze szczelin S_1 i S_2 zawsze utrzymują stałe przesunięcie w fazie (w tym przypadku zerowe, bo szczeliny S_1 i S_2 są równoodległe od szczeliny S_0) i mają tę samą częstotliwość. O takich źródłach S_1 i S_2 mówimy, że są koherentne. Natomiast **fale koherentne (spójne)** (ang. **coherent waves**) to takie fale, które mają jednakową częstotliwość oraz są w fazie (wykazują zerowe przesunięcie w fazie) lub ich przesunięcie w fazie jest niezmienne w czasie. **Fale niekoherentne (niespójne)** (ang. **incoherent waves**) to fale o różnej częstotliwości lub zmiennym w czasie przesunięciu w fazie, na przykład wtedy, gdy szczeliny S_1 i S_2 oświetlimy dwoma niezależnymi źródłami światła zamiast pojedynczym źródłem S_0. Dwa niezależne źródła światła (mogą to być nawet dwa różne fragmenty tej samej żarówki lub dwa różne miejsca na Słońcu) zwykle nie emitują światła w sposób zgodny, czyli są źródłami niekoherentnymi. W omawianym przez nas przypadku światło wychodzące z dwóch szczelin nie tylko jest koherentne, lecz także amplituda fal pochodzących z tych dwóch punktowych źródeł jest identyczna (szczeliny S_1 i S_2 są równoodległe od szczeliny S_0).

Young używał światła słonecznego, dla którego każda fala o różnej długości daje inny obraz interferencyjny, dlatego też efekt interferencji było dość trudno zaobserwować. Aby lepiej wyjaśnić zjawisko interferencji na dwóch szczelinach, w naszym opisie użyjemy światła monochromatycznego (światło złożone z fal mających jednakową długość fali λ). Rysunek 3.4 przedstawia przypadki idealnie konstruktywnej i destruktywnej interferencji dwóch fal mających tę samą długość i amplitudę.



Rysunek 3.4 Wychylenia z położenia równowagi (w przypadku fal mechanicznych) lub natężenia pól elektrycznych (w przypadku fal elektromagnetycznych) się dodają – zgodnie z zasadą superpozycji. (a) Idealnie konstruktywna interferencja ma miejsce, gdy dwie identyczne fale spotykają się w fazie. (b) Idealnie destruktywna interferencja zachodzi, gdy dwie identyczne fale spotykają się w przeciwfazie, tzn. gdy ich przesunięcie fazowe jest równe połowie długości fali.

Gdy światło przechodzi przez wąskie szczeliny, szczeliny te stają się źródłem fal koherentnych i światło rozchodzi się w postaci półkolistych fal, co jest pokazane na Rysunku 3.5 (a). Idealnie konstruktywna interferencja zachodzi, gdy maksimum ujemnego wychylenia jednej fali (tzw. „dolina”) spotyka się z „doliną” drugiej fali lub gdy maksimum wychylenia dodatniego (tzw. „górka”) spotyka się z „górką” drugiej fali. Idealnie destruktywna interferencja ma natomiast miejsce, gdy „górka” jednej fali spotyka się z „doliną” drugiej fali. Widziany przez nas obraz interferencyjny powstaje na ekranie, od którego światło odbija się w kierunku naszych oczu. Analogiczny obraz interferencyjny dla fal mechanicznych na wodzie przedstawiony został na Rysunku 3.2. Należy zwrócić uwagę, że obszary konstruktywnej i destruktywnej interferencji znajdują się pod dobrze określonymi kątami w stosunku do kierunku rozchodzenia się fali padającej. Te szczególne wartości kątów – jak przekonamy się w dalszej części rozdziału – zależą od długości fali i odległości pomiędzy szczelinami.

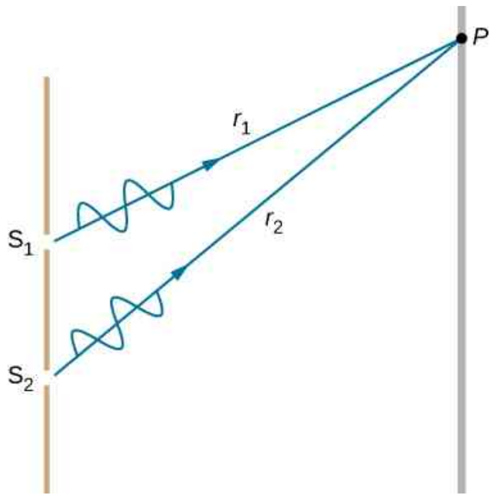


Rysunek 3.5 Dwie szczeliny są źródłami fal koherentnych, które ulegają interferencji. (a) Światło ugina się na każdej ze szczelin (ulega dyfrakcji) – efekt ten jest widoczny, ponieważ szczeliny są wąskie – a następnie się rozprzestrzenia. Fale wychodzące z tych szczelin nakładają się (ulegają superpozycji) i interferują – konstruktywnie lub destruktywnie (wzdłuż jasnopomarańczowych linii). (b) Kiedy światło, które przeszło przez te dwie szczeliny, dotrze do ekranu, możemy zaobserwować pokazany obraz interferencyjny (interferencja konstruktywna zachodzi w miejscach, w których widzimy jasne prążki, a destruktywna tam, gdzie widoczne są ciemne prążki). Obraz ten będziemy widzieć tylko wtedy, gdy światło dotrze do ekranu i zostanie odbite w kierunku naszych oczu.

Aby wyjaśnić obraz interferencyjny pochodzący od dwóch szczelin, zastanówmy się, w jaki sposób dwie fale o tej samej długości fali przebiegają drogę ze szczelin do ekranu (patrz Rysunek 3.6). Każda ze szczelin jest w innej odległości (długości promieni r_1 i r_2 są różne) od wybranego punktu P na ekranie. Stąd w tych różnych drogach optycznych (będących w tym przypadku odcinkami o dwóch różnych długościach, bo przyjmujemy tu, że $n = 1$) zmieszczą się różne wielokrotności długości fali. Fale emitowane ze szczelin są na początku zgodne w fazie („górka” z „górką”), ale do pewnych punktów na ekranie mogą dotrzeć w przeciwfazie („górka” z „doliną”); zachodzi to wówczas, gdy drogi optyczne tych dwóch fal różnią się o połowę długości fali, co odpowiada destruktywnej interferencji (wygaszeniu interferencyjnemu). Jeśli zaś różnica dróg optycznych tych fal jest równa całej długości fali, to fale spotkają się na ekranie w fazie („górka” z „górką”), co odpowiada konstruktywnej interferencji (wzmocnieniu interferencyjnemu). Warunki te można sformułować bardziej ogólnie, mianowicie, jeśli różnica dróg optycznych dwóch promieni świetlnych jest równa którejkolwiek nieparzystej wielokrotności połowy długości fali (np. $-5\lambda / 2$, $-3\lambda / 2$, $-\lambda / 2$, $\lambda / 2$, $3\lambda / 2$, $5\lambda / 2$, itd.), to zachodzi interferencja destruktywna. Podobnie, jeśli różnica dróg optycznych promieni równa się każdej całkowitej wielokrotności długości fali (np. -3λ, -2λ, $-\lambda$, 0, λ, 2λ, 3λ, itd.), zachodzi interferencja konstruktywna. Warunki te mogą być zapisane w postaci równań

$$\Delta l = m\lambda, \text{ gdzie } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ (interferencja konstruktywna)}, \tag{3.1}$$

$$\Delta l = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \text{ gdzie } m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \text{ (interferencja destruktywna)}. \tag{3.2}$$



Rysunek 3.6 Fale pokonują różne drogi optyczne od szczelin do wybranego punktu P na ekranie. Destruktywna interferencja zachodzi na przykład wtedy, gdy jeden promień ma do przebycia dłuższą o połowę długości fali drogę optyczną od drugiego promienia – fale, wychodząc ze szczelin, są w fazie, na ekranie zaś spotykają się w przeciwfazie. Natomiast konstruktywna interferencja zachodzi na przykład, kiedy jeden promień ma do przebycia drogę optyczną dłuższą od drugiego promienia o całą długości fali – w tym przypadku fale są zgodne w fazie, zarówno wychodząc ze szczelin, jak i w miejscu spotkania się na ekranie.

3.2 | Matematyczny opis interferencji

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- określać wartości kątów, dla których powstają ciemne i jasne prążki w obrazie interferencyjnym pochodzącym od dwóch szczelin;
- określać położenie jasnych prążków na obrazie interferencyjnym.

Na Rysunku 3.7 (a) pokazane jest, w jaki sposób można określić różnicę dróg optycznych Δl dla promieni biegnących z dwóch szczelin do wybranego punktu na ekranie. Jeśli ekran położony jest w dużej odległości od szczelin w porównaniu z odległością pomiędzy nimi, wtedy kąt θ pomiędzy normalną do płaszczyzny szczelin a kierunkiem ich drogi

do punktu P (patrz Rysunek 3.7 (b)) jest prawie taki sam dla promieni biegnących z obu szczelin. Mówiąc inaczej, przy tym warunku można uznać, że promienie r_1 i r_2 biegną równolegle. Długości promieni r_1 i r_2 różnią się o Δl, co odpowiada odległości pomiędzy dwiema równoległymi przerywanymi liniami przedstawionymi na Rysunku 3.7 (b). Znana zależność trygonometryczna prowadzi do równania

$$\Delta l = d \sin \theta, \tag{3.3}$$

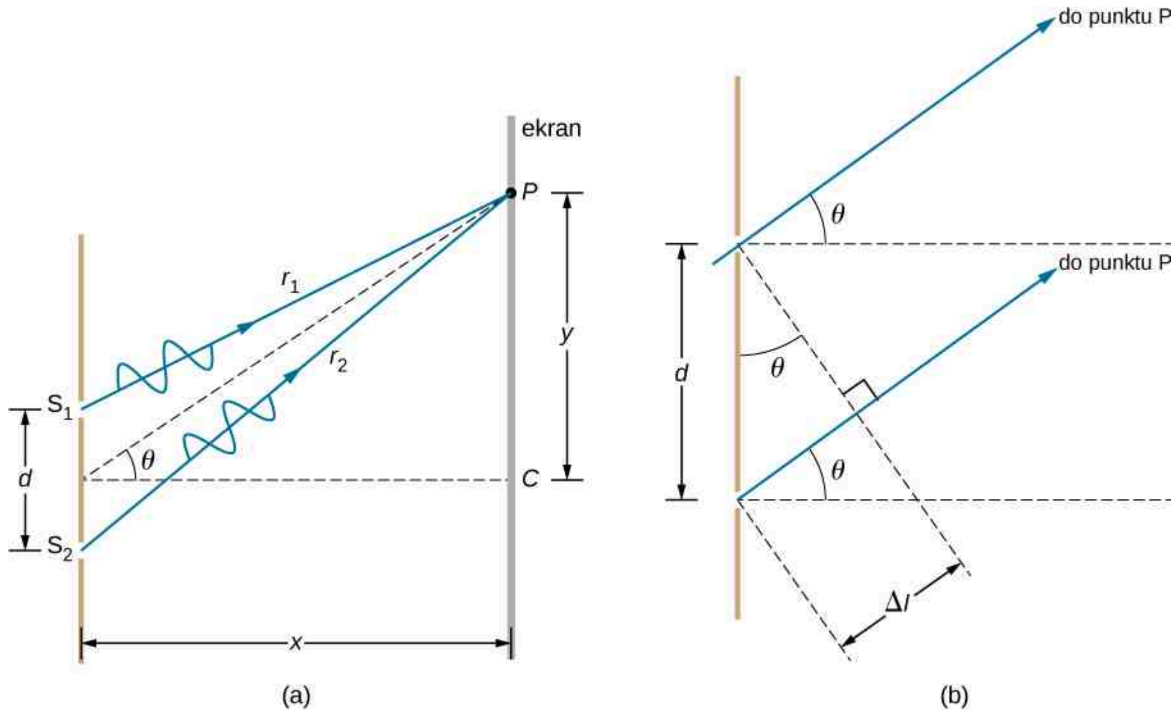
gdzie d jest odległością pomiędzy szczelinami. Korzystając z Równania 3.1, możemy wyprowadzić wzór ogólny na konstruktywną interferencję promieni pochodzących od dwóch wąskich szczelin, co odpowiada sytuacji, gdy różnica dróg optycznych jest całkowitą wielokrotnością długości fali

$$d \sin \theta = m\lambda, \text{ gdzie } m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \text{ (interferencja konstruktywna).} \tag{3.4}$$

Podobnie warunek na destruktywną interferencję promieni pochodzących od dwóch wąskich szczelin odpowiada sytuacji, gdy różnica dróg optycznych jest równa jakiejkolwiek nieparzystej wielokrotności połówek fali, co możemy zapisać w następującej postaci

$$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \text{ gdzie } m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \text{ (interferencja destruktywna),} \tag{3.5}$$

gdzie λ jest długością fali, d jest odległością pomiędzy szczelinami, a θ jest kątem pomiędzy normalną do płaszczyzny szczelin a kierunkiem biegu promieni do punktu P. Moduł (wartość bezwzględną) liczby całkowitej m będziemy nazywać **rzędem prążka interferencyjnego** (ang. order of interference fringe). Na przykład gdy $m = 4$, otrzymamy prążek interferencyjny czwartego rzędu.



Rysunek 3.7 (a) Promienie wychodzące ze szczelin S_1 i S_2 i spotykające się w punkcie P pokonują różne drogi. (b) Różnica dróg optycznych dla tych dwóch promieni wynosi Δl.

Otrzymane równania na konstruktywną i destruktywną interferencję fal pochodzących od dwóch szczelin wskazują, że obraz interferencyjny powinien składać się z usytuowanych naprzemiennie jasnych i ciemnych prążków. W przypadku, gdy szczeliny są poziome, światło po przejściu przez te szczeliny ugina się w obie strony względem kierunku padającej wiązki i tworzy na ekranie obraz, który składa się z prążków interferencyjnych – patrz Rysunek 3.8. Im mniejsza jest odległość pomiędzy szczelinami, tym większe wartości kątów, dla których pojawiają się prążki określonego rzędu.

Możemy się o tym przekonać, analizując równanie $d \sin \theta = m\lambda$, gdzie $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ Dla ustalonego λ i m, im mniejsze jest d, tym większy musi być $\sin \theta$ (a co za tym idzie również kąt θ), co wynika ze związku

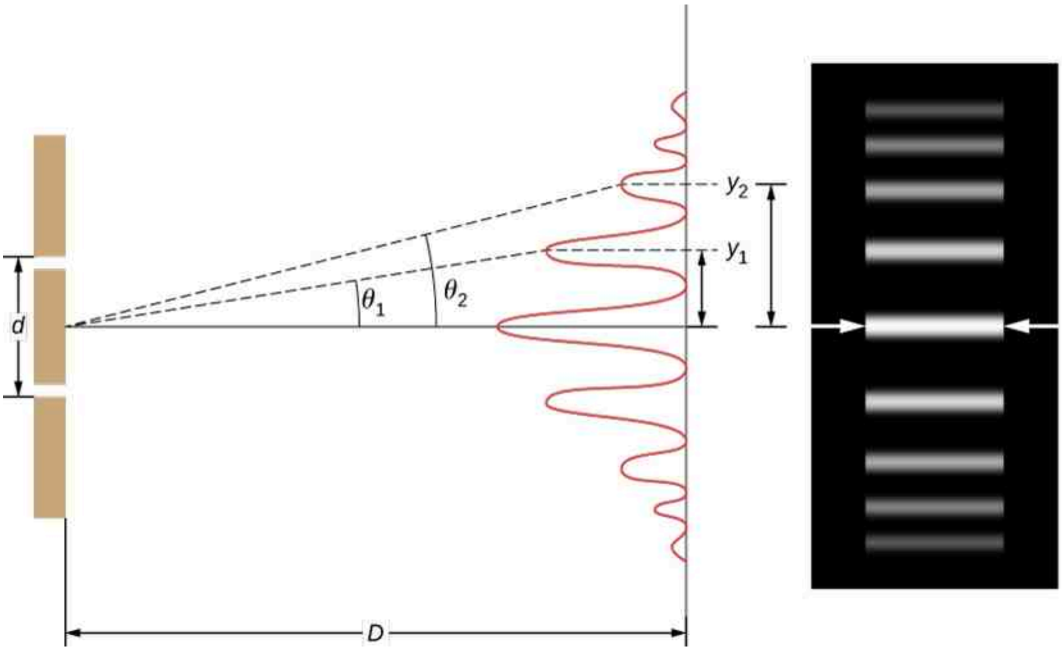
$\sin\theta = m\lambda / d$. Jest to zgodne z naszym wcześniejszym spostrzeżeniem, iż efekty falowe łatwiej zaobserwować, gdy obiekty mają rozmiary porównywalne z długością fali (tutaj odległość pomiędzy szczelinami d). Czyli im mniejsze d, tym większy kąt θ, zatem silniejszy efekt.

Popatrzmy raz jeszcze na Rysunek 3.8: wartość kąta θ jest zazwyczaj wystarczająco mała i wtedy $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx y_m / D$, gdzie y_m jest odległością od centralnego maksimum (prążka zerowego rzędu) do m-tego jasnego prążka, natomiast D jest odległością pomiędzy szczelinami a ekranem. Równanie to może być wtedy zapisane w następującej postaci

$$d\frac{y_m}{D} = m\lambda$$

lub

$$y_m = \frac{m\lambda D}{d}. \tag{3.6}$$



Rysunek 3.8 Jasność (natężenie) prążków w obrazie interferencyjnym pochodzącym od dwóch wąskich szczelin maleje wraz ze wzrostem wartości kąta θ. Na rysunku po prawej widzimy obraz interferencyjny składający się z ciemnych i jasnych prążków, powstały po przejściu światła przez dwie szczeliny.

Przykład 3.1

Obliczanie długości fali na podstawie obrazu interferencyjnego

Rozważmy światło, którego źródłem jest laser He-Ne, przechodzące przez dwie szczeliny oddalone od siebie o $0{,}01\ \text{mm}$, tworzące obraz interferencyjny, w którym trzeci jasny prążek leży pod kątem $10{,}95°$ względem kierunku padającej wiązki. Jaka jest długość fali światła laserowego?

Strategia rozwiązania

Należy tu przeanalizować zjawisko interferencji fal pochodzących z dwóch szczelin, które zostało przedstawione na Rysunku 3.8 i zauważyć, że trzeci jasny prążek jest prążkiem interferencji konstruktywnej trzeciego rzędu, co oznacza, że $m = 3$. Znamy $d = 0{,}01\ \text{mm}$ oraz $\theta = 10{,}95°$. Długość fali może być zatem obliczona z równania na interferencję konstruktywną (wzmocnienie interferencyjne) $d\sin\theta = m\lambda$.

Rozwiązanie

Przekształcając wzór $d\sin\theta = m\lambda$ ze względu na λ, otrzymujemy

$$\lambda = \frac{d \sin \theta}{m}.$$

Wstawiając teraz znane wielkości, otrzymamy

$$\lambda = \frac{0{,}01\,\text{mm} \cdot \sin 10{,}95^\circ}{3} = 6{,}33 \cdot 10^{-4}\ \text{mm} = 633\,\text{nm}\,.$$

Znaczenie

Otrzymany wynik (do trzech cyfr znaczących) odpowiada długości fali świetlnej emitowanej przez typowy laser He-Ne. Nie przez przypadek barwa światła lasera He-Ne jest podobna do barwy lampy neonowej, w której światło emitują wzbudzone atomy neonu. Bardziej istotny jest tutaj fakt, że obrazy interferencyjne mogą być wykorzystywane do wyznaczania wartości długości fali nieznanego źródła światła. Ta technika analityczna jest do dzisiaj wykorzystywana do badania spektrów fal elektromagnetycznych pochodzących z różnych źródeł. Dla prążka interferencyjnego danego rzędu wartość kąta wzmocnienia interferencyjnego rośnie wraz z długością fali λ, zgodnie z Równaniem 3.4, dlatego też na podstawie obrazów interferencyjnych można wyznaczać wartość długości badanej fali (dla różnych długości fal maksima interferencyjne będą występowały w innych miejscach).

Przykład 3.2

Określanie interferencji najwyższego rzędu

Obrazy interferencyjne nie posiadają nieskończonej liczby prążków, gdyż istnieje pewne ograniczenie maksymalnego rzędu prążka, który określony jest przez największą wartość modułu (wartości bezwzględnej) liczby m. Jaki jest najwyższy rząd interferencji konstruktywnej w układzie przedstawionym w poprzednim przykładzie?

Strategia rozwiązania

Równanie $d \sin \theta = m\lambda$ (gdzie $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots$) opisuje konstruktywną interferencję dla fal pochodzących z dwóch szczelin. Dla ustalonych wartości d i λ im większe m, tym większy jest $\sin \theta$. Jednocześnie maksymalna wartość, jaką może osiągnąć $\sin \theta$ to 1, czyli dla kąta 90° (wartości kątów większe od 90° oznaczają, że światło rozprzestrzenia się do tyłu i nie może tym samym dotrzeć do ekranu). Wyznaczymy teraz wartość m, dla której otrzymamy prążki najwyższego rzędu.

Rozwiązanie

Przekształcając zależność $d \sin \theta = m\lambda$ ze względu na m, otrzymujemy

$$m = \frac{d \sin \theta}{\lambda}.$$

Wstawiając $\sin \theta = 1$ i podstawiając wartości dla d i λ z poprzedniego przykładu, otrzymujemy

$$m = \frac{0{,}01\,\text{mm} \cdot 1}{633\,\text{nm}} \approx 15{,}8.$$

Zatem największa liczba całkowita m to 15, czyli $m = 15$.

Znaczenie

Liczba widocznych jasnych prążków zależy od wartości długości fali oraz odległości pomiędzy szczelinami. Liczba prążków jest bardzo duża dla dużej odległości pomiędzy szczelinami. Jednak pamiętamy (patrz Rozchodzenie się światła), że efekty interferencyjne pojawiają się, gdy fala pada na obiekty, których rozmiar nie jest dużo większy od długości fali. Dlatego też, gdy odległość pomiędzy szczelinami i szerokość samej szczeliny będą znacznie większe od długości fali, obraz interferencyjny na ekranie zmieni się i otrzymamy po prostu dwa jasne, szerokie prążki, będące obrazem szczelin, czyli to, co byśmy otrzymali korzystając z optyki geometrycznej. Musimy również zaznaczyć, że im większa odległość kolejnych prążków od prążka centralnego, tym ich jasność (natężenie) jest mniejsza. W rezultacie nie wszystkie prążki z wyliczonych 15 rzędów mogą być zaobserwowane.

3.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Pod jakimi kątami pojawią się jasne prążki pierwszego i drugiego rzędu w omawianym poprzednio przykładzie?

3.3 | Interferencja na wielu szczelinach

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

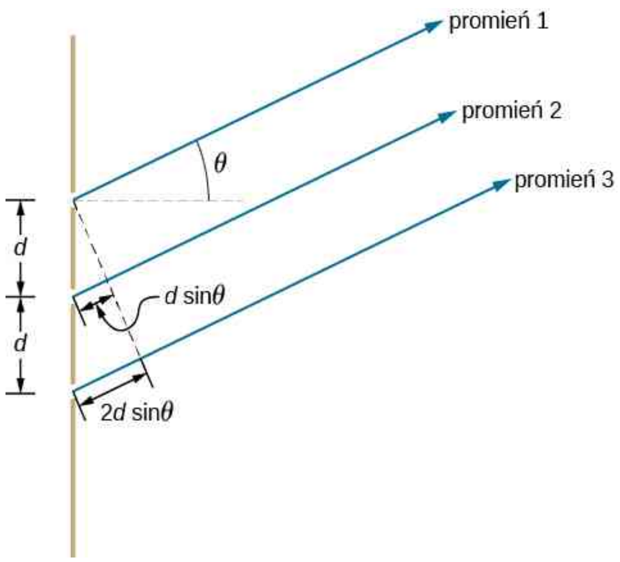
- wyznaczać położenie i natężenie pobocznych maksimów w obrazie interferencyjnym pochodzącym od wielu szczelin.

Analizując interferencję światła zachodzącą po jego przejściu przez dwie szczeliny, pokazaliśmy matematyczny opis interferencji oraz kontekst historyczny doświadczenia Thomasa Younga. Większość współczesnych zastosowań zjawiska interferencji na szczelinach wykorzystuje jednak nie dwie szczeliny, a dużo większą ich liczbę, z powodów praktycznych sięgającą nawet kilkunastu tysięcy. Optyczny element z tak dużą liczbą szczelin, nazywany siatką dyfrakcyjną, jest bardzo ważnym przyrządem stosowanym w analizie widmowej i zostanie szczegółowo omówiony w kolejnym rozdziale – Dyfrakcja. Analizę interferencji na wielu szczelinach oprzemy na naszej wiedzy uzyskanej dla przypadku dwóch szczelin ($N = 2$), zwiększając ich liczbę kolejno do trzech, czterech itd.

Na Rysunku 3.9 pokazany jest najprostszy przypadek interferencji na wielu szczelinach, czyli dla trzech szczelin ($N = 3$). Odległości pomiędzy kolejnymi szczelinami są równe i wynoszą d, a różnica długości dróg optycznych dla sąsiadujących promieni wynosi $d \sin \theta$ – tyle samo co w przypadku dwóch szczelin. Nową okolicznością jest tutaj różnica długości dróg optycznych dla promieni pochodzących z pierwszej i trzeciej szczeliny, która wynosi $2d \sin \theta$. Zauważmy, że warunek na konstruktywną interferencję pozostaje taki sam jak w przypadku dwóch szczelin

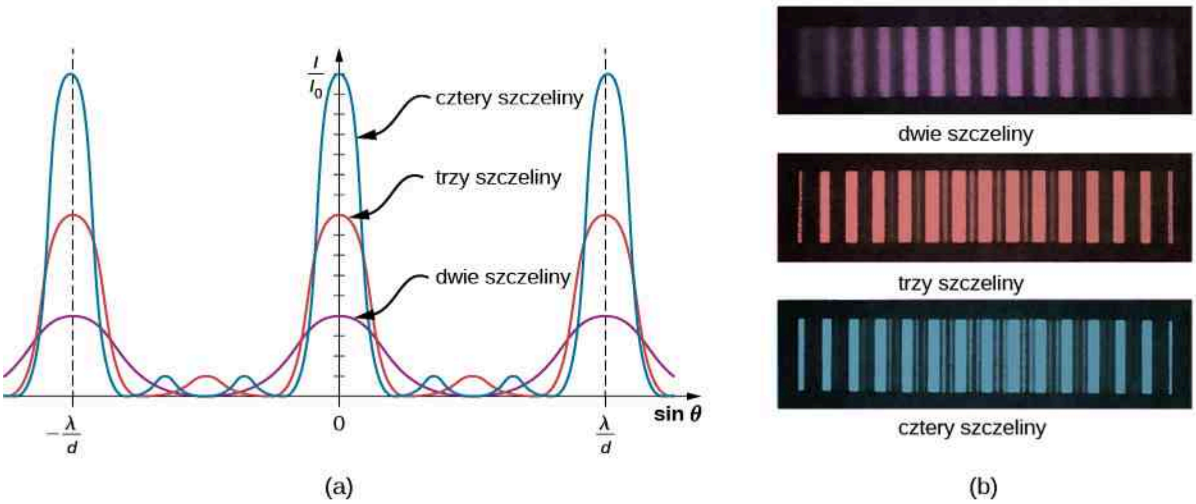
$$d \sin \theta = m\lambda.$$

Gdy ten warunek jest spełniony, $2d \sin \theta$ jest automatycznie wielokrotnością λ, zatem wszystkie promienie interferują konstruktywnie. Jasne prążki, które pojawią się dla wartości kąta θ, nazywamy **maksimum podstawowym** (ang. **principal maximum**). Ale co się stanie, gdy różnica długości dróg optycznych dla sąsiadujących promieni wyniesie $\lambda / 2$? Wtedy promienie wychodzące z pierwszej i drugiej szczeliny (pod kątem θ) interferują destruktywnie, równocześnie warunek na interferencję konstruktywną nadal pozostaje spełniony dla promienia pierwszego i trzeciego. Zatem, zamiast otrzymać interferencyjne minimum, jak byłoby w przypadku interferencji na dwóch szczelinach, otrzymujemy tzw. **maksimum poboczne** (ang. **secondary maximum**) o natężeniu mniejszym niż maksimum podstawowe.



Rysunek 3.9 Interferencja dla trzech szczelin. Różne pary wychodzących promieni mogą jednocześnie interferować konstruktywnie bądź destruktywnie, co prowadzi do powstawania pobocznych maksimów.

W przypadku ogólnym, dla N szczelin, maksima poboczne pojawią się nawet wtedy, gdy obecny będzie niesparowany promień, który nie zniknie w wyniku interferencji destruktywnej. Tak będzie dla $N - 2$ równomiernie rozłożonych maksimów pobocznych, usytuowanych pomiędzy maksimami podstawowymi. Amplituda fali elektromagnetycznej w maksimach pobocznych zmniejsza się proporcjonalnie do $1 / N$ w porównaniu do amplitudy fali w maksimum podstawowym. Natomiast natężenie światła, które jest proporcjonalne do kwadratu amplitudy fali, zmniejsza się proporcjonalnie do $1 / N^2$ w porównaniu do natężenia maksimum podstawowego. Jak jest pokazane na Rysunku 3.10, ciemny prążek pojawia pomiędzy każdą parą maksimów (podstawowym lub pobocznym). Gdy zwiększa się liczba szczelin, rośnie też liczba pojawiających się jasnych i ciemnych prążków pobocznych; równocześnie szerokość jasnych prążków otoczonych sąsiadującymi ciemnymi prążkami zmniejsza się. Wraz ze zwiększającą się liczbą szczelin zwiększa się natężenie prążków interferencyjnych (maksimów podstawowych) i jest ono proporcjonalne do N^2.



Rysunek 3.10 Obraz prążków interferencyjnych dla dwóch, trzech i czterech szczelin. Im większa jest liczba szczelin, tym więcej pojawia się maksimów pobocznych, ale jednocześnie maksimum podstawowe staje się węższe i jego natężenie rośnie. Wykres (a) i zdjęcie (b) prążków interferencyjnych.

3.4 | Interferencja w cienkich warstwach

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- omawiać zmianę fazy fali przy odbiciu;
- opisywać prążki interferencyjne powstałe w wyniku nakładania się fal odbitych pochodzących z tego samego źródła;
- wyjaśniać pojawianie się różnych kolorów przy odbiciu światła od cienkich warstw.

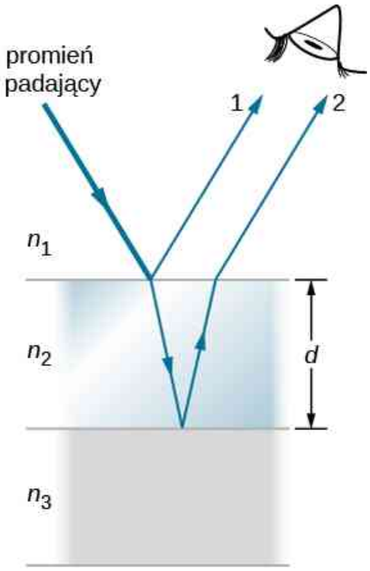
Wyraźne i intensywne kolory, które widzimy patrząc na rozlaną na wodzie plamę benzyny lub oświetlone bezpośrednim światłem słonecznym bańki mydlane, są wynikiem interferencji światła. Jaśniejsze kolory to te, dla których zachodzi interferencja konstruktywna. Interferują promienie odbite od różnych powierzchni cienkich warstw, stąd zjawisko to nazywane jest **interferencją w cienkich warstwach** (ang. **thin-film interference**).

Jak już było powiedziane, efekty interferencyjne ujawniają się najbardziej, gdy przedmioty, na które pada światło, mają rozmiary zbliżone do długości fal świetlnych. Cienkie warstwy to takie, których grubość d jest mniejsza niż kilka długości fali świetlnej λ. Wiemy, że kolor światła jest związany pośrednio z długością fali λ (a bezpośrednio z jej częstotliwością) oraz że wszystkie efekty interferencyjne zależą w pewnym stopniu od stosunku pomiędzy rozmiarem przedmiotu a wartością długości padającej na niego fali λ. Powinniśmy zatem spodziewać się występowania wzmocnienia światła o różnych kolorach dla różnych grubości cienkiej warstwy, o czym można przekonać się, analizując Rysunek 3.11.



Rysunek 3.11 Bańki mydlane ujawniają wyraźne i intensywne kolory, gdy oświetlimy je bezpośrednio światłem słonecznym. Źródło: Scott Robinson

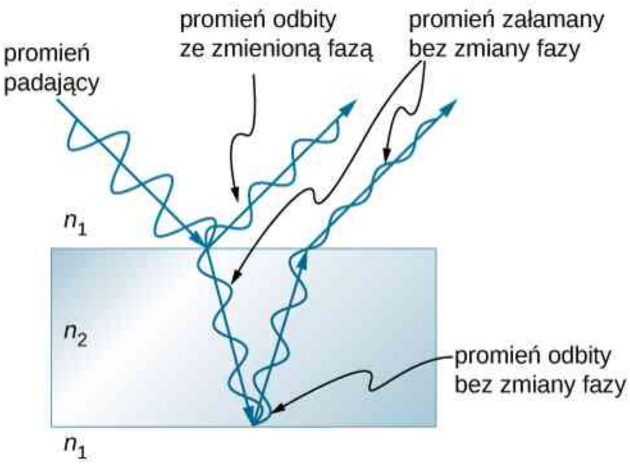
W jaki sposób możemy wyjaśnić zjawisko interferencji występujące w cienkich warstwach? Rysunek 3.12 pokazuje, jak mogą interferować promienie światła odbite od górnej i dolnej powierzchni cienkiej warstwy. Padające światło odbija się tylko częściowo od górnej powierzchni cienkiej warstwy (promień 1). Pozostała część przechodzi do cienkiej warstwy ulegając załamaniu, a następnie częściowo odbija się od jej dolnej powierzchni. Część światła odbitego od dolnej powierzchni warstwy przechodząc przez jej górną powierzchnię również ulega załamaniu (promień 2), a następnie interferuje ze światłem bezpośrednio od niej odbitym (promień 1). Promień 2, który dwukrotnie przeszedł przez cienką warstwę, ma do pokonania dłuższą drogę, zatem może być w fazie lub w przeciwfazie w stosunku do promienia 1 bezpośrednio odbitego od górnej powierzchni. Prześledźmy raz jeszcze przykład baniek mydlanych z Rysunku 3.11. Im ścianki baniek mydlanych są cieńsze, tym są one ciemniejsze. Dodatkowo, jeśli przyjrzymy się im dokładniej, zauważymy, że bańka staje się ciemna w miejscu, gdzie zazwyczaj pęka. Przypadek ten odpowiada właśnie sytuacji, gdy grubość cienkiej warstwy jest dużo mniejsza od długości fali, czyli $d \ll \lambda$, wówczas różnica długości dróg promienia 1 i 2 z Rysunku 3.12 jest pomijalnie mała. Dlaczego zatem obserwujemy interferencję destruktywną zamiast interferencji konstruktywnej? Wyjaśnieniem tego faktu jest to, że przy odbiciu fali od górnej powierzchni cienkiej warstwy (promień 1) następuje zmiana jej fazy, co będzie wyjaśnione dokładniej w następnej części tego podrozdziału.



Rysunek 3.12 Światło, które pada na cienką warstwę, częściowo się od niej odbija (promień 1), a częściowo wchodzi do środka, ulegając przy tym załamaniu. Promień załamany odbija się od dolnej powierzchni cienkiej warstwy, a następnie wychodzi z niej, również ulegając załamaniu (promień 2). Te dwa promienie (promień 1 i 2) interferują ze sobą, a wynik tej interferencji zależy od grubości cienkiej warstwy d oraz od współczynników załamania (n_1, n_2 i n_3).

Zmiany fazy fali świetlnej przy odbiciu

Już wcześniej przekonaliśmy się o tym (patrz rozdział Fale (https://cnx.org/content/m65833/latest/)), że fale mechaniczne przy odbiciu mogą zmieniać swoją fazę o $180°$. W omawianym tam przykładzie fala biegnąca w strunie odbija się w przeciwfazie (tj. następuje zmiana fazy fali o $180°$) w miejscu, w którym przymocowana jest cięższa struna. Natomiast w przypadku, gdy druga część struny jest lżejsza (lub – bardziej precyzyjnie – ma mniejszą gęstość liniową przy takiej samej średnicy jak jej pierwsza część), fala odbija się bez zmiany fazy. Dla fal świetlnych występuje analogiczny efekt, ale parametrem, który ma wówczas największy wpływ na zmianę fazy, jest różnica współczynników załamania dla tej fali dla dwóch ośrodków, na granicy których następuje odbicie. Zmiana fazy fali świetlnej o $180°$ lub π radianów następuje przy odbiciu od ośrodka o większym współczynniku załamania. Fala odbija się bez zmiany fazy w sytuacji, gdy odbicie następuje od ośrodka o mniejszym współczynniku załamania (patrz Rysunek 3.13). Z punktu widzenia falowej natury światła zmiana fazy jest równoważna różnicy dróg optycznych interferujących promieni wynoszącej $\pm\lambda / 2$. Zarówno różnica dróg optycznych, jak i współczynniki załamania ośrodków determinują wynik interferencji w cienkich warstwach.



Rysunek 3.13 Odbicie światła na granicy ośrodków, gdy światło biegnie z ośrodka o współczynniku załamania n_1 do ośrodka o współczynniku załamania n_2. W sytuacji, gdy $n_1 < n_2$, światło odbite od takiej powierzchni (tutaj górnej) zmienia fazę o π radianów, czyli o $180°$.

Jeśli cienka warstwa z Rysunku 3.12 jest ścianką bańki mydlanej (w rzeczywistości to cienka warstwa wody, której obie powierzchnie ograniczone są powietrzem), to zachodzi zmiana fazy o $180°$ odpowiadająca różnicy dróg optycznych równej $\lambda / 2$ dla promienia 1, ale nie dla promienia 2. Dlatego, gdy warstwa wody jest bardzo cienka, to różnica dróg optycznych pomiędzy promieniami jest pomijalnie mała; wówczas promienie te są dokładnie w przeciwfazie i interferencja destruktywna zachodzi dla dowolnej długości fali. Właśnie dlatego bańki mydlane wydają się wtedy ciemne. Grubość cienkiej warstwy w porównaniu z długością fal światła jest jednym z ważniejszych parametrów przy rozpatrywaniu interferencji w cienkich warstwach. Promień 2 na Rysunku 3.12 ma dłuższą drogę optyczną do pokonania niż promień 1. Dla światła padającego prostopadle do powierzchni promień 2 pokonuje drogę dłuższą o $2d$ niż promień 1 (ale jak opisaliśmy powyżej, ze względu na możliwą zmianę fazy fali zachodzącą przy jej odbiciu na granicy ośrodków, długość tej drogi nie musi być równa długości drogi optycznej). Kiedy różnica dróg optycznych będzie równa całkowitej wielokrotności długości fali lub nieparzystej wielokrotności połowy długości fali w danym ośrodku ($\lambda_n = \lambda / n$, gdzie λ jest długością fali w próżni, a n jest współczynnikiem załamania), zajdzie konstruktywna lub destruktywna interferencja, w zależności również od tego, czy nastąpi zmiana fazy przy odbiciu dla promienia 1 lub/i promienia 2.

Przykład 3.3

Obliczanie grubości warstwy antyrefleksyjnej

W profesjonalnych aparatach fotograficznych obiektywy są zbudowane z kilku lub nawet kilkunastu soczewek. Przechodzące przez nie światło może odbijać się od powierzchni każdej z tych soczewek, w rezultacie wyraźnie zmniejszając natężenie przechodzącego światła. Aby zminimalizować te odbicia, soczewki pokrywa się cienką warstwą fluorku magnezu (fluorytu), która powoduje interferencję destruktywną. Jaka może być najmniejsza grubość tej warstwy, jeśli jej współczynnik załamania wynosi $1{,}38$, a sama warstwa

została zaprojektowana tak, aby zminimalizować odbicie światła o długości fali $500\,\mathrm{nm}$ (światło słoneczne o takiej wartości długości fali ma największe natężenie ze wszystkich długości fal ze spektrum widzialnego)? Przyjmijmy, że współczynnik załamania szkła wynosi $1{,}52$.

Strategia rozwiązania

Rozważmy przykład z Rysunku 3.12 dla $n_1 = 1$, $n_2 = 1{,}38$ i $n_3 = 1{,}52$. Dla obu promieni, promienia 1 i promienia 2, przy ich odbiciu następuje przesunięcie fazy o $\lambda / 2$. Zatem, aby otrzymać destruktywną interferencję, promień 2 musi mieć do pokonania drogę optyczną dłuższą o dokładnie połowę długości fali w stosunku do promienia 1. Dla promieni, które padają prostopadle do powierzchni granicy ośrodków, różnica dróg geometrycznych wynosi $2d$.

Rozwiązanie

Dla naszego przypadku warunek na destruktywną interferencję ma postać

$$2d = \frac{\lambda_{n_2}}{2},$$

gdzie λ_{n_2} jest długością fali w cienkiej warstwie, daną zależnością $\lambda_{n_2} = \lambda / n_2$. Wtedy

$$2d = \frac{\lambda / n_2}{2}.$$

Wstawiając znane wielkości, możemy z tego równania wyliczyć d

$$d = \frac{\lambda / n_2}{4} = \frac{500\,\mathrm{nm} / 1{,}38}{4} = 99{,}6\,\mathrm{nm}.$$

Znaczenie

Cienkie warstwy, tak jak w tym przykładzie, są najbardziej efektywne w wygaszaniu promieni odbitych, gdy ich grubość jest jak najmniejsza. Wtedy, również dla większego zakresu kątów padania, fale odbite będzie cechować mniejsze natężenie. Takie cienkie warstwy nazywamy warstwami antyrefleksyjnymi (lub powłokami przeciwodblaskowymi). Mogą one jednak eliminować odbicie światła tylko częściowo, ponieważ fale o różnych długościach są wygaszane w różnym stopniu. Warstwy antyrefleksyjne są stosowane w szybach samochodowych, okularach przeciwsłonecznych czy obiektywach aparatów fotograficznych.

Związek pomiędzy różnicą dróg optycznych a zmianą fazy

Interferencja w cienkich warstwach jest całkowicie konstruktywna lub całkowicie destruktywna, gdy różnica dróg optycznych w danym ośrodku (tutaj rozpatrujemy przypadek szczególny, gdy współczynniki załamania ośrodków po obu stronach cienkiej warstwy są mniejsze niż współczynnik załamania dla cienkiej warstwy) jest równa całkowitej wielokrotności długości fali lub nieparzystej wielokrotności połowy długości fali. W rozpatrywanym przez nas przypadku, różnicę dróg optycznych dla fal padających prostopadle możemy zapisać w postaci

$$2d = \lambda_n, 2\lambda_n, 3\lambda_n, \ldots \text{ lub } 2d = \lambda_n / 2, 3\lambda_n / 2, 5\lambda_n / 2, \ldots$$

Aby się przekonać, czy interferencja będzie konstruktywna czy destruktywna w przypadku ogólnym, musimy również wiedzieć, czy podczas odbicia zachodzi przesunięcie fazy, czy też przesunięcie fazy nie zachodzi. Interferencja w cienkich warstwach zależy więc od grubości warstwy, długości fali światła oraz od współczynników załamania ośrodków, na granicy których zachodzi odbicie. Przykładowo, jeżeli światłem białym oświetlimy cienką warstwę o zmiennej grubości, to zaobserwujemy wzmocnione różne kolory (w przypadku najbardziej ogólnym będą to wszystkie kolory tęczy). Jest to przypadek konstruktywnej interferencji odpowiadającej długościom fal, dla których jest spełniony warunek na wzmocnienie fal dla danej grubości warstwy.

Przykład 3.4

Bańki mydlane

a. Jakie będą trzy najmniejsze grubości ścianek baniek mydlanych, dla których zaobserwujemy wzmocnioną barwę czerwoną o długości fali 650 nm? Przyjmijmy, że współczynnik załamania dla roztworu mydła jest taki sam jak dla wody.

b. Dla jakich trzech najmniejszych grubości ścianek baniek mydlanych otrzymamy interferencję destruktywną?

Strategia rozwiązania

Uznajmy, że cienka warstwa z Rysunku 3.12 jest fragmentem naszej bańki mydlanej, czyli cienką warstwą roztworu mydła pomiędzy dwoma warstwami powietrza. Współczynnik załamania dla powietrza wynosi $n_1 = n_3 = 1$, zaś dla roztworu mydła jest równy $n_2 = 1{,}333$ (taką samą wartość ma współczynnik załamania wody). W tym przypadku będziemy mieć przesunięcie w fazie o $\lambda / 2$ dla promienia 1, odbitego od zewnętrznej powierzchni bańki mydlanej, oraz brak przesunięcia w fazie dla promienia 2, odbitego od wewnętrznej powierzchni bańki. Aby interferencja była konstruktywna, różnica dróg optycznych musi być równa nieparzystej wielokrotności połowy długości fali – trzy najmniejsze różnice to: $\lambda_n / 2$, $3\lambda_n / 2$ i $5\lambda_n / 2$. Aby otrzymać destruktywną interferencję, różnica dróg optycznych musi być równa całkowitej wielokrotności długości fali – czyli trzy najmniejsze różnice są równe odpowiednio: 0, λ_n i $2\lambda_n$.

Rozwiązanie

a. Interferencja konstruktywna zachodzi, gdy jest spełniony warunek

$$2d_\text{k} = \frac{\lambda_n}{2}, \frac{3\lambda_n}{2}, \frac{5\lambda_n}{2}, \ldots$$

Zatem najmniejsza grubość warstwy, dla której zachodzi interferencja konstruktywna, wynosi

$$d_\text{k} = \frac{\lambda_n}{4} = \frac{\lambda / n}{4} = \frac{650\,\text{nm} / 1{,}333}{4} = 122\,\text{nm}\,.$$

Kolejna najmniejsza grubość, dla której zachodzi interferencja konstruktywna, to $d'_\text{k} = 3\lambda_n / 4$, czyli

$$d'_\text{k} = 366\,\text{nm}\,.$$

Trzecia najmniejsza grubość, dla której zachodzi interferencja konstruktywna, to $d''_\text{k} = 5\lambda_n / 4$, czyli

$$d''_\text{k} = 610\,\text{nm}\,.$$

b. W przypadku interferencji destruktywnej różnica dróg optycznych musi być równa całkowitej wielokrotności długości fali. Pierwszy przypadek następuje wtedy, gdy mamy zerową grubość, bo fala odbita od powierzchni bańki zmienia swoją fazę, a zatem

$$d_\text{d} = 0\,\text{nm}$$

dla pomijalnie cienkiej warstwy (tutaj zerowej grubości), opisywanej na początku tego podrozdziału. Pierwsza warstwa o niezerowej grubości wystąpi, gdy

$$2d'_\text{d} = \lambda_n.$$

Podstawiając teraz znane wielkości, mamy

$$d'_\text{d} = \frac{\lambda_n}{2} = \frac{\lambda / n}{2} = \frac{650\,\text{nm} / 1{,}333}{2} = 244\,\text{nm}\,.$$

Pozostaje nam jeszcze trzecia najmniejsza grubość $2d''_\text{d} = 2\lambda_n$, czyli

$$d''_\text{d} = \lambda_n = \frac{\lambda}{n} = \frac{650\,\text{nm}}{1{,}333} = 488\,\text{nm}\,.$$

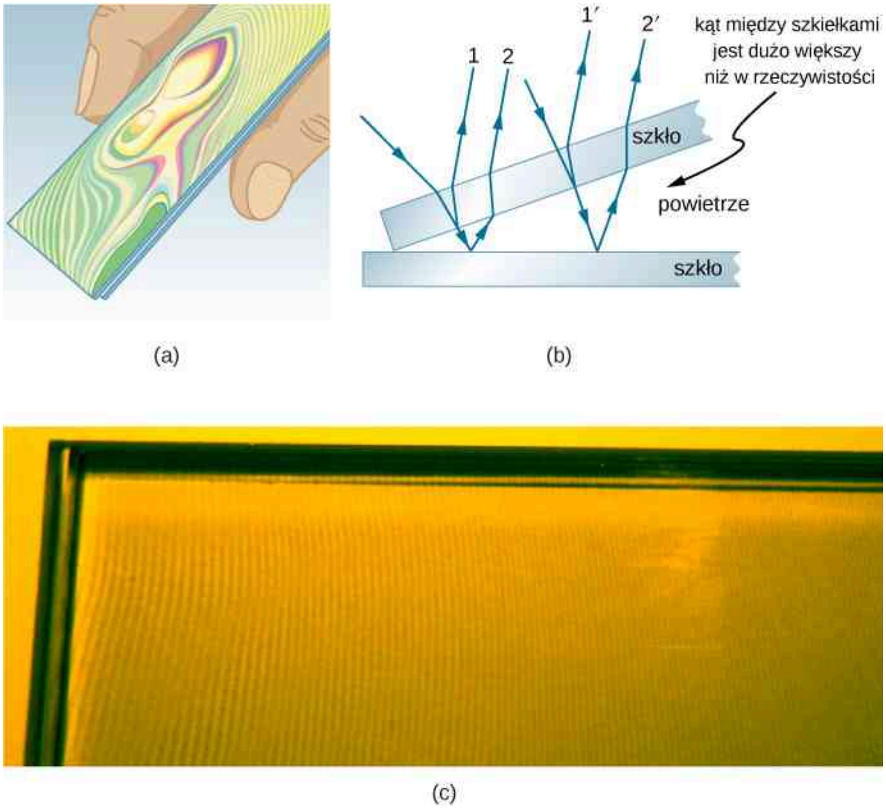
Znaczenie

Jeśli bańkę mydlaną oświetlilibyśmy tylko światłem czerwonym, to moglibyśmy zobaczyć w różnych jej miejscach jasne i ciemne prążki interferencyjne, w zależności od grubości bańki w danym miejscu. I tak dla zerowej grubości otrzymalibyśmy ciemny prążek, następnie jasny dla grubości $122\,\text{nm}$, potem ciemny dla $244\,\text{nm}$, kolejny jasny dla $366\,\text{nm}$, kolejny ciemny dla $488\,\text{nm}$ i następny jasny dla grubości ścianki banki mydlanej równej $610\,\text{nm}$. Jeśli w bańce grubość ścianek zmieniałaby się w sposób równomierny, tak jak to jest na przykład w przypadku klina, to wszystkie jasne i ciemne prążki będące efektem interferencji fal miałyby jednakową szerokość.

3.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Rozważ ponownie Przykład 3.4 i odpowiedz na pytanie: przy jakich dwóch następujących po sobie rosnących wartościach grubości ścianki bańki mydlanej otrzymalibyśmy:

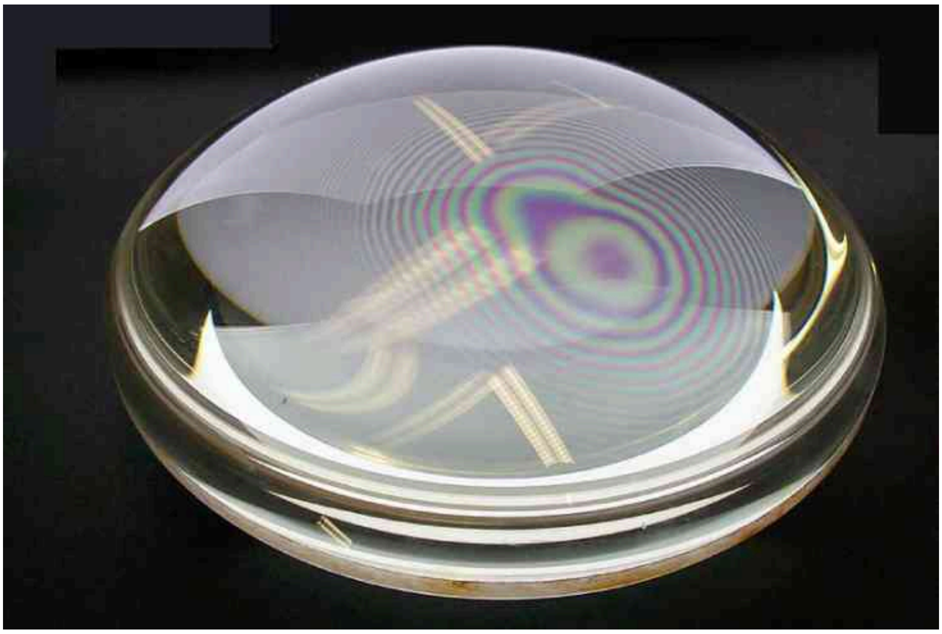
a. konstruktywną interferencję;
b. destruktywną interferencję?

Kolejny przykład interferencji w cienkich warstwach może być zaobserwowany, gdy złożone razem dwa szkiełka mikroskopowe rozchylamy wzajemnie tylko z jednej strony – Rysunek 3.14 (b). Szkiełka mikroskopowe są prawie idealnie płaskie, dlatego grubość klina powietrznego wytworzonego pomiędzy nimi zwiększa się równomiernie. Zmiana fazy fali świetlnej występuje przy odbiciu od górnej powierzchni drugiego szkiełka, nie zachodzi zaś przy odbiciu od dolnej powierzchni pierwszego szkiełka, zatem pierwszy ciemny prążek interferencyjny pojawi się, gdy szkiełka będą złożone razem. Kolory tęczy, będące wynikiem konstruktywnej interferencji, powtarzają się w identycznych sekwencjach, zaczynających się od koloru fioletowego, a kończących się na kolorze czerwonym, w funkcji zwiększającej się odległości pomiędzy szkiełkami. Jednakże im grubość klina powietrznego jest większa, tym jasne prążki interferencyjne stają się trudniejsze do zaobserwowania, ponieważ wtedy nawet małe zmiany wartości kąta padających promieni mają większy wpływ na różnicę dróg optycznych interferujących promieni. Jeśli zamiast światła białego użyjemy światła monochromatycznego, to zaobserwujemy powtarzające się na przemian jasne i ciemne prążki interferencyjne zamiast kolejnych, powtarzających się sekwencji wszystkich kolorów tęczy.



Rysunek 3.14 (a) Kolorowe prążki interferencyjne w kolorach tęczy są wynikiem interferencji światła białego w cienkiej warstwie powietrza, znajdującego się pomiędzy dwoma szkiełkami mikroskopowymi. (b) Schematyczny rysunek przedstawiający bieg promieni w klinie powietrznym utworzonym pomiędzy szkiełkami. (c) Jeśli klin powietrzny oświetlimy światłem monochromatycznym, to otrzymamy jasne i ciemne prążki interferencyjne zamiast powtarzających się kolorów tęczy.

Jednym z ważniejszych zastosowań zjawiska interferencji w cienkich warstwach jest wykorzystywanie go przy produkcji przyrządów optycznych. Na przykład wytwarzana soczewka lub lustro mogą być porównywane ze wzorcem, co umożliwia ocenę ich parametrów geometrycznych z dokładnością nie mniejszą niż wartość jednej długości zastosowanej fali na całej porównywanej powierzchni tych elementów optycznych. Rysunek 3.15 ilustruje efekt nazywany **pierścieniami Newtona** (ang. **Newton's rings**), który występuje, gdy dwie soczewki zetkniemy ze sobą płaskimi powierzchniami (kołowe pierścienie zostały nazwane pierścieniami Newtona, ponieważ Isaac Newton jako pierwszy je szczegółowo opisał i wykorzystywał. Newton ich nie odkrył – zrobił to Robert Hooke, natomiast Newton sądził, że efekt ten nie jest przejawem falowej natury światła). Każdy kolejny pierścień danego koloru wskazuje zwiększenie powietrznej szczeliny pomiędzy soczewkami o połowę długości fali, z tego też powodu tak duża precyzja może być osiągnięta przy produkcji elementów optycznych. W przypadku, kiedy soczewki mają powierzchnie idealnie płaskie, prążki Newtona nie pojawią się.



Rysunek 3.15 Pierścienie Newtona to prążki interferencyjne powstające, gdy dwie płasko--wypukłe soczewki są zetknięte ze sobą płaskimi powierzchniami. Pierścienie te są wynikiem interferencji promieni odbitych od różnych fragmentów nieomal płaskich, stykających się powierzchni soczewek z różniącymi się nieznacznie odległościami pomiędzy nimi – w rzeczywistości powierzchnie soczewek nie są idealnie płaskie, w niektórych miejscach są trochę wypukłe, w innych nieco wklęsłe. Źródło: Ulf Seifert

Zjawisko interferencji bardzo często występuje w przyrodzie, a interferencja zachodząca w cienkich warstwach ma wiele różnych zastosowań w przemyśle. Skrzydła niektórych ciem i motyli mienią się (opalizują) niemal wszystkimi kolorami tęczy właśnie dzięki zjawisku interferencji w cienkich warstwach. W odróżnieniu od typowego zabarwienia kolor skrzydeł jest silnie zależny od konstruktywnej interferencji dla określonych długości fal odbitych od powierzchni skrzydeł pokrytych cienką warstwą. Niektórzy producenci samochodów oferują pokrycie karoserii specjalną farbą (tzw. lakier perłowy), w której – dla uzyskania wyjątkowego efektu – wykorzystuje się zjawisko interferencji w cienkich warstwach, w wyniku której zmienia kolor odbitego światła w zależności od kąta patrzenia. Ta droższa wersja lakieru wykorzystuje właśnie fakt, że różnica dróg optycznych promieni w cienkich warstwach zależy od kąta patrzenia. Znaki zabezpieczające na kartach kredytowych, banknotach, prawach jazdy czy innych tego typu dokumentach mają utrudniać ich fałszowanie dzięki zastosowaniu zjawiska interferencji w cienkich warstwach, siatek dyfrakcyjnych czy hologramów. W roku 1998 w Australii zaczęto produkować banknoty dolarowe przy użyciu farb polimerowych z siatką dyfrakcyjną pełniącą rolę znaku zabezpieczającego. W innych krajach, jak Kanada, Nowa Zelandia czy Tajwan, również są stosowane podobne technologie, natomiast w Stanach Zjednoczonych banknoty zawierają element zabezpieczający wykorzystujący właśnie zjawisko interferencji w cienkich warstwach. Polskie banknoty obiegowe również mają najwyższej klasy zabezpieczenia optyczne, wykorzystujące zjawisko interferencji w postaci ozdobnych elementów wykonanych farbą opalizującą, czy też takich, które wraz ze zmianą kąta patrzenia płynnie zmieniają swą barwę.

3.5 | Interferometr Michelsona

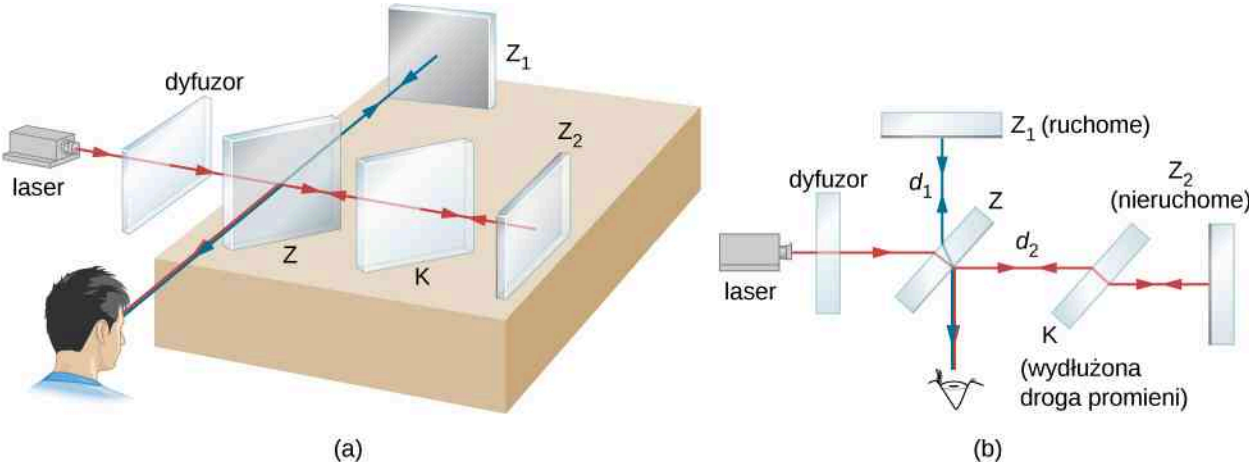
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zmiany w obrazie prążków interferencyjnych obserwowanych w interferometrze Michelsona spowodowane ruchem jednego ze zwierciadeł;
- wyjaśniać zmiany w obrazie prążków interferencyjnych obserwowanych w interferometrze Michelsona spowodowane zmianami ośrodka.

Interferometr (ang. **interferometer**) Michelsona, skonstruowany przez amerykańskiego fizyka **Alberta A. Michelsona (1852–1931)**, jest przyrządem optycznym służącym do precyzyjnego pomiaru zmian odległości, a także długości fali

lub jej zmiany, który daje obraz w postaci prążków interferencyjnych. Obraz ten powstaje wskutek rozdzielenia wiązki światła na dwie wiązki, które pokonawszy drogę optyczną o różnej długości, spotykają się i interferują ze sobą. Rysunek 3.16 przedstawia interferometr i drogę wiązki światła wychodzącej z pojedynczego punktu rozciągłego źródła, które stanowi szklana płytka, pełniąca funkcję dyfuzora (ang. **ground-glass plate**), rozpraszająca monochromatyczne światło laserowe o długości λ_0. Wiązka pada na półprzepuszczalne zwierciadło (tzw. płytkę światłodzielącą) Z, które połowę wiązki odbija, a połowę przepuszcza. Wiązka odbita biegnie do ruchomego zwierciadła Z_1, gdzie się odbija i trafia, przechodząc przez Z, do obserwatora. Pozostała część wiązki, która przeszła przez Z, odbija się od nieruchomego zwierciadła Z_2, a następnie zostaje skierowana przez zwierciadło Z – również do obserwatora.

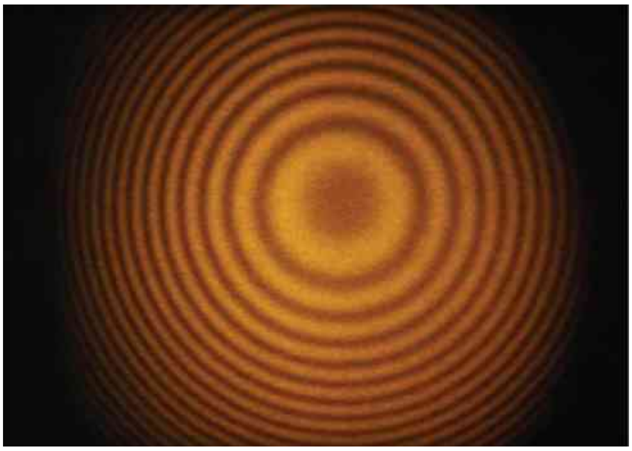


Rysunek 3.16 Interferometr Michelsona. (a) Rozciągłym źródłem światła jest szklana płytka, która odgrywa rolę dyfuzora dla światła laserowego. (b) Widok z góry.

Ponieważ obie wiązki wychodzą z tego samego źródła jako jedna wiązka (czerwona), to są one koherentne (spójne), co pozwala obserwować ich interferencję. Należy zauważyć, że jedna wiązka (niebieska) przechodzi przez zwierciadło Z trzy razy, natomiast druga (czerwona) tylko raz. Aby dwie wiązki przechodziły przez identyczną grubość szkła, na drodze wiązki od/do zwierciadła Z_2 jest umieszczona dodatkowa płytka kompensująca K, wykonana z przezroczystego szkła. Płytka ta jest niemal identyczna z półprzepuszczalnym zwierciadłem Z (wycięta z tego samego kawałka szkła), ale nie zawiera półprzepuszczalnej warstwy srebra. W obecności płytki kompensującej K każde przesunięcie w fazie dwóch rozdzielonych wiązek światła laserowego może być spowodowane jedynie różnicą drogi, jaką mają do pokonania obie wiązki.

Różnica dróg geometrycznych pomiędzy obiema wiązkami w miejscu, w którym się one spotykają, jest równa $2d_1 - 2d_2$, gdzie d_1 jest odległością pomiędzy Z a Z_1, zaś d_2 – pomiędzy Z a Z_2. Załóżmy teraz, że różnica dróg optycznych (uwzględniająca zmianę fazy fali zachodzącą przy odbiciu na granicy dwóch ośrodków) jest równa całkowitej wielokrotności długości fali $m\lambda_0$. Wtedy będzie miała miejsce konstruktywna interferencja i obserwator zauważy jasny obraz punktu źródła. Zachodzi ona również dla każdej pary wiązek, wychodzących z rozciągłego źródła. Zbiór wszystkich takich punktów, dla których różnica dróg wynosi $m\lambda_0$, tworzy jasny kołowy prążek w obserwowanym obrazie (patrz Rysunek 3.17). Gdy zmienimy położenie zwierciadła Z_1 o $\Delta d = \lambda_0 / 2$, to zmiana drogi optycznej będzie wynosić λ_0 i każdy z prążków przesunie się na miejsce sąsiedniego. W rezultacie, licząc liczbę prążków m przesuwających się na obrazie w określonym miejscu (faktycznie obserwator jest w stanie określić nawet bardzo małą zmianę położenia prążka z dokładnością do części długości fali), możemy wyznaczyć zmianę położenia zwierciadła Z_1 na podstawie równania

$$\Delta d = m\frac{\lambda_0}{2}. \tag{3.7}$$



Rysunek 3.17 Obraz prążków interferencyjnych w interferometrze Michelsona. Źródło: „SILLAGESvideos”/YouTube

Przykład 3.5

Precyzyjne pomiary długości w interferometrze Michelsona

Światło laserowe o długości $630\,\mathrm{nm}$ jest źródłem światła w interferometrze Michelsona. Jedno ze zwierciadeł (Z_1) może zmieniać swoje położenie, podczas gdy drugie (Z_2) jest nieruchome. Obserwowane prążki interferencyjne przesuwają się na tle referencyjnej linii w wizjerze interferometru. Znajdźmy odległość, o jaką przemieściło się zwierciadło Z_1 w przypadku, gdy obserwowany jasny prążek przesunął się na miejsce sąsiedniego jasnego prążka.

Strategia rozwiązania

Popatrzmy raz jeszcze na budowę interferometru przedstawioną na Rysunku 3.16. Następnie wykorzystajmy równanie opisujące zmianę położenia zwierciadła Δd w interferometrze Michelsona.

Rozwiązanie

Dla czerwonego światła laserowego o długości fali $630\,\mathrm{nm}$ i dla przesunięcia w obrazie każdego jasnego prążka ($m = 1$) przemieszczenie zwierciadła Z_1, gdy drugie Z_2 nie zmienia swojego położenia, wynosi

$$\Delta d = m\frac{\lambda_0}{2} = 1 \cdot \frac{630\,\mathrm{nm}}{2} = 315\,\mathrm{nm} = 0{,}315\,\mathrm{\mu m}.$$

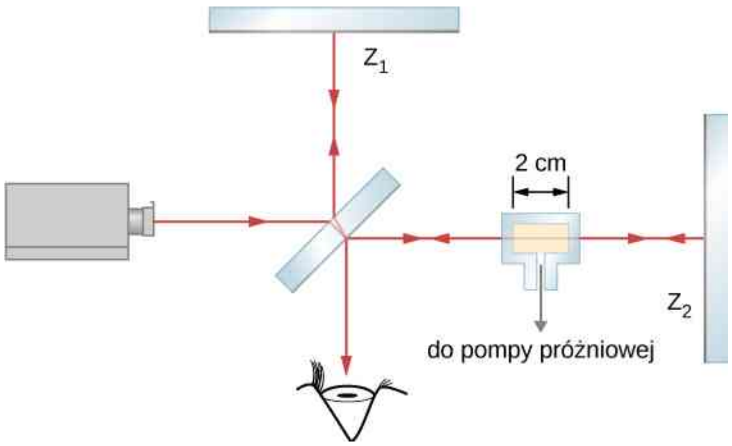
Znaczenie

Najważniejszą konsekwencją tego eksperymentu jest nowa definicja jednostki długości, czyli metra. Jak już zostało przedstawione w tomie pierwszym (patrz Jednostki i pomiary (https://cnx.org/content/m65732/latest/)), długość metra została zdefiniowana jako przesunięcie zwierciadła w interferometrze Michelsona odpowiadające $1\,650\,763{,}73$ długościom fali dla określonej linii emisyjnej atomów ^{86}Kr (kryptonu 86) w lampie wyładowczej.

Przykład 3.6

Wyznaczanie współczynnika załamania światła w gazie

W jednym z ramion interferometru Michelsona umieszczono szklany pojemnik o szerokości $2\,\mathrm{cm}$, z którego można wypompować powietrze przy pomocy pompy próżniowej, a następnie wypełniać go różnymi gazami. Początkowo pojemnik był pusty. W miarę jak powoli wypełniano go gazem, obserwowano, że ciemne prążki interferencyjne przesuwają się na tle referencyjnej linii w wizjerze interferometru. Do momentu, gdy szklany pojemnik został wypełniony gazem do wymaganego ciśnienia, zaobserwowano przesunięcie się 122 prążków w odniesieniu do referencyjnej linii. Długość fali światła użytego w tym doświadczeniu wynosiła $632{,}8\,\mathrm{nm}$ (długość fali w próżni). Jaki jest współczynnik załamania dla tego gazu?



Strategia rozwiązania

Liczba $m = 122$ zaobserwowanych prążków kompensuje różnicę pomiędzy liczbą długości fal, które mieszczą się w pustym pojemniku (w środku jest próżnia), a liczbą długości fal, które mieszczą się w tym samym pojemniku w sytuacji, gdy jest on wypełniony gazem. Długość fali światła w wypełnionym gazem pojemniku jest n (współczynnik załamania) razy mniejsza od długości fali w próżni.

Rozwiązanie

Wiązka światła pokonuje dwukrotnie odległość $d = 2\text{ cm}$ (wewnętrzna szerokość pojemnika), raz biegnąc do zwierciadła Z_1 i drugi raz wracając po odbiciu od niego. Zatem całkowita droga wiązki przez pojemnik to $L = 2d$. Kiedy pojemnik jest pusty, liczba długości fal mieszczących się na tej drodze jest równa

$$N_0 = \frac{L}{\lambda_0} = \frac{2d}{\lambda_0},$$

gdzie $\lambda_0 = 632{,}8\text{ nm}$ jest długością fali w próżni. W każdym innym ośrodku długość fali będzie równa $\lambda = \lambda_0 / n$, zatem liczba długości fali, które zmieszczą się na drodze L w wypełnionym gazem pojemniku, będzie równa

$$N = \frac{L}{\lambda} = \frac{2d}{\lambda_0 / n}.$$

Stąd liczba prążków obserwowanych podczas napełniania gazem pojemnika wynosi

$$m = N - N_0 = \frac{2d}{\lambda_0 / n} - \frac{2d}{\lambda_0} = \frac{2d}{\lambda_0}(n-1).$$

Rozwiązując to równanie ze względu na $n - 1$, otrzymujemy

$$n - 1 = m\frac{\lambda_0}{2d} = 122 \cdot \frac{632{,}8 \cdot 10^{-9}\text{ m}}{2 \cdot 2 \cdot 10^{-2}\text{ m}} = 0{,}0019.$$

Zatem $n = 1{,}0019$.

Znaczenie

Współczynniki załamania dla gazów są bardzo zbliżone do współczynnika załamania światła w próżni i zwykle zakładamy, że wynoszą 1. Różnica pomiędzy 1 a 1,0019 jest bardzo mała i uzyskanie takiego wyniku wymaga bardzo dokładnej metody pomiarowej, jaką jest właśnie interferometria. Nie możemy na przykład oczekiwać, że moglibyśmy wyznaczyć współczynnik załamania gazu, opierając się tylko na prawie załamania (prawie Snella).

3.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Liczba m przesuniętych w obrazie prążków jest liczbą całkowitą i często uznaje się, że jest obarczona zerowym błędem (nie popełniamy błędu przy jej określaniu). W praktyce jednak przy dużej liczbie przesuwających się prążków łatwo jest się pogubić w rachunkach. Przyjmij, że w Przykładzie 3.6 być może umknęło ci aż pięć ze 122 policzonych prążków.

a. Czy współczynnik załamania wyliczony w Przykładzie 3.6 jest za duży czy za mały?
b. O ile ten współczynnik załamania różni się od wyznaczonego prawidłowo?

Strategia rozwiązywania zadań: optyka falowa

1. *Przeanalizuj sytuację tak, aby określić, czy w zadaniu należy rozważyć efekty interferencyjne.* Zadecyduj, czy interferencja na szczelinach, interferencja w cienkich warstwach, czy też interferometria są istotne w rozważanym problemie.
2. *Jeśli należy rozważyć interferencję na szczelinach*, zauważ, że siatka dyfrakcyjna i układ dwóch szczelin dają zbliżone obrazy interferencyjne z tą różnicą, że jasne prążki od siatki dyfrakcyjnej są węższe (maksima są ostrzejsze). Obraz interferencyjny od pojedynczej szczeliny charakteryzuje się wyraźnym centralnym maksimum i mniejszymi bocznymi maksimami po obu stronach.
3. *Jeśli rozważamy interferencję w cienkich warstwach lub w interferometrze*, należy pamiętać o różnicy dróg optycznych dwóch promieni, które ze sobą interferują. Upewnij się, że przyjmujesz właściwą długość fali dla danego ośrodka, gdyż jej wartość jest inna niż w próżni. Pamiętaj również, że zachodzi przesunięcie w fazie o $\lambda / 2$ dla fali, która odbija się od ośrodka o większym współczynniku załamania.
4. *Określ, jakie wielkości muszą być w zadaniu wyznaczone (określ niewiadome).* Zrobienie listy tych wielkości będzie użyteczne. Zrób również rysunek do zadania; przydatny będzie też jego opis (nazwanie zmiennych).
5. *Wypisz wielkości, jakie są dane, oraz te, które można bezpośrednio z nich otrzymać (określ wiadome).*
6. *Przekształć właściwe równanie ze względu na zmienną, którą mamy wyznaczyć (niewiadomą), i wstaw wszystkie znane wielkości.* Zadania ze szczelinami, siatką dyfrakcyjną czy kryterium Rayleigha wymagają zastosowania właściwych równań.
7. *Dla interferencji w cienkich warstwach mamy konstruktywną interferencję dla całkowitej różnicy dróg optycznych (uwzględniającej zmianę fazy przy odbiciu) równą całkowitej wielokrotności długości fali. Destruktywna interferencja zachodzi, gdy całkowita różnica dróg optycznych jest równa nieparzystej wielokrotności połowy długości fali.* Zawsze pamiętaj, że „górka” do „górki” dwóch fal to interferencja konstruktywna, a „górka” do „doliny” to interferencja destruktywna.
8. *Sprawdź, czy otrzymany wynik ma sens.* Przykładowo wartości kątów w obrazie interferencyjnym nie mogą być większe niż $90°$.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 3

KLUCZOWE POJĘCIA

fale koherentne (spójne) (ang. coherent waves) fale o tej samej częstotliwości, które mają określone i stałe w czasie przesunięcie fazowe, w szczególnym przypadku zerowe (są w fazie)

fale niekoherentne (niespójne) (ang. incoherent waves) fale o różnych częstotliwościach lub takie, których przesunięcia fazowe są przypadkowe lub zmieniają się w czasie

interferencja w cienkich warstwach (ang. thin-film interference) interferencja światła odbitego od dwóch różnych powierzchni cienkiej warstwy

interferometr (ang. interferometer) przyrząd optyczny, który wykorzystuje zjawisko interferencji do bardzo precyzyjnych pomiarów zmian odległości, a także długości fali lub jej zmian

maksimum poboczne (ang. secondary maximum) jasny prążek interferencyjny o mniejszym natężeniu, pojawiający się pomiędzy maksimami podstawowymi w obrazie interferencyjnym po przejściu fal przez układ wielu szczelin

maksimum podstawowe (ang. principal maximum) jasny prążek interferencyjny (o większym natężeniu niż maksima poboczne), obserwowany w obrazie interferencyjnym po przejściu fal przez układ wielu szczelin

pierścienie Newtona (ang. Newton's rings) obraz interferencyjny złożony z kolistych prążków interferencyjnych, powstały wskutek interferencji światła odbitego od dwóch nieznacznie odległych od siebie powierzchni

prążki interferencyjne (ang. interference fringes) jasne lub ciemne obszary w obrazie interferencyjnym

rząd prążka (ang. order of interference fringe) wartość bezwzględna (moduł) liczby całkowitej m występującej w równaniach opisujących interferencję konstruktywną i destruktywną

światło monochromatyczne (ang. monochromatic light) światło złożone z fal mających jednakową długość fali

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Konstruktywna interferencja	$\Delta l = m\lambda$, gdzie $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
Destruktywna interferencja	$\Delta l = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, gdzie $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
Różnica dróg optycznych dla fal biegnących z dwóch szczelin do tego samego punktu na ekranie	$\Delta l = d \sin \theta$
Konstruktywna interferencja	$d \sin \theta = m\lambda$, gdzie $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
Destruktywna interferencja	$d \sin \theta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$, gdzie $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
Odległość od centralnego maksimum do m-tego jasnego prążka	$y_m = \frac{m\lambda D}{d}$
Zmiana położenia zwierciadła w interferometrze Michelsona	$\Delta d = m\frac{\lambda_0}{2}$

PODSUMOWANIE

3.1 Doświadczenie Younga z dwiema szczelinami

- Wynik doświadczenia Younga z dwiema szczelinami był przesądzającym dowodem na falową naturę światła.
- Obraz interferencyjny powstaje poprzez superpozycję fal pochodzących z dwóch szczelin.

3.2 Matematyczny opis interferencji

- W przypadku interferencji światła pochodzącego z dwóch szczelin konstruktywna interferencja zachodzi, gdy $d \sin \theta = m\lambda$ (dla $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$), gdzie d jest odległością pomiędzy szczelinami, θ jest kątem względem kierunku prostopadłego do płaszczyzny szczelin, natomiast m określa rząd jasnych prążków interferencyjnych.
- Destruktywna interferencja zachodzi, gdy $d \sin \theta = (m + 1 / 2)\lambda$, gdzie $m = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

3.3 Interferencja na wielu szczelinach

- Wynikiem interferencji na wielu szczelinach $(N > 2)$ są zarówno maksima podstawowe, jak i maksima poboczne.
- Gdy zwiększa się liczbę szczelin, zwiększa się natężenie maksimów podstawowych, przy jednoczesnym zmniejszaniu się ich szerokości.

3.4 Interferencja w cienkich warstwach

- Gdy światło ulega odbiciu od ośrodka, którego współczynnik załamania jest większy niż współczynnik załamania ośrodka, z którego światło pada na granicę ośrodków, to zachodzi przesunięcie w fazie o $180°$, czyli o π radianów (co odpowiada zmianie drogi optycznej o $\lambda / 2$).
- Interferencja w cienkich warstwach zachodzi przy nakładaniu się promieni światła odbitych od górnej oraz od dolnej powierzchni cienkiej warstwy. Poza występującą tu różnicą dróg geometrycznych (uwzględniającą współczynnik załamania w danym ośrodku) dla obu tych promieni może również wystąpić zmiana fazy podczas odbicia na granicy ośrodków.

3.5 Interferometr Michelsona

- Gdy zwierciadło w jednym ramieniu interferometru przemieści się o odcinek $\lambda / 2$, to każdy prążek w obrazie interferencyjnym przesunie się na miejsce poprzednio zajmowane przez sąsiedni prążek.

PYTANIA

3.1 Doświadczenie Younga z dwiema szczelinami

1. W doświadczeniu Younga światło pochodzące z jednego źródła jest na dwóch szczelinach rozdzielane na dwa osobne źródła. Czy podobny obraz interferencyjny może być otrzymany, gdy wykorzystane zostaną dwa niezależne źródła światła, np. przednie światła odległego samochodu? Swoją odpowiedź uzasadnij.

2. Czy możliwy jest eksperyment, w którym będzie występowała tylko destruktywna interferencja? Swoją odpowiedź uzasadnij.

3. Dlaczego dwie małe lampy sodowe, znajdujące się blisko siebie, nie mogą służyć do uzyskania obrazu interferencyjnego na odległym ekranie? Co się stanie, gdy lampy sodowe zostaną zamienione na dwa wskaźniki laserowe, również znajdujące się blisko siebie?

3.2 Matematyczny opis interferencji

4. Załóżmy, że użyjesz tych samych szczelin do przeprowadzenia doświadczenia Younga z dwiema szczelinami w powietrzu, a następnie w wodzie. Czy kąty, pod którymi pojawią się prążki odpowiednich rzędów, będą większe, czy mniejsze? Czy zmieni się kolor światła po przejściu przez szczeliny? Swoją odpowiedź uzasadnij.

5. Dlaczego w doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami używamy światła monochromatycznego? Co się stanie, gdy zastosujemy światło białe?

3.4 Interferencja w cienkich warstwach

6. Jaki wpływ ma zwiększenie wartości kąta pomiędzy powierzchniami tworzącymi klin powietrzny (np. pomiędzy dwoma szkiełkami mikroskopowymi) na odległość pomiędzy prążkami interferencyjnymi? Jeśli wartość tego kąta będzie za duża, to prążki nie będą widoczne. Wyjaśnij dlaczego.

7. Jaka jest różnica dróg optycznych dla promieni, które początkowo są w fazie, a następnie interferują konstruktywnie lub destruktywnie? Jaki wpływ na to może mieć zjawisko odbicia; jaki zjawisko załamania?

8. Czy nastąpi zmiana fazy dla światła, które ulega odbiciu od soczewki kontaktowej, unoszącej się w oku na cienkiej warstwie filmu łzowego? Współczynnik załamania soczewki wynosi około $1{,}5$, natomiast zewnętrzna powierzchnia soczewki jest sucha.

9. Przy umieszczaniu próbki pomiędzy szkiełkami mikroskopowymi szkiełko nakrywkowe przykrywa kroplę wody umieszczoną na szkiełku podstawowym. Światło padające z góry może się odbić zarówno od górnej, jak i dolnej powierzchni szkiełka nakrywkowego, a także od górnej powierzchni szkiełka podstawowego, znajdującego się pod kroplą wody. Przy odbiciu od których powierzchni światło dozna przesunięcia w fazie?

10. Odpowiedz na poprzednie pytanie w sytuacji, gdy ciecz pomiędzy dwoma szkiełkami mikroskopowymi będzie dwusiarczkiem węgla.

11. Kiedy patrzysz na plasterek cienko pokrojonej szynki, na przykład oceniając jej walory odżywcze, możesz zaobserwować różnokolorowe (w kolorach tęczy) refleksy na jej wilgotnej powierzchni. Wyjaśnij, jaka jest przyczyna ich powstawania.

12. Wynalazca zauważył, że bańka mydlana jest

ciemna, kiedy jej ścianki mają najmniejszą grubość, i na tej podstawie wywnioskował, że destruktywna interferencja występuje dla wszystkich długości fali. Jak może on wykorzystać tę wiedzę do skonstruowania skutecznej powłoki antyrefleksyjnej dla soczewek w całym przedziale długości fal światła widzialnego? Jakim ograniczeniom podlegają współczynnik załamania oraz grubość warstwy antyrefleksyjnej? Dlaczego takie rozwiązanie jest niepraktyczne?

13. Powłoka antyrefleksyjna, jak ta opisana w Przykładzie 3.3, całkowicie redukuje promienie odbite tylko dla jednej długości fali oraz przy założeniu, że światło pada prostopadle na tę powłokę. Jaki rezultat otrzymamy dla innych długości fal i innych wartości kątów padania? Wykonaj obliczenia.

14. Dlaczego dużo trudniej jest zaobserwować prążki interferencyjne dla światła odbitego od grubej płytki szklanej niż odbitego od cienkiej warstwy? Czy zastosowanie światła monochromatycznego może ułatwić obserwację?

3.5 Interferometr Michelsona

15. Omów, w jaki sposób interferometr Michelsona może być użyty do pomiaru współczynnika załamania gazu (w tym powietrza).

ZADANIA

3.2 Matematyczny opis interferencji

16. Jaka jest wartość kąta, dla którego pojawi się maksimum interferencyjne pierwszego rzędu dla światła niebieskiego o długości fali 450 nm, które pada na dwie szczeliny odległe od siebie o $0{,}05 \text{ mm}$?

17. Wyznacz wartość kąta, dla którego pojawi się maksimum interferencyjne trzeciego rzędu dla światła żółtego o długości fali 580 nm, które pada na dwie szczeliny odległe od siebie o $0{,}1 \text{ mm}$.

18. Jaka jest odległość pomiędzy szczelinami, dla których światło pomarańczowe o długości fali 610 nm ma maksimum interferencyjne pierwszego rzędu dla kąta $30°$?

19. Znajdź odległość pomiędzy szczelinami, dla której pierwsze minimum interferencyjne dla światła fioletowego o długości fali 410 nm pojawia się pod kątem $45°$.

20. Oblicz długość fali świetlnej, dla której pod kątem $30°$ pojawia się minimum trzeciego rzędu, gdy przechodzi ona przez dwie szczeliny odległe od siebie o 3 µm. Zadanie rozwiąż krok po kroku, według wskazówek podanych na końcu rozdziału w sekcji: Strategia rozwiązywania zadań: optyka falowa.

21. Jaka jest wartość długości fali świetlnej padającej na dwie szczeliny odległe od siebie o 2 µm, jeśli maksimum interferencyjne trzeciego rzędu pojawia się pod kątem $60°$?

22. Pod jakim kątem pojawi się maksimum interferencyjne czwartego rzędu w sytuacji z poprzedniego zadania?

23. Jaki jest najwyższy rząd maksimum interferencyjnego dla światła o długości fali 400 nm, padającego na dwie szczeliny odległe od siebie o 25 µm?

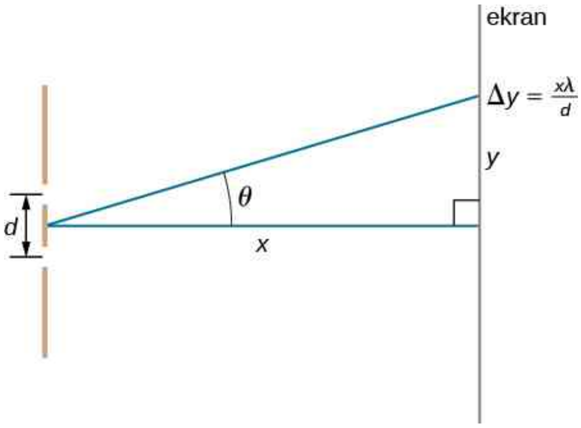
24. Oblicz największą wartość długości fali elektromagnetycznej, dla której po przejściu fali przez dwie szczeliny odległe od siebie o $1{,}2 \text{ µm}$ widoczne jest jedynie maksimum interferencyjne pierwszego rzędu. Czy długość tej fali zawiera się w widzialnej części spektrum fal elektromagnetycznych?

25. Jaka jest najmniejsza odległość pomiędzy dwiema szczelinami, dla której otrzymamy maksimum interferencyjne drugiego rzędu (gdy maksymalny rząd maksimum interferencyjnego jest równy 2) dla światła czerwonego o długości 720 nm?

26. Jaka jest najmniejsza odległość pomiędzy dwiema szczelinami, dla której otrzymamy maksimum interferencyjne drugiego rzędu:
a. dla jakiejkolwiek długości fali z zakresu światła widzialnego;
b. dla każdej długości fali z zakresu światła widzialnego?

27. a. Jeśli maksimum interferencyjne pierwszego rzędu dla światła monochromatycznego padającego na dwie szczeliny pojawia się pod kątem $10°$, to pod jakim kątem pojawi się maksimum interferencyjne drugiego rzędu?
b. Jaka jest wartość kąta dla pierwszego minimum?
c. Jaki jest dla tego przypadku maksymalny rząd maksimum interferencyjnego?

28. Na rysunku poniżej pokazane są dwie wąskie szczeliny, których odległość od ekranu wynosi x, zaś y jest odległością punktu na ekranie od jego środka. Gdy będziemy zwiększać odległość d pomiędzy szczelinami, na ekranie zacznie pojawiać się coraz większa liczba prążków interferencyjnych. Pokaż, że dla małych wartości kątów (wtedy $\sin\theta \approx \theta$, gdzie θ jest wyrażony w radianach) odległość na ekranie pomiędzy centralnym maksimum (prążkiem zerowego rzędu) i kolejnym jasnym prążkiem (maksimum interferencyjnym pierwszego rzędu) wynosi $y = x\lambda / d$.



29. a. Wykorzystując wynik z poprzedniego zadania, oblicz odległość pomiędzy prążkami zerowego i pierwszego rzędu dla światła o długości 570 nm, które pada na dwie szczeliny odległe od siebie o $0{,}008 \text{ mm}$ i znajdujące się w odległości 3 m od ekranu;
b. Jaka będzie odległość pomiędzy prążkami, gdy cały układ doświadczalny umieścimy w wodzie o współczynniku załamania $1{,}33$?

30. Wykorzystując wynik zadania poprzedzającego poprzednie, wyznacz długość fali świetlnej, dla której odległość pomiędzy prążkami na ekranie wynosi $7{,}5 \text{ mm}$, gdy ekran jest oddalony o $1{,}5 \text{ m}$ od dwóch szczelin odległych od siebie o $0{,}12 \text{ mm}$.

31. W doświadczeniu z dwiema szczelinami maksimum piątego rzędu znajduje się w odległości $2{,}8 \text{ cm}$ od centralnego prążka (maksimum interferencyjnego zerowego rzędu) na ekranie, który jest oddalony od szczelin na odległość $1{,}5 \text{ m}$. Jaka jest długość użytej fali świetlnej, jeśli odległość pomiędzy szczelinami wynosi $0{,}15 \text{ mm}$?

32. W doświadczeniu Younga źródło światła emituje fale o dwóch różnych długościach. Maksimum interferencyjne czwartego rzędu dla jednej długości fali pokrywa się na ekranie z piątym maksimum interferencyjnym dla drugiej długości fali. Jaki jest stosunek długości tych fal?

33. Jeśli światło o dwóch różnych długościach, 500 nm i 650 nm, pada na dwie szczeliny odległe od siebie o $0{,}5 \text{ mm}$, to jak daleko od siebie na ekranie odległym od szczelin o 2 m pojawią się maksima interferencyjne drugiego rzędu?

34. **Nieracjonalne wyniki.** Światło czerwone o wartości długości fali 700 nm pada na dwie szczeliny odległe od siebie o 400 nm.
a. Dla jakiej wartości kąta w obrazie interferencyjnym pojawi się maksimum interferencyjne pierwszego rzędu?
b. Co niewłaściwego jest w tym wyniku?
c. Które założenia są błędne lub niespójne?

3.3 Interferencja na wielu szczelinach

35. Wąskie szczeliny, równomiernie rozmieszczone co $0{,}25 \text{ mm}$, oświetlono żółtym światłem o długości fali 580 nm.
a. Dla jakich wartości kątów pojawią się maksima podstawowe trzeciego i czwartego rzędu?
b. Jaka będzie odległość pomiędzy nimi na ekranie oddalonym o 2 m od szczelin?

36. Szerokość jaśniejszych prążków może być wyznaczona jako odległość pomiędzy dwoma sąsiadującymi ciemnymi prążkami, znajdującymi się po obu stronach jasnego prążka. Znajdź szerokość kątową trzeciego i czwartego jasnego prążka z poprzedniego zadania.

37. W obrazie interferencyjnym uzyskiwanym dla trzech szczelin znajdź stosunek natężenia maksimum pobocznego do natężenia maksimum podstawowego.

38. Jaka jest szerokość kątowa centralnego maksimum w obrazie interferencyjnym dla
a. 20 szczelin;
b. 50 szczelin;

oddalonych od siebie o $d = 2 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$? Przyjmij długość fali świetlnej $\lambda = 600 \text{ nm}$.

3.4 Interferencja w cienkich warstwach

39. Bańka mydlana o grubości ścianek 100 nm jest oświetlona światłem białym, padającym prostopadle do jej powierzchni. Dla jakiej długości fali z zakresu widzialnego i dla jakiego koloru światła, który jej odpowiada, uzyskana zostanie konstruktywna interferencja? Przyjmij, że współczynnik załamania roztworu mydła jest taki sam jak wody.

40. Plama benzyny na wodzie o grubości 120 nm jest oświetlona światłem białym, padającym prostopadle do jej powierzchni. Jaki kolor będzie dominował (dla jakiej długości fali będzie zachodzić konstruktywna interferencja), jeśli współczynnik załamania benzyny jest równy $1{,}4$?

41. Oblicz najmniejszą grubość warstwy benzyny na wodzie dla przypadku, gdy po oświetleniu jej światłem białym, padającym prostopadle do jej powierzchni, dominującym kolorem jest kolor niebieski. Przyjmij, że światło niebieskie odpowiada długości fali 470 nm i współczynnik załamania benzyny jest równy $1{,}4$.

42. Znajdź najmniejszą grubość ścianki bańki mydlanej, która będzie miała kolor czerwony, gdy zostanie oświetlona światłem białym, padającym prostopadle do jej powierzchni. Przyjmij długość fali równą 670 nm oraz, że współczynnik załamania roztworu mydła jest taki sam jak wody.

43. Cienka warstwa roztworu mydła ($n = 1{,}33$) na plastikowej desce do krojenia ma grubość 233 nm. Jaki

kolor światła będzie dominować w świetle odbitym, jeśli deska jest oświetlona światłem padającym prostopadle do jej powierzchni?

44. Oblicz trzy najmniejsze wartości grubości (pomiń przypadek zerowej grubości) cienkiej warstwy roztworu mydła na szkle organicznym (pleksiglasie), oświetlonej światłem białym, padającym prostopadle do jej powierzchni, jeśli kolorem dominującym w świetle odbitym jest kolor zielony (konstruktywna interferencja dla fali o długości $520\,\text{nm}$).

45. Układ optyczny złożony z soczewek został zaprojektowany do pracy przy świetle czerwonym o długości fali $700\,\text{nm}$. Jaka jest druga najmniejsza grubość powłoki antyrefleksyjnej z fluorku magnezu (fluorytu), która będzie dobrą powłoką antyrefleksyjną dla tej długości fali?

46. a. Bańki mydlane stają się ciemne, gdy różnica długości dróg optycznych jest mała w porównaniu z długością fal świetlnych i gdy światło odbite od zewnętrznej powierzchni bańki doznaje zmiany fazy. Zakładając, że bańki wydają się ciemne, gdy różnica długości dróg optycznych jest mniejsza niż $1 / 4$ długości fali, oblicz, jaka może być największa grubość ścianki bańki mydlanej, która staje się ciemna dla wszystkich długości fali światła widzialnego. Przyjmij, że współczynnik załamania roztworu mydła jest taki sam jak wody;
b. Przedyskutuj, czy bańka mydlana o tak grubych ściankach będzie stabilna.

47. **Nieracjonalne wyniki.** Aby zaoszczędzić przy produkcji samolotów wojskowych, które są niewidoczne dla radarów, wynalazca zdecydował się pokryć je materiałem antyrefleksyjnym o współczynniku załamania równym $1{,}2$, tworzącym warstwę pomiędzy powietrzem a powierzchnią samolotu. To, w jego przekonaniu, powinno być dużo tańszym rozwiązaniem niż rozwiązania stosowane obecnie w samolotach tego typu.
a. Jaka powinna być grubość powłoki, aby uniemożliwić odbicie 4-centymetrowch fal radiowych, stosowanych w radarach?
b. Co jest zaskakujące w otrzymanym wyniku?
c. Które założenia są niewłaściwe lub niespójne?

3.5 Interferometr Michelsona

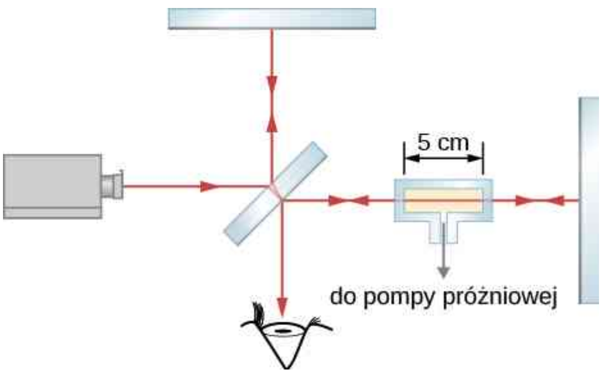
48. Interferometr Michelsona ma dwa ramiona o jednakowych długościach. Jako źródło światła użyto lampy rtęciowej emitującej światło o długości fali $546\,\text{nm}$ i zaobserwowano stabilny obraz prążków interferencyjnych. Jedno z ramion zmieniło swą długość o $1{,}5\,\mu\text{m}$. Ile prążków interferencyjnych przemieściło się przez obserwowany fragment obrazu?

49. O jaką odległość zostało przesunięte ruchome zwierciadło w interferometrze Michelsona tak, że odpowiada ono 1500 prążkom, które przesunęły się przez obserwowane pole? Przyjmij, że źródłem światła jest wybrana linia emisyjna atomów ^{86}Kr (kryptonu 86) o długości fali $606\,\text{nm}$.

50. Gdy ruchome zwierciadło w interferometrze Michelsona przesunięto o $2{,}4 \cdot 10^{-5}\,\text{m}$, 90 prążków przemieściło się przez obserwowany fragment obrazu. Jaka jest długość fali użytego światła?

51. W interferometrze Michelsona zostało użyte światło o długości fali $632{,}8\,\text{nm}$ z lasera He-Ne. Gdy jedno ze zwierciadeł przesunięto o pewien odcinek, 8 prążków przemieściło przez obserwowany fragment obrazu. Jaka jest długość tego odcinka?

52. Szklany pojemnik o długości $5\,\text{cm}$ z równoległymi ściankami umieszczono w jednym z ramion interferometru Michelsona (patrz rysunek poniżej). Użyto światła, które w próżni ma długość fali $500\,\text{nm}$. Podczas wypompowywania powietrza ze szklanego pojemnika 29 prążków przesunęło się przez obserwowany fragment obrazu. Jaki jest współczynnik załamania powietrza?



ZADANIA DODATKOWE

53. Dla jakich wartości kątów obserwowane będzie maksimum pierwszego i trzeciego rzędu w obrazie interferencyjnym światła pochodzącego z dwóch szczelin, oświetlonych światłem o długości $600\,\text{nm}$ i dla odległości pomiędzy szczelinami równej $0{,}12\,\text{mm}$?

54. Jeśli w poprzednim zadaniu zmienimy źródło światła, to wartość kąta, dla której pojawi się maksimum trzeciego rzędu, wyniesie $0{,}57°$. Jaką wartość długości fali będzie miało światło emitowane przez nowe źródło?

55. Światło czerwone ($\lambda = 710\,\text{nm}$) oświetla dwie szczeliny oddalone od siebie na odległość $d = 0{,}15\,\text{mm}$. Ekran znajduje się w odległości $3\,\text{m}$ od szczelin.

a. Wyznacz odległość na ekranie pomiędzy centralnym maksimum a maksimum trzeciego rzędu;
b. Jaka jest odległość na ekranie pomiędzy maksimum drugiego a maksimum czwartego rzędu?

56. Dwa źródła są w fazie i emitują fale o długości $\lambda = 0{,}42\,\text{m}$. Określ, czy zajdzie konstruktywna, czy destruktywna interferencja w punktach, których odległości od pierwszego i drugiego źródła wynoszą odpowiednio
a. $0{,}84\,\text{m}$ i $0{,}42\,\text{m}$;
b. $0{,}21\,\text{m}$ i $0{,}42\,\text{m}$;
c. $1{,}26\,\text{m}$ i $0{,}42\,\text{m}$;
d. $1{,}87\,\text{m}$ i $1{,}45\,\text{m}$;
e. $0{,}63\,\text{m}$ i $0{,}84\,\text{m}$;
f. $1{,}47\,\text{m}$ i $1{,}26\,\text{m}$.

57. Dwie szczeliny oddalone od siebie o $4 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$ oświetlono światłem o długości $600\,\text{nm}$. Jaki będzie najwyższy rząd maksimum interferencyjnego obserwowanego w powstałym obrazie interferencyjnym?

58. Przyjmij, że najwyższy rząd maksimum interferencyjnego obserwowanego w obrazie interferencyjnym z dwóch szczelin oświetlonych światłem o długości $550\,\text{nm}$ to 8. Jaka jest najmniejsza odległość pomiędzy szczelinami?

59. Obraz interferencyjny otrzymano na ekranie znajdującym się w odległości $3\,\text{m}$ od dwóch szczelin oddalonych od siebie na odległość $0{,}15\,\text{mm}$, oświetlonych światłem z lasera He-Ne o długości fali $632{,}8\,\text{nm}$. Wyznacz odległość pomiędzy sąsiednimi jasnymi prążkami.

60. Doświadczenie Younga z dwiema szczelinami przeprowadzono w wodzie ($n = 1{,}333$). Źródłem światła był laser He-Ne, $\lambda = 633\,\text{nm}$ w próżni.
a. Jaka jest długość tego światła w wodzie?
b. Dla jakiej wartości kąta pojawi się maksimum interferencyjne trzeciego rzędu, gdy dwie szczeliny oddalone są od siebie na odległość $0{,}1\,\text{mm}$?

61. Doświadczenie Younga z dwiema szczelinami powinno być tak wykonane, aby na ekranie oddalonym od szczelin na odległość $2{,}13\,\text{m}$ dystans pomiędzy jasnymi prążkami wyniósł $1{,}27\,\text{cm}$. W doświadczeniu zastosowano źródło światła o długości $500\,\text{nm}$. Jaka powinna być odległość pomiędzy szczelinami?

62. Zjawisko analogiczne do interferencji na dwóch szczelinach może mieć miejsce, gdy – zamiast światła – użyjemy fal dźwiękowych. W otwartej przestrzeni dwa głośniki, rozmieszczone w odległości $1{,}3\,\text{m}$ od siebie, zasilane są generatorem dźwięku, który wytwarza falę sinusoidalną o częstotliwości $1200\,\text{Hz}$. Student przemieszcza się wzdłuż linii oddalonej o $12{,}5\,\text{m}$ i równoległej do prostej łączącej oba głośniki. Podczas przemieszczania słyszy on naprzemiennie pojawiające się wzmocnienia i osłabienia dźwięku, spowodowane odpowiednio konstruktywną i destruktywną interferencją. Jaka jest:
a. długość fali dźwiękowej?
b. odległość pomiędzy głównym maksimum i kolejnym wzmocnieniem wzdłuż linii, po której przemieszcza się student?

63. Lampa wyładowcza wypełniona wodorem emituje światło widzialne o czterech długościach fali: $410\,\text{nm}$, $434\,\text{nm}$, $486\,\text{nm}$ i $656\,\text{nm}$.
a. Jeśli światło z takiej lampy oświetli szczeliny wzajemnie oddalone od siebie o $0{,}025\,\text{mm}$, to w jakich odległościach od głównego maksimum pojawią się maksima trzeciego rzędu na ekranie odległym o $2\,\text{m}$ od szczelin?
b. W jakiej odległości od siebie pojawią się maksima drugiego i trzeciego rzędu dla $\lambda = 486\,\text{nm}$?

64. Monochromatyczne światło o częstotliwości $5{,}5 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$ pada na 10 szczelin oddalonych od siebie o $0{,}02\,\text{mm}$. Jaka będzie odległość pomiędzy głównym maksimum a maksimum trzeciego rzędu na ekranie odległym o $2\,\text{m}$ od szczelin?

65. Osiem szczelin równo oddalonych od siebie o $0{,}149\,\text{mm}$ zostało równomiernie oświetlonych monochromatycznym światłem o długości fali $\lambda = 523\,\text{nm}$. Jaka jest szerokość kątowa głównego maksimum na ekranie oddalonym o $2{,}35\,\text{m}$?

66. Osiem szczelin równo oddalonych od siebie o $0{,}149\,\text{mm}$ zostało równomiernie oświetlonych monochromatycznym światłem o długości fali $\lambda = 523\,\text{nm}$. Jakie jest natężenie maksimum drugiego rzędu w porównaniu z natężeniem głównego maksimum?

67. Transparentna, cienka warstwa o grubości $250\,\text{nm}$ i współczynniku załamania $1{,}4$ jest otoczona z obu stron powietrzem. Dla jakiej długości fali z widma światła białego nastąpi destruktywna interferencja w wiązce odbitej, gdy wiązka światła białego pada prostopadle na cienką warstwę?

68. Minimum natężenia światła przechodzącego przez transparentną cienką warstwę ($n = 1{,}2$) w powietrzu występuje dla fal o długości $\lambda = 450\,\text{nm}$.
a. Jaka jest najmniejsza grubość warstwy?
b. Jeśli ta wartość długości fali, dla której występuje minimum natężenia, jest największa, to jakie będą trzy kolejne, mniejsze długości fal λ, dla których również wystąpi minimum natężenia?

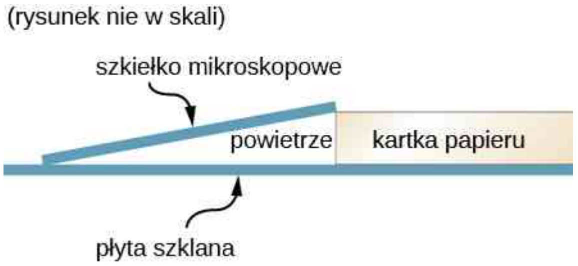
69. Cienka warstwa o współczynniku załamania $n = 1{,}32$ jest otoczona powietrzem. Jaka powinna być najmniejsza grubość tej warstwy, aby zminimalizować odbicie światła o długości fali $\lambda = 500\,\text{nm}$ padającego prostopadle na tę warstwę?

70. Powtórz obliczenia z poprzedniego zadania w sytuacji, gdy cienką warstwę umieszczono na płaskiej, szklanej płycie ($n = 1{,}5$).

71. Po rozlaniu małej ilości benzyny ($n = 1{,}4$) na

powierzchni wody w zatoce utworzyła się jej cienka warstwa o grubości $450\ \text{nm}$.
a. Jaki dominujący kolor zobaczy ptak przelatujący dokładnie nad tą plamą?
b. Jaki dominujący kolor zaobserwuje foka, płynąca pod wodą?

72. Szkiełko mikroskopowe o długości $10\ \text{cm}$ jest oddzielone na jednym swym końcu od płyty szklanej kartką papieru. Jak pokazano na poniższym rysunku, drugi koniec szkiełka dotyka szklanej płyty. Gdy szkiełko jest oświetlone od góry światłem lampy sodowej ($\lambda = 589\ \text{nm}$), to obserwuje się 18 prążków interferencyjnych na każdy centymetr długości szkiełka. Jaka jest grubość kartki papieru?



73. Przyjmij, że układ z poprzedniego zadania zostanie zanurzony w cieczy o nieznanym współczynniku załamania. Jeśli teraz pojawi się 14 prążków interferencyjnych na każdy centymetr długości szkiełka, to jaki będzie współczynnik załamania nieznanej cieczy?

74. Gdy dwie płytki szklane położymy jedna na drugą i na jednym ich końcu umieścimy pomiędzy nimi kawałek kartki papieru, to pomiędzy płytkami utworzy się cienki klin powietrzny. Kiedy taki układ oświetlimy pionowo z góry światłem monochromatycznym, to w świetle odbitym pojawią się prążki interferencyjne. Czy pierwszym prążkiem, który zaobserwujemy przy styku płytek szklanych, będzie jasny czy ciemny prążek? Swoją odpowiedź uzasadnij.

75. Dwie identyczne prostokątne płytki szklane zostały wykorzystane do pomiaru grubości włosa. Płytki stykają się ze sobą na jednym końcu, podczas gdy na przeciwnej krawędzi pomiędzy nimi umieszczono włos. Gdy taki układ oświetlono od góry światłem lampy sodowej ($\lambda = 589\ \text{nm}$), policzono, że włos znajduje się pomiędzy 180 a 181 ciemnym prążkiem. Jaka jest dolna i górna granica średnicy badanego włosa?

76. Dwa szkiełka mikroskopowe są oświetlone prostopadle światłem monochromatycznym ($\lambda = 589\ \text{nm}$). Jedno ze szkiełek styka się z drugim na jednym końcu, podczas gdy na przeciwległej krawędzi pomiędzy szkiełkami umieszczono cienki, miedziany drucik, tworząc w ten sposób klin powietrzny. Średnica miedzianego drucika wynosi $29{,}45\ \mu\text{m}$. Ile jasnych prążków będzie widocznych od miejsca styku szkiełek do miedzianego drucika?

77. Profesjonalny obiektyw fotograficzny zbudowany jest nie z jednej, a z kilku lub nawet kilkunastu soczewek. Niepożądanym efektem w takim układzie soczewek jest to, że światło odbite od powierzchni jednej soczewki może następnie wielokrotnie ulegać odbiciom pomiędzy innymi soczewkami obiektywu, co może prowadzić do pogorszenia jakości optycznej całego układu. Aby temu przeciwdziałać, jedną z soczewek pokrywa się z jednej strony cienką warstwą materiału ($n = 128$). Współczynnik załamania szkła soczewki jest równy $1{,}68$. Jaka jest najmniejsza grubość tej warstwy, która zredukuje odbicie fal o długości $640\ \text{nm}$ wskutek destruktywnej interferencji? (Innymi słowy: powłoka antyrefleksyjna musi być zaprojektowana dla $\lambda = 640\ \text{nm}$).

78. Konstruktywna interferencja jest obserwowana dokładnie ponad plamą benzyny dla długości fal (w powietrzu) równych $440\ \text{nm}$ i $616\ \text{nm}$. Współczynnik załamania tej benzyny jest równy $n = 1{,}54$. Jaka jest najmniejsza grubość plamy benzyny?

79. Bańka mydlana została puszczona na wolnym powietrzu. Jakie kolory (wyznacz długości fal) zostaną wzmocnione w odbitym świetle słonecznym? Współczynnik załamania bańki mydlanej jest równy $1{,}36$, a grubość jej ścianek wynosi $380\ \text{nm}$.

80. W interferometrze Michelsona ze źródłem światła w postaci lasera He-Ne ($\lambda = 632{,}8\ \text{nm}$) obraz interferencyjny można obserwować na ekranie. Jeśli ruchome zwierciadło przesunięto o $8{,}54\ \mu\text{m}$, to ile prążków interferencyjnych przesunie się wzdłuż obserwowanego fragmentu obrazu?

81. Eksperymentator zliczył 251 prążków, kiedy przesunięto ruchome zwierciadło w interferometrze Michelsona. Zastosowanym źródłem światła była lampa sodowa emitująca fale o długości równej $589\ \text{nm}$. O jaką odległość zostało przesunięte zwierciadło?

82. Interferometr Michelsona wykorzystano do pomiaru długości fali światła. Gdy ruchome zwierciadło zostało przesunięte o dokładnie $0{,}1\ \text{mm}$, to liczba prążków przesuniętych w obrazie wyniosła 316. Jaka jest długość fali użytego światła?

83. Szklany pojemnik o długości $5\ \text{cm}$ umieszczono w jednym z ramion interferometru Michelsona ze źródłem światła o długości fali równej $613\ \text{nm}$. Pojemnik początkowo jest wypełniony powietrzem ($n = 1{,}000\,293$) pod ciśnieniem atmosferycznym, następnie powietrze zostaje wypompowane z użyciem pompy próżniowej do momentu osiągnięcia w pojemniku bardzo wysokiej próżni. Ile prążków interferencyjnych przesunie się wzdłuż obserwowanego fragmentu obrazu podczas tej operacji?

84. Do jednego z ramion interferometru Michelsona włożono plastikową płytkę o grubości $75\ \mu\text{m}$, co spowodowało przesunięcie obrazu interferencyjnego o 86 prążków. Źródło światła ma długość fali równą $610\ \text{nm}$

w powietrzu. Jaki jest współczynnik załamania plastiku?

85. Grubość folii aluminiowej została zmierzona przy użyciu interferometru Michelsona, którego ruchome zwierciadło połączono z mikrometrem. Zastosowanym źródłem światła była lampa sodowa, emitująca fale o długości równej $589\ \text{nm}$. Jeśli pomiędzy kowadełkiem a wrzecionem mikrometru umieszczona była folia aluminiowa, to zaobserwowano przesunięcie obrazu o 27 prążków, gdy zaś jej tam nie było, to mikrometr wskazywał zero. Oblicz grubość folii aluminiowej.

86. Ruchome zwierciadło interferometru Michelsona jest przymocowane na jednym końcu do metalowego pręta o długości $23{,}3\ \text{mm}$. Drugi koniec pręta jest przymocowany na stałe. Kiedy temperatura wzrosła z $15\ \text{°C}$ do $25\ \text{°C}$, nastąpiło przesunięcie obrazu interferencyjnego o 14 prążków. Źródłem światła o długości fali $\lambda = 632{,}8\ \text{nm}$ jest laser He-Ne. Ile wynosi zmiana długości metalowego pręta i jaki jest jego współczynnik rozszerzalności liniowej?

87. W laboratorium, w którym należy zapewnić stałą temperaturę, interferometr Michelsona jest używany do monitorowania zmian temperatury. Ruchome zwierciadło jest przymocowane do jednego końca aluminiowego pręta o długości $1\ \text{m}$, którego drugi koniec jest unieruchomiony. Źródłem światła jest laser He-Ne ($\lambda = 632{,}8\ \text{nm}$). Rozdzielczość tego instrumentu odpowiada różnicy temperatur, która powoduje przesunięcie obrazu interferencyjnego o 1 prążek. Ile wynosi ta różnica temperatur?

88. Przesunięcie obrazu interferencyjnego o 65 prążków nastąpiło w interferometrze Michelsona, gdy cienką warstwę o grubości $42\ \mu\text{m}$ z nieznanego materiału umieszczono w jednym z ramion interferometru. Źródło światła ma długość fali równą $632{,}8\ \text{nm}$. Posługując się współczynnikami załamania zebranymi w podrozdziale Rozchodzenie się światła, zidentyfikuj materiał, z którego została wykonana ta cienka warstwa.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

89. Co się stanie z obrazem prążków interferencyjnych, gdy jedną ze szczelin zakryjemy cienką, transparentną warstwą o grubości $\lambda / [2(n-1)]$, gdzie λ jest długością fali padającego światła, a n jest współczynnikiem załamania tej cienkiej warstwy?

90. 51 wąskich szczelin jest równomiernie rozłożonych i wzajemnie oddalonych od siebie o $0{,}1\ \text{mm}$. Szczeliny są oświetlone światłem niebieskim o długości fali $400\ \text{nm}$. Jakie jest kątowe położenie 25. pobocznego maksimum? Jakie jest jego natężenie w porównaniu z natężeniem maksimum głównego?

91. Cienka warstwa benzyny rozlana na wodzie wydaje się ciemna, gdy jej grubość jest bardzo mała, ponieważ wtedy różnica dróg optycznych staje się mała w porównaniu z długością fali świetlnej, a dodatkowo padające światło doznaje przesunięcia fazy przy odbiciu od górnej powierzchni cienkiej warstwy. Zakładając, że cienka warstwa benzyny będzie ciemna, odpowiedz, kiedy różnica długości dróg optycznych jest mniejsza od jednej czwartej długości fali; oblicz, jaka może być największa grubość warstwy benzyny, która staje się ciemna dla wszystkich długości fali światła widzialnego. Współczynnik załamania benzyny wynosi $1{,}4$.

92. Rysunek 3.14 pokazuje dwa szkiełka mikroskopowe oświetlone prostopadle światłem monochromatycznym. Górne szkiełko dotyka dolnego na jednym końcu, zaś na przeciwnej krawędzi pomiędzy nimi umieszczono włos o grubości $0{,}1\ \text{mm}$, formując w ten sposób klin z powietrza.

a. W jakiej odległości od siebie pojawią się ciemne prążki interferencyjne, jeśli szkiełka mają długość $7{,}5\ \text{cm}$, a użyte światło ma długość fali równą $589\ \text{nm}$?

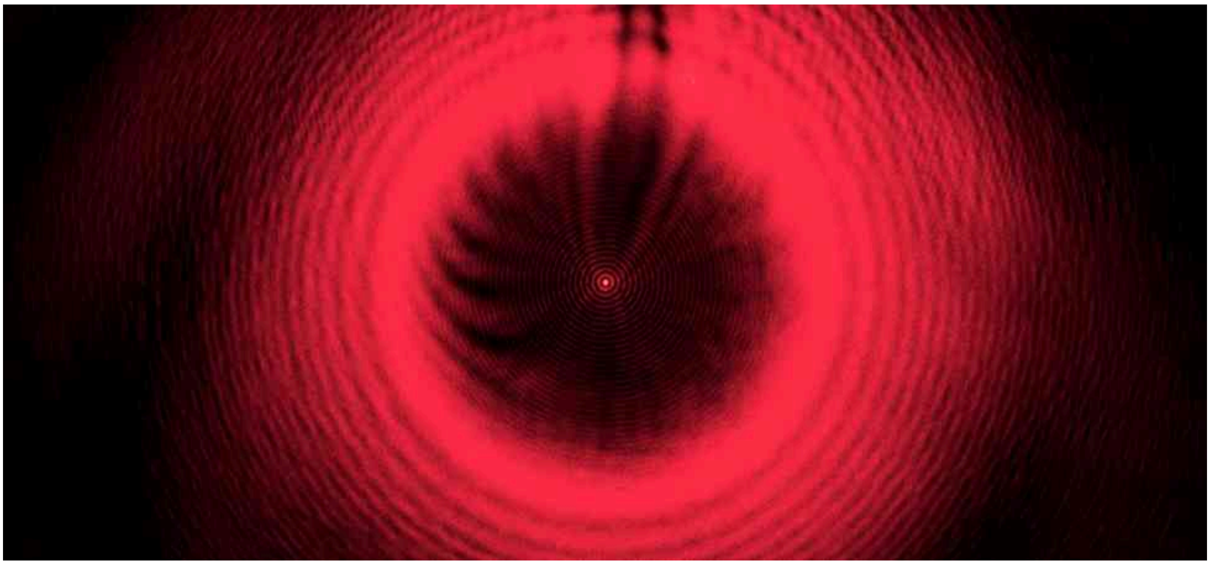
b. Czy będzie jakaś różnica, gdy szkiełka mikroskopowe wykonamy ze szkła o innym współczynniku załamania (szkła kronowego lub flintowego)? Swoją odpowiedź uzasadnij.

93. Rysunek 3.14 pokazuje dwa szkiełka mikroskopowe o długości $7{,}5\ \text{cm}$ oświetlone światłem o długości $589\ \text{nm}$ prostopadle do ich powierzchni. Górne szkiełko dotyka dolnego na jednym końcu, zaś na przeciwnej krawędzi pomiędzy nimi umieszczono drobny piasek, tworząc w ten sposób klin z powietrza. Jaki rozmiar mają ziarenka piasku, jeśli pojawiające się ciemne prążki interferencyjne są w odległości $1\ \text{mm}$ od siebie?

94. Bańka mydlana o ściankach o grubości $100\ \text{nm}$ jest oświetlona białym światłem pod kątem $45°$ do jej powierzchni. Jaka wartość długości fali i odpowiadający jej kolor światła widzialnego będą najbardziej widoczne w świetle odbitym, przy założeniu, że roztwór mydła ma ten sam współczynnik załamania co woda?

95. Rozlana plama benzyny na wodzie ma grubość $120\ \text{nm}$ i jest oświetlona białym światłem pod kątem $45°$ do jej powierzchni. Jaki kolor będzie miała plama benzyny (jaka będzie długość fali, która zostanie wzmocniona przy odbiciu), jeśli jej współczynnik załamania równa się $1{,}4$?

4 | DYFRAKCJA



Rysunek 4.1 Stalowa kulka łożyska oświetlona przez laser nie rzuca ostrego, okrągłego cienia. Zamiast tego obserwowana jest seria prążków dyfrakcyjnych, z centralną plamką w środku. Efekt ten, znany jako plamka Poissona, przewidział **Augustin Jean Fresnel (1788–1827)** jako konsekwencję dyfrakcji fal świetlnych. Jednak, opierając się na zasadach optyki geometrycznej, argumenty przeciwko przewidywaniom Fresnela wysuwał **Siméon-Denis Poisson (1781–1840)**. Źródło: modyfikacja pracy Poissona – Harvard Natural Sciences Lecture Demonstrations

Treść rozdziału

Wstęp

Wyobraźmy sobie monochromatyczną wiązkę światła przechodzącą przez wąski otwór – szczelinę tylko nieco większą niż długość fali światła. Zamiast prostego cienia szczeliny na ekranie widać, że pojawia się obraz interferencyjny, mimo że szczelina jest tylko jedna.

W rozdziale dotyczącym interferencji widzieliśmy, że aby uzyskać interferencję, potrzebne są dwa źródła. Jak więc może powstać obraz interferencyjny, gdy mamy tylko jedną szczelinę? W rozdziale Natura światła dowiedzieliśmy się, że w związku z zasadą Huygensa możemy wyobrazić sobie czoło fali jako równoważne nieskończenie wielu punktowym źródłom fal. Tak więc fala wysyłana ze szczeliny nie może zachowywać się jak pojedyncza fala, ale jak nieskończona liczba fal ze źródeł punktowych. Fale te mogą interferować ze sobą, tworząc obraz interferencyjny przy braku drugiej szczeliny. Zjawisko to nazywa się dyfrakcją.

Innym sposobem zrozumienia tego zjawiska jest uzmysłowienie sobie, że szczelina ma małą, ale skończoną szerokość. W poprzednim rozdziale nieformalnie traktowaliśmy szczeliny jako obiekty mające położenie, lecz pozbawione rozmiaru (o rozmiarze równym zero); szerokości tych szczelin były pomijalne. Gdy szczeliny mają skończone szerokości, każdy punkt wzdłuż otworu może być traktowany jako punktowe źródło światła – fundament zasady Huygensa. Ponieważ w świecie rzeczywistym przyrządy optyczne muszą mieć otwory skończonych rozmiarów (w przeciwnym razie nie mogłoby przechodzić przez nie światło), dyfrakcja odgrywa ważną rolę w sposobie interpretowania danych

wyjściowych pochodzących z tych instrumentów optycznych. Nakłada na przykład ograniczenia na naszą zdolność do rozróżniania obrazów lub obiektów. Jest to zagadnienie, o którym będziemy się uczyć w dalszej części tego rozdziału.

4.1 | Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać zjawisko dyfrakcji i warunki jej obserwacji;
- opisywać dyfrakcję na pojedynczej szczelinie.

Po przejściu przez wąską szczelinę (otwór) fala biegnąca w określonym kierunku ma tendencję do rozprzestrzeniania się. Przykładowo – fale dźwiękowe przedostające się do pokoju przez otwarte drzwi mogą być słyszane, nawet jeśli słuchacz znajduje się w części pomieszczenia, gdzie według geometrycznego obrazu rozchodzenia się promieni powinna być tylko cisza. Podobnie fale oceaniczne przechodzące przez otwór w falochronie mogą rozprzestrzeniać się po wnętrzu całej zatoki (Rysunek 4.2). Uginanie się fal dźwiękowych i oceanicznych wokół krawędzi otworu lub przeszkody i dalsze ich rozprzestrzenianie się w różnych kierunkach to dwa przykłady **dyfrakcji** (ang. **diffraction**). Zjawisko to dotyczy wszystkich typów fal.

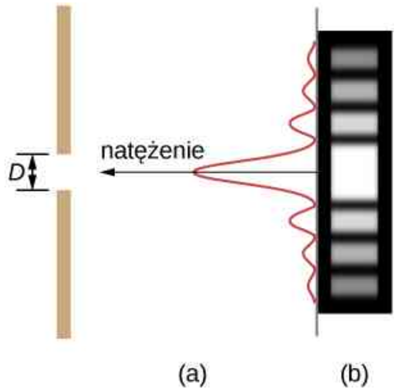


Rysunek 4.2 Na skutek dyfrakcji fale oceaniczne, wchodząc przez otwór w falochronie, mogą się rozprzestrzeniać po zatoce. Źródło: modyfikacja danych z map Google Earth

Dyfrakcja fal dźwiękowych jest dla nas oczywista, ponieważ długości fal w obszarze słyszalnym są w przybliżeniu takie same jak rozmiary przedmiotów, z którymi fale się stykają; warunek do obserwacji efektów dyfrakcyjnych może więc być łatwo spełniony. Ponieważ długości fal światła widzialnego zawierają się w przedziale od około 390 nm do 770 nm, większość obiektów nie ugina ich znacząco (nie powoduje znaczącej dyfrakcji). Występują jednak sytuacje, w których otwory są na tyle małe, że dyfrakcję światła również można obserwować. Na przykład, jeśli umieścimy palce środkowy i wskazujący blisko siebie i spojrzymy przez otwór między nimi na żarówkę, będziemy mogli zobaczyć dosyć wyraźny wzór dyfrakcyjny, składający się z jasnych i ciemnych linii biegnących równolegle do palców.

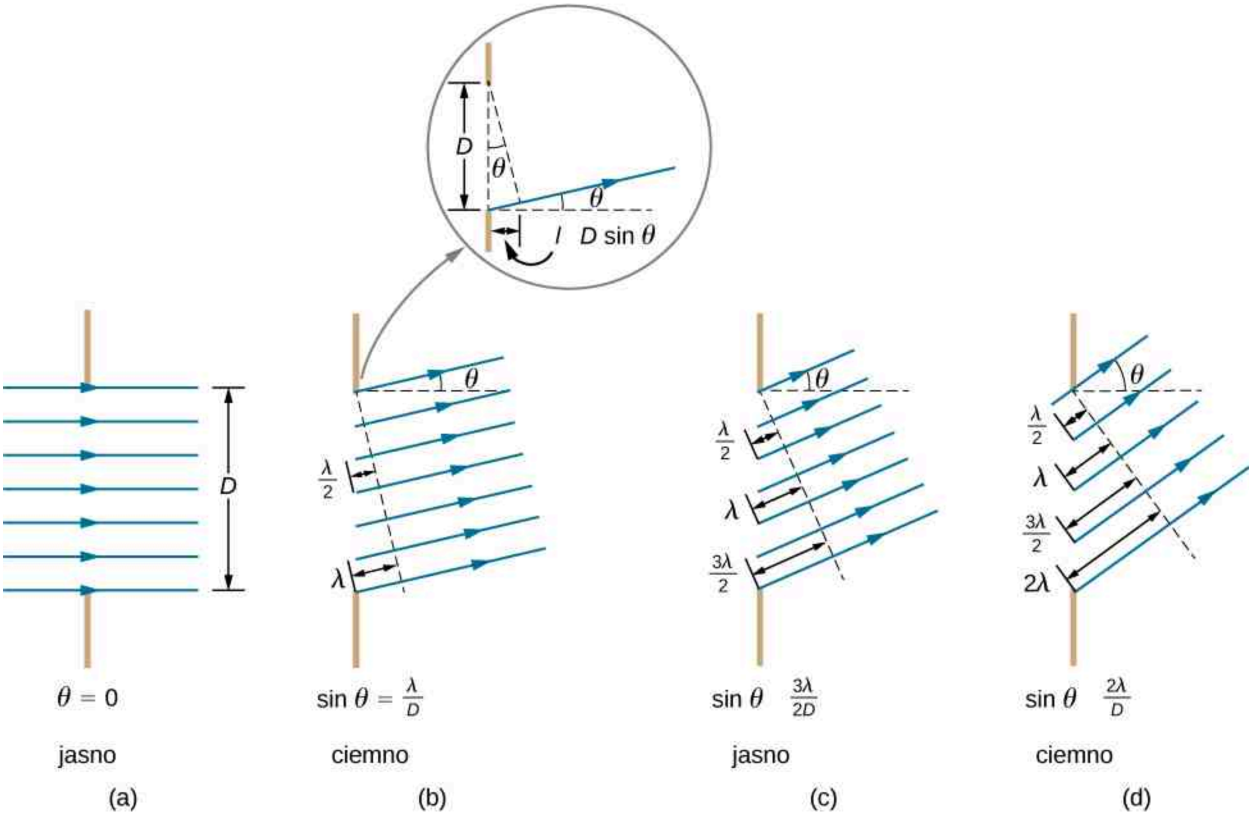
Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

Światło przechodzące przez pojedynczą szczelinę tworzy obraz (wzór) dyfrakcyjny różniący się nieco od tych utworzonych przez podwójne szczeliny lub siatki dyfrakcyjne, które omówiliśmy w rozdziale o interferencji. Rysunek 4.3 pokazuje obraz dyfrakcji zachodzący na pojedynczej szczelinie. Zauważmy, że centralne maksimum natężenia światła jest większe niż maksima z obu stron (maksima boczne) oraz że to natężenie światła zmniejsza się gwałtownie w miarę oddalania się od maksimum centralnego. W odróżnieniu od tego siatka dyfrakcyjna (Siatki dyfrakcyjne) wytwarza równomiernie rozmieszczone cienkie linie, które stopniowo zanikają po obu stronach centrum.



Rysunek 4.3 Obraz dyfrakcji na pojedynczej szczelinie. (a) Natężenie monochromatycznego światła przechodzącego przez pojedynczą szczelinę posiada centralne maksimum oraz wiele mniejszych i coraz ciemniejszych maksimów po obu stronach. Pik natężenia centralnego maksimum powinien być sześciokrotnie wyższy, niż to pokazano na rysunku. (b) Schemat pokazuje jasne centralne maksimum (jasny centralny prążek) oraz coraz ciemniejsze i cieńsze maksima po obu stronach.

Analizę dyfrakcji na pojedynczej szczelinie zilustrowano na Rysunku 4.4. Pokazano, jak światło dociera do szczeliny, równomiernie ją oświetla, rozchodząc się w kierunku prostopadłym do jej szerokości. Następnie pokazane jest, w jaki sposób światło rozchodzi się dalej z różnych punktów tej szczeliny. Zgodnie z **zasadą Huygensa** (ang. **Huygens' principle**) każdy punkt czoła fali w szczelinie emituje fale wtórne, jak to omawialiśmy w rozdziale Natura światła. Można to przedstawić za pomocą promieni, którym przypisujemy fazę, w tym jednakową fazę początkową, i które z każdego punktu czoła fali rozchodzą się we wszystkie strony. Każdy promień jest prostopadły do czoła fali. Przy założeniu, że odległość między szczeliną a ekranem jest duża w porównaniu z szerokością szczeliny, promienie zmierzają do wspólnego punktu docelowego prawie równolegle. Kiedy biegną w kierunku prostopadłym do ekranu, jak w części (a) rysunku, pozostają zgodne w fazie, a my obserwujemy centralne maksimum. Jednakże gdy promienie biegną pod kątem θ względem pierwotnego kierunku wiązki, każdy promień przebywa inną odległość, zmierzając do wspólnego punktu końcowego, w wyniku czego mogą one do niego docierać zgodne lub niezgodne w fazie. W części (b) promień dolny pokonuje odległość o jedną długość fali λ większą niż promień górny. W związku z tym promień środkowy przemieszcza się na odległość o $\lambda / 2$ mniejszą niż ten biegnący od dolnej krawędzi szczeliny, a w miejscu ich spotkania pojawia się w przeciwfazie i ulega interferencji destruktywnej (wygaszeniu). To samo dotyczy promienia wychodzącego nieco powyżej środka oraz promienia nieco powyżej dolnej krawędzi, które również nawzajem się wygaszają. W rzeczywistości każdy promień wychodzący ze szczeliny oddziałuje w ten sposób z innym promieniem. Innymi słowy, całkowite wygaszanie się wszystkich promieni daje minimum natężenia światła dla tego kąta. Bliźniacze minimum występuje przy kącie o tej samej wartości w punkcie leżącym poniżej środka ekranu (patrz Rysunek 4.4).



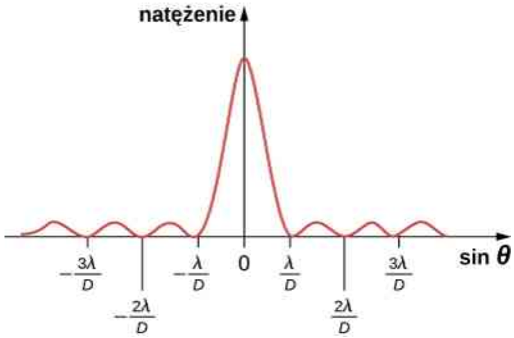
Rysunek 4.4 Światło przechodzące przez pojedynczą szczelinę jest uginane (rozchodzi się) we wszystkich kierunkach i może pod danym kątem ulegać interferencji konstruktywnej lub destruktywnej. Różnica długości dróg dla promienia dolnego i górnego z każdej strony szczeliny wynosi $D \sin \theta$.

Dla większego kąta w części (c) drogi optyczne górnego i dolnego promienia różnią się o $3\lambda / 2$. Jeśli podzielimy teraz „w myśli” szczelinę na trzy równe części, to stosując podobne rozumowanie, możemy zauważyć, że w punkcie docelowym fale z dwóch części ekranu się wygaszają, a z trzeciej nie. Inaczej rozumując, dolny promień przebywa odległość większą o λ od promienia górnego wychodzącego z punktu na wysokości $2 / 3$ szczeliny i spotyka się z nim w tej samej fazie, ulegając wzmocnieniu. To samo dotyczy wszystkich promieni odpowiednio z dolnej i górnej trzeciej części szczeliny. Ponieważ jednak dla tego kąta nie wszystkie promienie wychodzące ze szczeliny ulegają interferencji konstruktywnej, drugie maksimum nie jest tak silne, jak maksimum centralne. Wreszcie w części (d) pokazano sytuację dla kąta takiego, że różnica długości dróg dla promieni z obu stron szczeliny wynosi 2λ. Rozumujemy podobnie jak dla różnicy długości dróg równej λ, z tym że dzielimy szerokość szczeliny na cztery równe części, z których wychodzące fale wygaszają się parami, a efektem jest ciemny prążek na ekranie. Jak widać na Rysunku 4.4, różnica długości dróg dla promieni z obu stron szczeliny wynosi $D \sin \theta$, a minimum natężenia jest uzyskiwane, gdy różnica ta jest całkowitą wielokrotnością długości fali.

W ten sposób warunek uzyskania **destruktywnej interferencji dla pojedynczej szczeliny** (ang. **destructive interference for a single slit**) jest następujący

$$D \sin \theta = m\lambda, \tag{4.1}$$

gdzie D jest szerokością szczeliny, λ długością fali światła, θ kątem mierzonym względem pierwotnego kierunku padania światła, a $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ jest rzędem kolejnego minimum. Na Rysunku 4.5 przedstawiono widmo dyfrakcyjne dla pojedynczej szczeliny, tj. zależność natężenia światła od $\sin \theta$. Jak widać, maksima po obu stronach centralnego maksimum mają mniejszą wartość natężenia i nie są tak szerokie. Ten efekt będzie badany w części Dyfrakcja na podwójnej szczelinie.



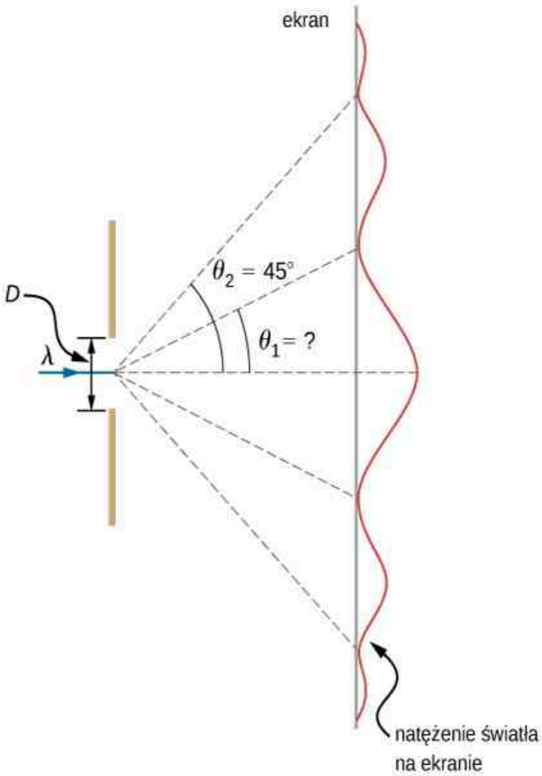
Rysunek 4.5 Wykres pokazujący natężenie widma dyfrakcji na pojedynczej szczelinie. Centralny pik jest szerszy i znacznie wyższy niż piki boczne. W rzeczywistości centralne maksimum jest sześć razy wyższe niż pokazane na rysunku.

Przykład 4.1

Obliczanie dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

Światło widzialne o długości fali $550\,\mathrm{nm}$ pada na pojedynczą szczelinę i wytwarza drugie minimum dyfrakcyjne pod kątem $45°$ względem kierunku padania promieni, jak to pokazano na Rysunku 4.6.

a. Jaka jest szerokość szczeliny?
b. Pod jakim kątem występuje pierwsze minimum?



Rysunek 4.6 W tym przykładzie analizujemy wykres zależności natężenia światła na ekranie od kąta dla obrazu dyfrakcyjnego na pojedynczej szczelinie.

Strategia rozwiązania

Dla podanych informacji i przy założeniu, że ekran jest daleko od szczeliny, możemy zastosować równanie $D\sin\theta = m\lambda$ najpierw w celu wyznaczenia D, a następnie kąta θ_1 dla pierwszego minimum.

Rozwiązanie

a. W treści zadania mamy podane, że $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$, $m = 2$ i $\theta_2 = 45°$. Rozwiązujemy równanie $D\sin\theta = m\lambda$ ze względu na D i podstawiając podane wartości, otrzymujemy

$$D = \frac{m\lambda}{\sin\theta_2} = \frac{2\cdot 550\,\mathrm{nm}}{\sin(45°)} = \frac{1100\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{0{,}707} = 1{,}56\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}.$$

b. Rozwiązanie równania $D\sin\theta = m\lambda$ dla $\sin\theta_1$ i podstawienie podanych wartości daje

$$\sin\theta_1 = \frac{m\lambda}{D} = \frac{550\cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{1{,}56\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}}.$$

Tak więc kąt θ_1 jest równy

$$\theta_1 = \arcsin(0{,}354) = 20{,}7°.$$

Znaczenie

Widzimy, że szczelina jest wąska (tylko kilka razy większa niż długość fali światła). Jest to zgodne z faktem, że aby wystąpiły istotne efekty związane z falową naturą światła, takie jak dyfrakcja na pojedynczej szczelinie, światło musi oddziaływać z obiektem o rozmiarze porównywalnym do długości jego fali. Widzimy również, że centralne maksimum rozciąga się na szerokość $20{,}7°$ w obie strony względem centrum i ma rozwartość około $41°$. Kąt pomiędzy pierwszym i drugim minimum wynosi około $24°$ $(45° - 20{,}7°)$. Tak więc drugie maksimum jest o połowę węższe od maksimum centralnego.

4.1 Sprawdź, czy rozumiesz. Załóż, że szerokość szczeliny w Przykładzie 4.1 wzrosła do $1{,}8 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$. Jakie są teraz nowe wartości kątów obserwacji pierwszego, drugiego i trzeciego minimum? Czy jest możliwe wystąpienie czwartego minimum?

4.2 | Natężenie światła w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

Cel dydaktyczny

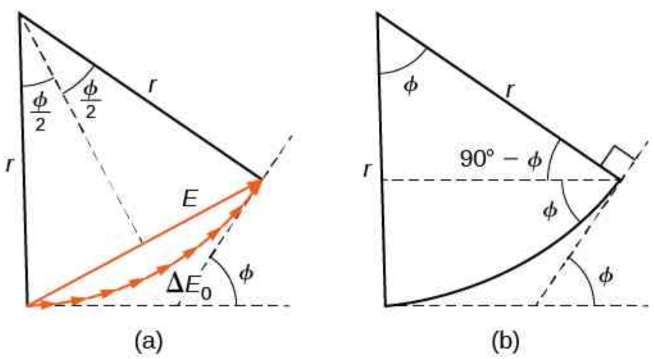
W tym podrozdziale nauczysz się:

- obliczać natężenia maksimów dyfrakcyjnych względem centralnego maksimum dla pojedynczej szczeliny dyfrakcyjnej;
- obliczać natężenie w dowolnym punkcie na ekranie względem centralnego maksimum.

W celu obliczenia natężenia obrazu dyfrakcyjnego stosujemy metodę wskazów (fazorów), używaną wcześniej do obliczeń w rozdziale Obwody prądu zmiennego (https://cnx.org/content/m67230/latest/) . Załóżmy, że na szczelinie pokazanej na Rysunku 4.4 mamy N źródeł wysyłających fale, zgodnie z zasadą Huygensa, przy czym każde znajduje się w odległości D / N od sąsiedniego źródła. W takim przypadku różnica dróg przebytych przez fale z sąsiadujących ze sobą źródeł do pewnego punktu P na ekranie wynosi $D / N \cdot \sin\theta$ i odpowiada różnicy faz $2\pi D / (\lambda N) \cdot \sin\theta$. Schemat wskazowy fal wysyłanych do punktu P pod kątem θ jest przedstawiony na Rysunku 4.7. Amplituda wskazu dla każdej z fal (fali Huygensa) wynosi ΔE_0, amplituda sumarycznego wskazu to E, a różnica faz między falami z pierwszego i ostatniego źródła wynosi

$$\phi = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin\theta.$$

Przy $N \longrightarrow \infty$ **diagram wskazowy** (ang. **phasor diagram**) zbliża się kształtem do okrągłego łuku o długości $N\Delta E_0$ i promieniu r. Ponieważ długość łuku wynosi $N\Delta E_0$ dla dowolnego ϕ, promień r łuku musi się zmniejszyć, gdy ϕ wzrasta (lub równoważnie, gdy wskazy tworzą ciaśniejsze spirale – o mniejszej średnicy).



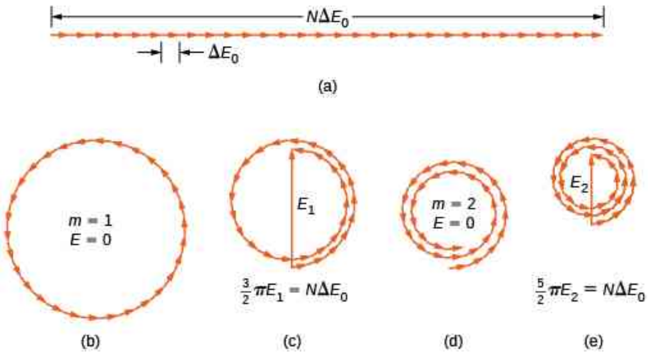
Rysunek 4.7 (a) Schemat wskazowy odpowiadający dyfrakcji na pojedynczej szczelinie pod kątem θ. Różnica faz między falami pochodzącymi z pierwszego i ostatniego źródła wynosi $\phi = 2\pi / \lambda \cdot D \sin\theta$. (b) Geometria schematu wskazowego.

Schemat wskazowy dla $\phi = 0\,\text{rad}$ (centrum obrazu dyfrakcyjnego) przedstawiono na Rysunku 4.8 (a) dla $N = 30$. W

tym przypadku wskazy układają się wzdłuż linii prostej o długości $N\Delta E_0$, promień r dąży do nieskończoności, a długość sumarycznego wskazu przyjmuje maksymalną wartość $N\Delta E_0$. Natężenie światła można otrzymać z zależności $I = c\varepsilon_0 E^2 / 2$, którą znajdziemy w rozdziale Fale elektromagnetyczne (https://cnx.org/content/m65888/latest/). Stąd natężenie dla maksimum wynosi

$$I_0 = \frac{1}{2} c\varepsilon_0 (N\Delta E_0)^2 = \frac{1}{2\mu_0 c}(N\Delta E_0)^2,$$

gdzie $\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$. Schematy wskazowe dla pierwszych dwóch minimów natężenia obrazu dyfrakcyjnego przedstawiono w częściach (b) i (d) Rysunku 4.8. W obu przypadkach sumy wskazów (wskazy wypadkowe) są równe zero po wcześniejszym obróceniu się o $\phi = 2\pi$ rad dla $m = 1$ i $\phi = 4\pi$ rad dla $m = 2$.



Rysunek 4.8 Schematy wskazowe (z 30 wskazami) dla różnych punktów obrazu dyfrakcyjnego na pojedynczej szczelinie. Wielokrotne obroty wokół danego okręgu zostały rozdzielone nieznacznie tak, żeby poszczególne wskazy mogły być widoczne. Wskazy odpowiadają odpowiednio numerom prążków i ich natężeniom: (a) centralnemu maksimum, (b) pierwszemu minimum, (c) pierwszemu maksimum poza centralnym maksimum, (d) drugiemu minimum i (e) drugiemu maksimum poza centralnym maksimum.

Następne dwa maksima poza centralnym maksimum są reprezentowane przez diagramy wskazowe części (c) i (e). W części (c) wskazy obróciły się o $\phi = 3\pi$ rad i utworzyły wskaz wypadkowy o wartości równej E_1. Długość łuku utworzonego przez wskazy wynosi $N\Delta E_0$. Ponieważ odpowiada to 1,5 obrotu wskazów wokół okręgu o średnicy E_1, mamy

$$\frac{3}{2}\pi E_1 = N\Delta E_0,$$

więc

$$E_1 = \frac{2N\Delta E_0}{3\pi}$$

i

$$I_1 = \frac{E_1^2}{2\mu_0 c} = \frac{4(N\Delta E_0)^2}{9\pi^2 \cdot 2\mu_0 c} = 0{,}045 I_0,$$

gdzie

$$I_0 = \frac{(N\Delta E_0)^2}{2\mu_0 c}.$$

W części (e) wskazy obracają się o $\phi = 5\pi$ rad, co odpowiada 2,5 obrotu wokół okręgu o średnicy E_2 i długości łuku $N\Delta E_0$. To daje $I_2 = 0{,}016 I_0$. Udowodnienie tego jest zadaniem dla studentów w jednym z ćwiczeń.

Te dwa maksima w rzeczywistości odpowiadają wartościom ϕ nieco mniejszym niż 3π rad i 5π rad. Ponieważ całkowita długość łuku wykresu wskazowego zawsze wynosi $N\Delta E_0$, promień łuku zmniejsza się wraz ze wzrostem ϕ. W wyniku obrotu E_1 i E_2 okazują się nieco większe w przypadku łuków, które nie są właściwie zwinięte,

odpowiednio przy $3\pi\,\text{rad}$ i $5\pi\,\text{rad}$. Dokładne wartości ϕ dla maksimów są badane w jednym z ćwiczeń. Po rozwiązaniu tego problemu okaże się, że wartości te są nieco, choć bardzo nieznacznie mniejsze niż wartości $\phi = 3\pi\,\text{rad}, 5\pi\,\text{rad}, 7\pi\,\text{rad}, \ldots$.

Aby obliczyć natężenie w dowolnym punkcie P ekranu, wróćmy do diagramu wskazowego na Rysunku 4.7. Ponieważ łuk zatacza kąt ϕ względem środka okręgu, to dany jest równaniem

$$N\Delta E_0 = r\phi$$

oraz

$$\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{E}{2r},$$

gdzie E jest amplitudą wypadkowego pola. Przekształcenie drugiego równania ze względu na E, a następnie zastąpienie r wyrażeniem otrzymanym z pierwszego równania daje

$$E = 2r\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = 2\cdot\frac{N\Delta E_0}{\phi}\cdot\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

Dalej definiując

$$\beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi D\sin\theta}{\lambda}, \tag{4.2}$$

otrzymujemy

$$E = N\Delta E_0\frac{\sin\beta}{\beta}. \tag{4.3}$$

To równanie opisuje stosunek amplitudy uzyskanego natężenia pola w dowolnym punkcie obrazu dyfrakcyjnego do amplitudy $N\Delta E_0$ centralnego maksimum. Natężenie jest z kolei proporcjonalne do kwadratu amplitudy, mamy więc

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \tag{4.4}$$

gdzie $I_0 = (N\Delta E_0)^2 / (2\mu_0 c)$ jest natężeniem w centrum obrazu.

Dla centralnego maksimum $\phi = 0\,\text{rad}$, a stąd β jest równe zero i widzimy z reguły de l'Hôpitala, że $\lim\limits_{\beta\longrightarrow 0}(\sin\beta/\beta) = 1$, tak że $\lim\limits_{\phi\longrightarrow 0} I = I_0$. Dla następnego maksimum, $\phi = 3\pi\,\text{rad}$, mamy $\beta = 3/2\cdot\pi\,\text{rad}$ i po podstawieniu do Równania 4.4 otrzymujemy

$$I_1 = I_0\left(\frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\frac{3\pi}{2}}\right)^2 = 0{,}045 I_0,$$

zgodnie z tym, co otrzymaliśmy wcześniej w tej części przy zastosowaniu średnic i obwodów diagramów wskazowych. Podstawienie $\phi = 5\pi\,\text{rad}$ do równania daje podobny wynik dla I_2.

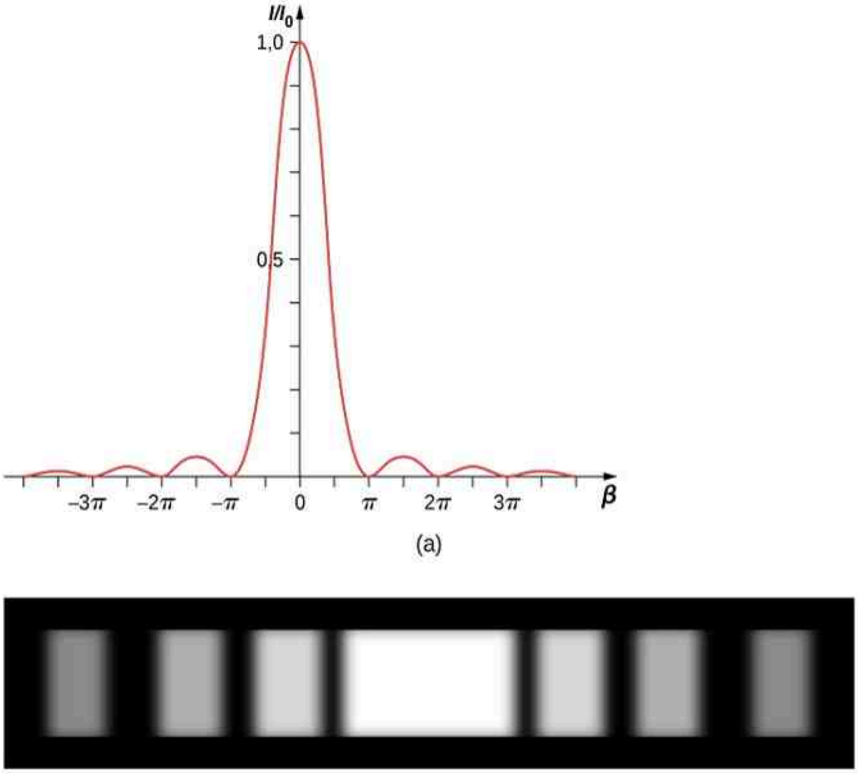
Wykres Równania 4.4 pokazano na Rysunku 4.9, a bezpośrednio pod nim znajduje się fotografia rzeczywistego obrazu dyfrakcyjnego. Zauważmy, że centralny pik jest dużo jaśniejszy od innych, a natężenie światła jest równe zero dla punktów, w których $\sin\beta = 0$, czyli dla $\beta = m\pi\,\text{rad}$. To odpowiada

$$\frac{\pi D \sin \theta}{\lambda} = m\pi$$

lub

$$D \sin \theta = m\lambda,$$

czyli Równaniu 4.1.



Rysunek 4.9 (a) Obliczony rozkład natężenia światła w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie. (b) Rzeczywisty obraz dyfrakcyjny.

Przykład 4.2

Natężenie światła w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

Światło o długości fali 550 nm przechodzi przez szczelinę o szerokości 2 μm i daje podobny obraz dyfrakcyjny do pokazanego na Rysunku 4.9.

a. Znajdźmy położenia dwóch pierwszych minimów względem centralnego maksimum jako funkcję kąta;

b. Określmy, względem centralnego maksimum, natężenie światła w punkcie położonym w połowie odległości między tymi minimami.

Strategia rozwiązania

Położenia minimów określa Równanie 4.1, $D \sin \theta = m\lambda$. Pierwsze dwa minima występują dla $m = 1$ i $m = 2$. Równanie 4.4 i Równanie 4.2 można wykorzystać do określenia natężenia światła po wcześniejszym wyznaczeniu kąta.

Rozwiązanie

a. Rozwiązanie Równania 4.1 ze względu na θ daje nam $\theta_m = \arcsin\,(m\lambda \,/\, D)$, zatem

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{+1 \cdot 550 \cdot 10^{-9}\text{ m}}{2 \cdot 10^{-6}\text{ m}}\right) = +16°,$$

$$\theta_2 = \arcsin\left(\frac{+2 \cdot 550 \cdot 10^{-9}\text{ m}}{2 \cdot 10^{-6}\text{ m}}\right) = +33{,}4°.$$

b. Kąt równy połowie sumy kątów θ_1 i θ_2 wynosi

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} = \frac{16° + 33{,}4°}{2} = 24{,}7°.$$

Równanie 4.2 daje

$$\beta = \frac{\pi D \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 10^{-6}\text{ m} \cdot \sin(24{,}7°)}{550 \cdot 10^{-9}\text{ m}} = 1{,}52\pi\,\text{rad} \quad \text{lub} \quad 4{,}77\,\text{rad}.$$

Z Równania 4.4 możemy obliczyć

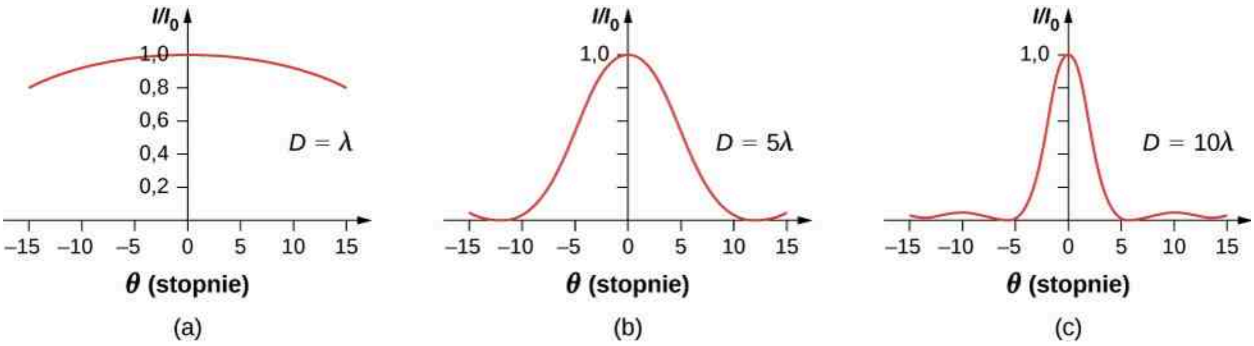
$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = \left[\frac{\sin(4{,}77)}{4{,}77}\right]^2 = \left(\frac{-0{,}9985}{4{,}77}\right)^2 = 0{,}044.$$

Znaczenie

Punkt leżący w połowie odległości między dwoma minimami znajduje się zarazem bardzo blisko maksimum oczekiwanego w pobliżu $\beta = 3\pi / 2$ lub $1{,}5\pi$.

4.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Pod jakim kątem w stosunku do centrum w eksperymencie z Przykładu 4.2 znajduje się trzecie maksimum i jakie jest jego natężenie względem maksimum centralnego?

Jeśli szerokość szczeliny D się zmienia, to zmienia się również rozkład natężenia, jak pokazano na Rysunku 4.10. Centralny pik jest rozłożony w obszarze od $\sin\theta = -\lambda / D$ do $\sin\theta = +\lambda / D$. Dla małych θ odpowiada to szerokości kątowej $\Delta\theta \approx 2\pi / D$. W związku z tym poszerzenie szczeliny powoduje zmniejszenie **szerokości centralnego jasnego piku** (ang. **width of the central peak**). Dla szczeliny z $D \gg \lambda$ centralny pik jest bardzo ostry, natomiast jeśli $D \approx \lambda$, staje się on dość szeroki.



Rysunek 4.10 Obrazy dyfrakcyjne na pojedynczej szczelinie dla różnych szerokości szczelin. Gdy szerokość szczeliny D wzrasta od $D = \lambda$ do 5λ, a następnie do 10λ, szerokość piku centralnego oraz kąt mierzony względem pierwszego minimum maleją, jak to wynika z Równania 4.1.

Eksperyment dyfrakcyjny w optyce może wymagać wielu przygotowań, ale ta symulacja (https://openstaxcollege.org/l/21diffrexpoptsi) Andrew Duffy’ego oferuje nie tylko szybką konfigurację układu, lecz także możliwość natychmiastowej zmiany szerokości szczeliny. Uruchom symulację i wybierz opcję „Pojedyncza szczelina”. Możesz zmieniać szerokość szczeliny i zobaczyć wpływ tych zmian na obraz dyfrakcyjny na ekranie oraz na wykresie.

4.3 | Dyfrakcja na podwójnej szczelinie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać łączny efekt interferencji i dyfrakcji na podwójnej szczelinie, z których każda szczelina jest o skończonej szerokości;
- określać względne natężenia prążków interferencyjnych w obrębie obrazu dyfrakcyjnego;
- identyfikować brakujące rzędy widma, jeśli takie istnieją.

Kiedy badaliśmy interferencję w eksperymencie Younga z podwójną szczeliną, zignorowaliśmy efekt dyfrakcyjny na każdej szczelinie. Założyliśmy, że szczeliny były tak wąskie, że na ekranie widać było interferencję światła z zaledwie dwóch źródeł punktowych. Jeśli szczelina jest mniejsza niż długość fali, to Rysunek 4.10 (a) pokazuje, że światło się rozchodzi, i obserwujemy wyłącznie szeroki pik centralny o malejącym natężeniu, bez minimów i bocznych maksimów dyfrakcyjnych. Dlatego rozsądnie było wówczas nie uwzględniać efektu dyfrakcyjnego. Jeśli jednak zrobimy szerszą szczelinę, tak jak to pokazuje Rysunek 4.10 (b) i (c), to nie można pomijać zjawiska dyfrakcji. W tej części zbadamy komplikacje, z jakimi mamy do czynienia w eksperymencie z dwiema szczelinami, gdy trzeba wziąć pod uwagę efekt dyfrakcyjny na każdej z nich.

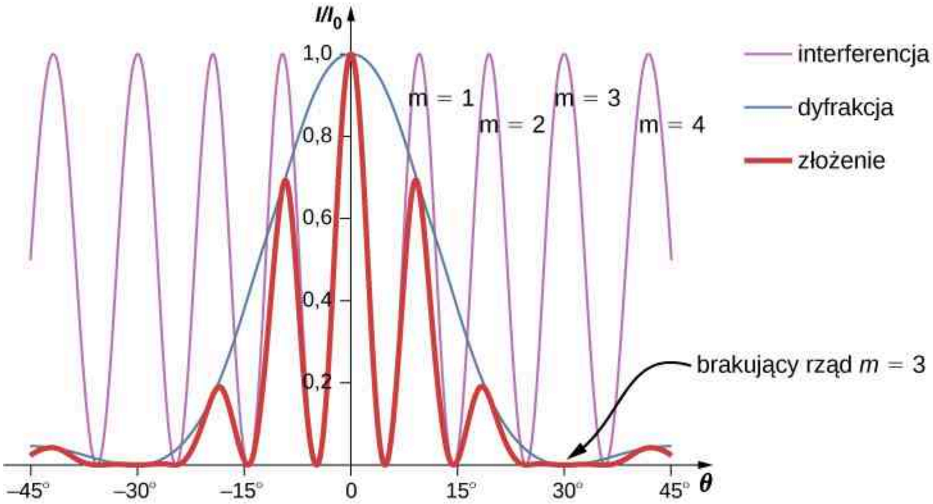
Aby wyznaczyć obraz dyfrakcyjny dla dwóch (lub dowolnej liczby) szczelin, musimy uogólnić metodę, którą stosowaliśmy dla pojedynczej szczeliny. Oznacza to, że w każdej szczelinie umieszczamy źródła punktowe o jednolitym rozkładzie, emitujące fale wtórne (fale Huygensa), a następnie sumujemy te wychodzące ze wszystkich szczelin fale, co daje natężenie światła w dowolnym punkcie na ekranie. Chociaż szczegóły tych obliczeń mogą się wydać dosyć skomplikowane, to ostateczny wynik jest dość prosty.

Obraz dyfrakcyjny z dwóch szczelin

Obraz dyfrakcyjny z dwóch szczelin (ang. **two-slit diffraction pattern**) o szerokości D, które znajdują się w odległości d od siebie, jest złożeniem obrazu interferencyjnego otrzymanego z dwóch źródeł punktowych odległych od siebie o d i obrazu dyfrakcyjnego ze szczeliny o szerokości D.

Innymi słowy, położenia prążków interferencyjnych są dane równaniem $d \sin \theta = m\lambda$, tak samo jak wtedy, gdy rozważamy szczeliny jako punktowe źródła, ale natężenia prążków są teraz zmniejszone przez efekty dyfrakcyjne, zgodnie z Równaniem 4.4. (Zauważmy, że w rozdziale o interferencji napisaliśmy $d \sin \theta = m\lambda$ i użyliśmy liczby całkowitej m do numeracji prążków interferencyjnych. Równanie 4.1 również wykorzystuje symbole m, ale tym razem odnoszą się one do minimów dyfrakcyjnych. Jeśli obu równań używa się równocześnie, dobrze jest stosować inną zmienną (taką jak n) dla jednej z tych liczb całkowitych w celu ich odróżnienia).

Minima natężenia światła dla efektów interferencyjnych i dyfrakcyjnych występujących równocześnie powstają pod różnymi kątami. Na ekranie pojawia się skomplikowany obraz, w którym brakuje niektórych maksimów interferencyjnych pochodzących od obu szczelin, wówczas gdy maksimum interferencyjne występuje w tym samych kierunku co minimum dyfrakcyjne. Będziemy określać taki brakujący pik jako **brakujący rząd** (ang. **missing order**). Przykład takiego obrazu dyfrakcyjnego na ekranie jest pokazany na Rysunku 4.11. Linia ciągła z wieloma pikami (maksimami) o różnych wysokościach odpowiada natężeniu obrazu obserwowanemu na ekranie, otrzymanego ze złożenia obrazu interferencji fal z oddzielnych szczelin i dyfrakcji fal na pojedynczej szczelinie.



Rysunek 4.11 Dyfrakcja na podwójnej szczelinie. Purpurowa linia z pikami o tej samej wysokości opisuje obraz interferencji fal z dwóch szczelin; niebieska linia z jednym dużym garbem pośrodku opisuje obraz dyfrakcyjny otrzymany z pojedynczej szczeliny; gruba, czerwona linia, która opisuje obraz obserwowany na ekranie, jest ich złożeniem (iloczynem natężeń). Wykres przedstawia oczekiwany wynik dla szerokości szczeliny $D = 2\lambda$ i odległości między szczelinami $d = 6\lambda$. Widoczny jest brak maksimum interferencyjnego dla $m = \pm 3$, ponieważ w tym samym kierunku występuje minimum dyfrakcyjne.

Przykład 4.3

Intensywność prążków

Rysunek 4.11 pokazuje, że natężenie prążka dla $m = 3$ wynosi zero, ale co z innymi prążkami? Obliczmy natężenie prążka dla $m = 1$ względem natężenia piku centralnego I_0.

Strategia rozwiązania

Określimy kąt interferencji konstruktywnej na podwójnej szczelinie, posługując się wzorem z rozdziału Interferencja, a następnie ustalimy względne natężenie dla tego kąta określone przez dyfrakcję, korzystając z Równania 4.4.

Rozwiązanie

Z rozdziału o interferencji wiemy, że jasne prążki interferencyjne występują, gdy $d \sin\theta = m\lambda$ lub

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}.$$

Z Równania 4.4 mamy

$$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \text{ gdzie } \beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}.$$

Po podstawieniu z powyższego otrzymujemy

$$\beta = \frac{\pi D \sin\theta}{\lambda} = \frac{\pi D}{\lambda} \cdot \frac{m\lambda}{d} = \frac{m\pi D}{d}.$$

Dla $D = 2\lambda$, $d = 6\lambda$ i $m = 1$

$$\beta = \frac{\pi \cdot 2\lambda}{6\lambda} = \frac{\pi}{3}.$$

Stąd natężenie wynosi

$$I = I_0\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 = I_0\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3}}\right)^2 = 0{,}684I_0.$$

Znaczenie

Należy zauważyć, że takie podejście jest stosunkowo proste i daje wynik niemal dokładnie taki sam jak bardziej skomplikowana analiza dyfrakcji na podwójnej szczelinie i obliczanie wartości natężenia oświetlenia ekranu przy użyciu wskazów (cienka linia na Rysunku 4.11). Metoda wskazów uwzględnia nachylenie w dół wykresu natężenia dyfrakcji (niebieska linia) tak, że pik w pobliżu $m = 1$ występuje dla wartości θ niewiele mniejszej, niż to tutaj pokazano.

Przykład 4.4

Dyfrakcja na podwójnej szczelinie

Załóżmy, że w eksperymencie Younga szczeliny o szerokości $0{,}02\text{ mm}$ są odległe od siebie o $0{,}2\text{ mm}$. Jeśli szczeliny są oświetlone monochromatycznym światłem o długości fali 500 nm, to ile jasnych prążków obserwuje się w obszarze centralnego piku widma (obrazu) dyfrakcyjnego?

Rozwiązanie

Z Równania 4.1 wynika, że położenie kątowe pierwszego minimum dyfrakcyjnego wynosi

$$\theta \approx \sin\theta = \frac{\lambda}{D} = \frac{5\cdot10^{-7}\text{ m}}{2\cdot10^{-5}\text{ m}} = 2{,}5\cdot10^{-2}\text{ rad}.$$

Podstawiając $\sin\theta = m\lambda$ dla $\theta = 2{,}5\cdot10^{-2}\text{ rad}$, otrzymujemy

$$m = \frac{d\sin\theta}{\lambda} = \frac{0{,}2\text{ mm}\cdot2{,}5\cdot10^{-2}\text{ rad}}{5\cdot10^{-7}\text{ m}} = 10,$$

czyli tyle wynosi maksymalny rząd interferencji, który mieści się wewnątrz centralnego piku. Zauważamy, że $m = \pm10$ są brakującymi rzędami dyfrakcji, jako że wartości θ dokładnie się zgadzają. W związku z tym obserwujemy jasne prążki dla

$$m = -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7, +8, +9,$$

czyli w sumie 19 jasnych prążków.

4.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** W eksperymencie z Przykładu 4.4 pokaż, że $m = 20$ jest również brakującym rzędem dyfrakcji.

Zbadaj efekty dyfrakcji na podwójnej szczelinie. W tej symulacji (https://openstaxcollege.org/l/21doubslitdiff), napisanej przez Fu-Kwun Hwang, wybierz $N = 2$ za pomocą suwaka i sprawdź, co się dzieje, gdy zmieniasz szerokość szczeliny, odległość między szczelinami i długość fali. Czy możesz „zażądać” brakującego rzędu?

4.4 | Siatki dyfrakcyjne

Cel dydaktyczny

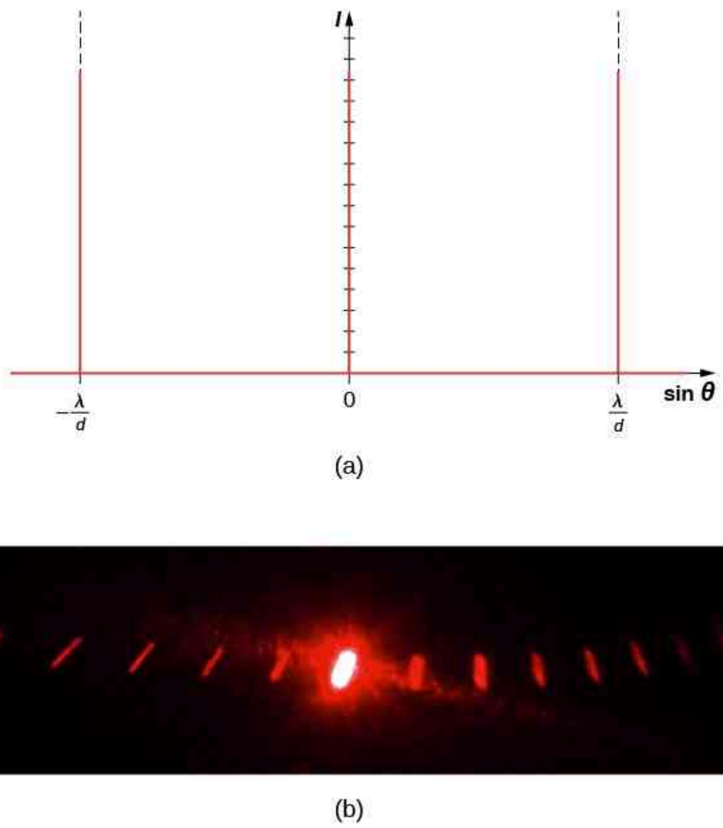
W tym podrozdziale nauczysz się:

- omawiać widmo siatki dyfrakcyjnej;
- wyjaśniać zjawiska związane z padaniem światła na siatkę dyfrakcyjną.

Analiza interferencji światła przechodzącego przez dwie szczeliny daje nam teoretyczne podstawy do opisu interferencji oraz historyczny wgląd w eksperymenty Thomasa Younga. Jednak większość współczesnych zastosowań zjawiska interferencji na szczelinach dotyczy nie tyle dwóch szczelin, ile tak dużej ich liczby, że w celach praktycznych przyjmuje się, że liczba szczelin dąży do nieskończoności. Kluczowym elementem optycznym jest tutaj siatka dyfrakcyjna, będąca ważnym narzędziem do analizy zjawisk optycznych.

Siatki dyfrakcyjne: nieskończona liczba szczelin

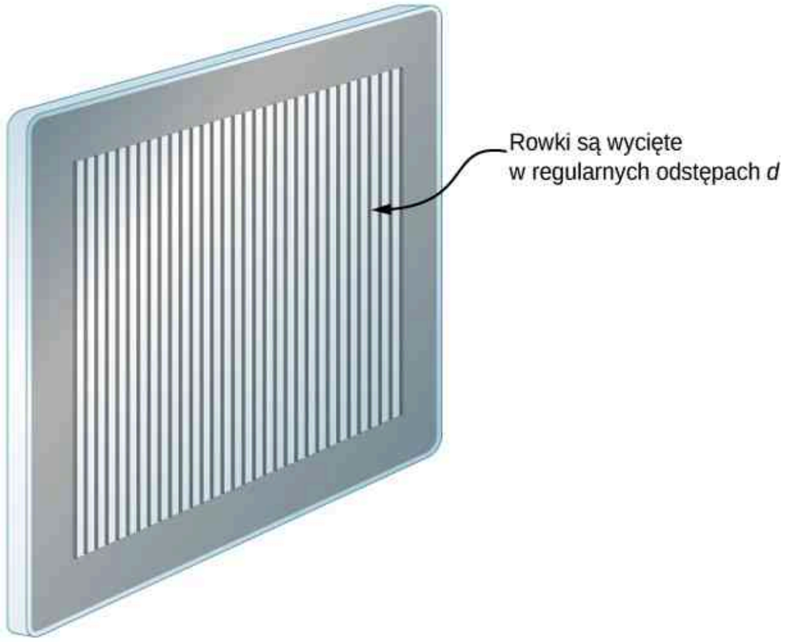
Analiza interferencji wielopromieniowej (z wielu źródeł) w rozdziale Interferencja pozwala przewidzieć, co się dzieje, gdy liczba szczelin N dąży do nieskończoności. Przypomnijmy, że w obszarze między maksimami podstawowymi pojawia się $N - 2$ maksimów wtórnych. Możemy przewidzieć, że przy nieskończonej liczbie szczelin będzie nieskończona liczba wtórnych maksimów i ciemnych prążków między nimi. To sprawia, że odstępy pomiędzy prążkami, a zatem szerokości maksimów, stają się nieskończenie małe. Ponadto, ponieważ natężenie wtórnych maksimów jest proporcjonalne do $1 / N^2$, to dąży ono do zera, tak że maksima wtórne stają się niewidoczne. Pozostają tylko maksima główne, teraz bardzo jasne i bardzo wąskie (Rysunek 4.12).



Rysunek 4.12 (a) Natężenie światła przechodzącego przez dużą liczbę szczelin. Kiedy N zbliża się do nieskończoności, pozostają widoczne tylko główne maksima bardzo jasne i bardzo wąskie. (b) Obraz wiązki z lasera, przechodzącej przez siatkę dyfrakcyjną. Źródło (b): modyfikacja pracy Sebastiana Stapelberga

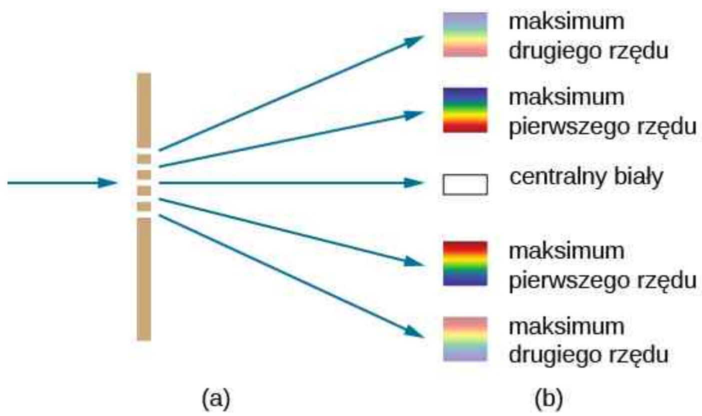
W rzeczywistości liczba szczelin nie jest nieskończona, ale może być bardzo duża, tak aby wytworzyć efekt równo-

ważny. Głównym tego przykładem jest element optyczny zwany **siatką dyfrakcyjną** (ang. **diffraction grating**). Siatka dyfrakcyjna może być wytworzona przez nacinanie szkła ostrym narzędziem, przez co otrzymuje się duże ilości precyzyjnie wykonanych równoległych linii z nienaruszonymi obszarami działającymi jak szczeliny (Rysunek 4.13). Ten rodzaj siatki może być produkowany masowo i dość niewielkim kosztem. Ponieważ siatka może mieć nawet ponad 1000 szczelin na milimetr w przekroju poprzecznym, to gdy obszar o wielkości kilku milimetrów jest oświetlony przez przechodzący promień, liczbę podświetlanych szczelin wolno traktować jako praktycznie nieskończoną, co sprawia, że maksima główne są bardzo ostre.



Rysunek 4.13 Siatkę dyfrakcyjną można wytwarzać przez nacinanie szkła ostrym narzędziem, wykonując dużą liczbę precyzyjnie równoległych linii.

Siatki dyfrakcyjne działają zarówno w konfiguracji transmisyjnej – przepuszczając światło, co pokazano na Rysunku 4.14, jak i w konfiguracji odbiciowej – odbijając światło jak na skrzydłach motyla czy opalu australijskim z Rysunku 4.15. Naturalne siatki dyfrakcyjne występują również w piórkach niektórych ptaków, takich jak koliber. Małe, przypominające palce struktury o regularnych wzorach działają jak siatki odbijające, powodując konstruktywną interferencję, co daje różne kolory piór niezależnie od ich pigmentacji. Proces ten nazywamy opalizacją.



Rysunek 4.14 (a) Światło przechodzące przez siatkę dyfrakcyjną daje obraz podobny do obrazu dyfrakcyjnego na podwójnej szczelinie, o jasnych obszarach obserwowanych pod różnymi kątami. (b) Obraz otrzymany dla światła białego padającego na siatkę. Centralne maksimum jest białe, a w maksimach wyższych rzędów światło białe jest rozszczepione na składowe monochromatyczne.



(a) (b)

Rysunek 4.15 (a) Ten australijski opal i (b) skrzydła motyla posiadają rzędy struktur odbijających, które działają jak siatki odbiciowe, odbijając rozmaite długości fal pod różnymi kątami. Źródło (b): modyfikacja zdjęć „whologwhy”/Flickr

Zastosowanie siatek dyfrakcyjnych

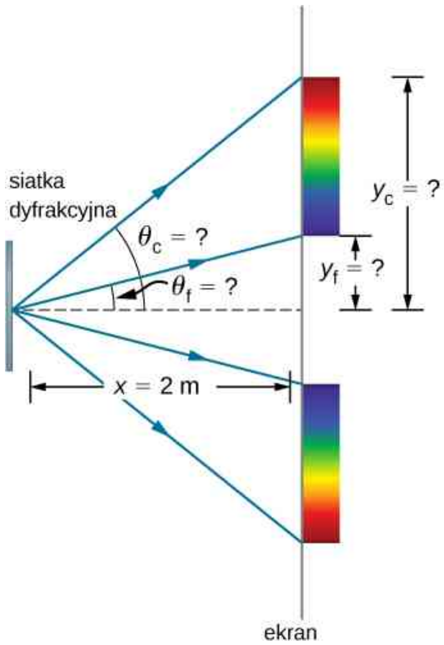
Jakie są zastosowania siatek dyfrakcyjnych? Są one powszechnie używane w **spektroskopii dyspersyjnej** (ang. **spectroscopic dispersion**) i do analizy światła. Szczególnie użytecznymi czyni je fakt, że dają obraz ostrzejszy niż podwójna szczelina. Oznacza to, że jasne prążki w widmie siatki dyfrakcyjnej są węższe i jaśniejsze, podczas gdy ciemne obszary są ciemniejsze. Siatki dyfrakcyjne stanowią główny element monochromatorów, stosowanych np. w obrazowaniu optycznym przy użyciu fal o określonej długości, próbek materiałów biologicznych lub medycznych. Siatkę tę można wybrać w przypadku szczegółowej analizy długości fali, którą emitują cząsteczki chorej komórki pochodzące z próbki pobranej podczas biopsji, lub w celu pobudzenia cząsteczki w próbce falą światła o ustalonej długości. Obecnie dostępne są siatki dyfrakcyjne dostosowane do długości fal, jakie mają być użyte.

Przykład 4.5

Obliczanie typowych efektów uzyskiwanych za pomocą siatek dyfrakcyjnych

Siatki dyfrakcyjne o $10\,000$ linii na centymetr są łatwo dostępne. Załóżmy, że mamy taką siatkę i wysyłamy przez nią do ekranu odległego o $2\,\mathrm{m}$ promień światła białego.

a. Znajdźmy kąty dyfrakcji pierwszego rzędu dla najkrótszej i najdłuższej długości fali z zakresu światła widzialnego (odpowiednio $380\,\mathrm{nm}$ i $760\,\mathrm{nm}$);
b. Jaka jest odległość pomiędzy końcami widma obserwowanego na ekranie dla pierwszego rzędu interferencji? (patrz Rysunek 4.16).



Rysunek 4.16 Siatka dyfrakcyjna rozpatrywana w tym przykładzie tworzy na ekranie obraz w odległości $x = 2\,\text{m}$ od siatki. Odległości na ekranie są mierzone prostopadle do kierunku x, a sam obraz tęczy jest prostopadły do płaszczyzny rysunku.

Strategia rozwiązania

Po ustaleniu wartości odległości d między szczelinami siatki dyfrakcyjnej kąty, pod którymi obserwujemy na ekranie ostre linie, można określić za pomocą równania

$$d \sin\theta = m\lambda \;\; \text{dla} \;\; m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Ponieważ siatka posiada $10\,000$ linii na centymetr, to każda z nich jest odległa o $1\,/\,10\,000$ centymetra od sąsiedniej. Kiedy już znamy kąty, odległości wzdłuż ekranu znajdziemy, korzystając ze zwykłej trygonometrii.

Rozwiązanie

a. Odległość między szczelinami wynosi $d = 1\,\text{cm}\,/\,10\,000 = 10^{-4}\,\text{cm}$ lub $10^{-6}\,\text{m}$. Aby otrzymać dwa kąty: θ_f dla fioletu ($380\,\text{nm}$) i θ_c dla czerwieni ($760\,\text{nm}$), przekształćmy odpowiednio powyższe równanie. Dla fioletu z $d \sin\theta_f = m\lambda$ otrzymujemy

$$\sin\theta_f = \frac{m\lambda_f}{d},$$

gdzie dla pierwszego rzędu $m = 1$, a $\lambda_f = 380\,\text{nm} = 3{,}8 \cdot 10^{-7}\,\text{m}$. Podstawienie tych wartości daje

$$\sin\theta_f = \frac{3{,}8 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}{10^{-6}\,\text{m}} = 0{,}38.$$

Zatem kąt θ_f wynosi

$$\theta_f = \arcsin\,(0{,}38) = 22{,}33°.$$

Podobnie

$$\sin\theta_c = \frac{7{,}6 \cdot 10^{-7}\,\text{m}}{10^{-6}\,\text{m}} = 0{,}76.$$

Zatem kąt θ_c wynosi

$$\theta_c = \arcsin\,(0{,}76) = 49{,}46°.$$

Zauważmy, że w obu równaniach przedstawiliśmy wyniki tych obliczeń z dokładnością do czterech cyfr znaczących, które to dane liczbowe wykorzystamy do obliczeń w części (b).

b. Położenia na ekranie są oznaczone na rysunku jako y_f i y_c. Zauważmy, że $\operatorname{tg}\theta = y\,/\,x$. Rozwiązując dla y_f i y_c, otrzymujemy

$$y_f = x\operatorname{tg}\theta_f = 2\,\text{m} \cdot \operatorname{tg}\,(22{,}33°) = 0{,}815\,\text{m}$$

oraz

$$y_c = x\operatorname{tg}\theta_c = 2\,\text{m} \cdot \operatorname{tg}\,(49{,}46°) = 2{,}338\,\text{m}.$$

Stąd odległość między nimi wynosi

$$y_c - y_f = 1{,}523\,\text{m}.$$

Znaczenie

Duża odległość między czerwonym i fioletowym końcem widma tęczy wytworzonej ze światła białego wskazuje na możliwość zastosowania siatki dyfrakcyjnej jako narzędzia spektroskopowego. Im bardziej można rozciągnąć widmo długości fal (zwiększyć dyspersję), tym bardziej szczegółowo można zobaczyć poszczególne jego części. Zależy to od jakości siatki dyfrakcyjnej – musi być ona bardzo precyzyjnie wykonana, aby dokładnie określonym długościom fali na ekranie odpowiadało ścisłe rozmieszczenie linii.

4.4 Sprawdź, czy rozumiesz. Jeśli nie znamy dokładnie odległości d między szczelinami w siatce dyfrakcyjnej, to możemy użyć źródła światła o dobrze określonej długości fali, aby tę odległość zmierzyć. Załóż, że prążek odpowiadający pierwszemu rzędowi konstruktywnej interferencji, linii emisyjnej H_β wodoru ($\lambda = 656{,}3\text{ nm}$) przy użyciu spektrometru z siatką dyfrakcyjną otrzymano dla kąta $11{,}36°$. Ile wynosi odległość między szczelinami tej siatki?

Zobacz tę samą symulację (https://openstaxcollege.org/l/21doubslitdiff) , której wcześniej użyliśmy dla dyfrakcji na podwójnej szczelinie, i spróbuj zwiększać liczbę szczelin od $N = 2$ do $N = 3, 4, 5, \ldots$. Główne piki stają się coraz ostrzejsze, a piki wtórne coraz mniej widoczne. Po osiągnięciu maksymalnej liczby $N = 20$ układ zachowuje się jak siatka dyfrakcyjna.

4.5 | Otwory kołowe i rozdzielczość

Cel dydaktyczny

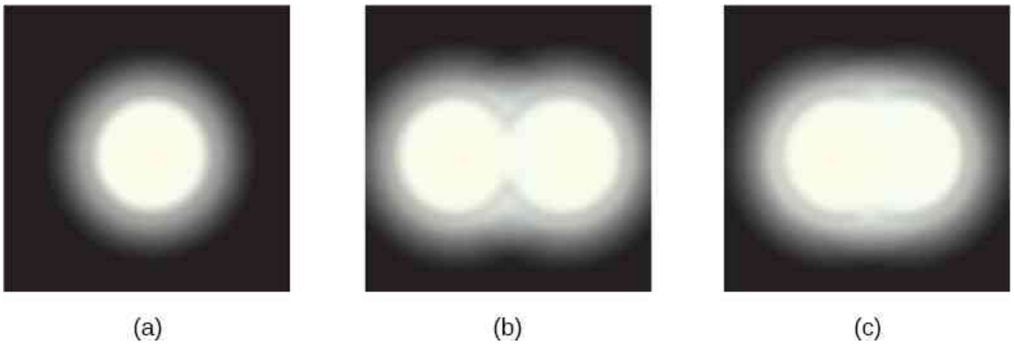
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać dyfrakcyjną granicę rozdzielczości;
- opisywać ograniczenia dotyczące propagacji wiązki ze względu na dyfrakcję.

Światło ulega dyfrakcji, biegnąc w przestrzeni, ugina się wokół przeszkód oraz ulega interferencji konstruktywnej i destruktywnej. To zjawisko może być wykorzystane jako narzędzie spektroskopowe. Na przykład siatka dyfrakcyjna, która ugina światło w sposób zależny od długości fal, jest używana do rozszczepienia wiązki światła białego i tworzenia widma. Z drugiej jednak strony dyfrakcja ogranicza możliwość rozróżniania szczegółów w uzyskanych obrazach.

Rysunek 4.17 (a) pokazuje efekt przejścia światła przez niewielki otwór kołowy. Zamiast jasnej plamy z ostrymi krawędziami otrzymujemy plamę z rozmytym brzegiem otoczonym przez świetlne okręgi. Ten efekt jest spowodo-

wany dyfrakcją, podobnie jak ma to miejsce przy pojedynczej szczelinie. Światło z różnych części otworu kołowego ulega interferencji konstruktywnej i destruktywnej. Ten efekt najlepiej obserwuje się, gdy otwór jest niewielki, mimo że występuje on również dla dużych otworów.



Rysunek 4.17 (a) Światło monochromatyczne przechodzące przez niewielki otwór kołowy wytwarza obraz dyfrakcyjny. (b) Dwa źródła światła punktowego, które są położone blisko siebie, z powodu dyfrakcji dają zachodzące na siebie obrazy. (c) Jeśli źródła są ze sobą jeszcze bliżej, nie można ich odróżnić ani odseparować.

Jak dyfrakcja wpływa na obserwację szczegółów obrazu powstającego, gdy światło przechodzi przez otwór? Rysunek 4.17 (b) pokazuje obraz dyfrakcyjny wytwarzany przez dwa źródła światła punktowego położone blisko siebie. Obraz jest podobny do tego pochodzącego od pojedynczego źródła, ale jesteśmy w stanie powiedzieć, że pochodzi raczej od dwóch źródeł światła niż od jednego. Jeśli źródła są jeszcze bliżej siebie, jak na Rysunku 4.17 (c), nie możemy ich odróżnić i wówczas wiemy, że osiągnęliśmy granicę rozróżniania szczegółów lub granicę **rozdzielczości** (ang. **resolution**). Ta granica to nieunikniona konsekwencja falowej natury światła.

Dyfrakcja ogranicza rozdzielczość w wielu sytuacjach. Na przykład ostrość naszego wzroku jest ograniczona, ponieważ światło przechodzi przez źrenicę, która jest okrągłym otworem w oku. Należy pamiętać, że rozpraszanie się światła z udziałem dyfrakcji jest spowodowane ograniczeniem średnicy otworu, przez który światło przechodzi, a nie oddziaływaniem światła z otworem. Sprawia to, że dla światła przechodzącego przez otwór o średnicy D omawiany powyżej efekt będzie dotyczył światła przechodzącego przez soczewkę o średnicy D i polegał na rozmywaniu i zacieraniu się obrazu. Tak więc dyfrakcja ogranicza rozdzielczość dowolnego układu posiadającego obiektyw lub zwierciadło. Rozdzielczość teleskopów, których częścią jest zwierciadło o średnicy D, jest również ograniczona przez dyfrakcję.

Jaka jest granica rozdzielczości? Aby odpowiedzieć na to pytanie, rozpatrzymy obraz dyfrakcyjny dla otworu kołowego, który ma centralne maksimum, szersze i jaśniejsze niż maksima wokół niego, podobnie jak w przypadku szczeliny (Rysunek 4.18 (a)). Można pokazać, że dla okrągłego otworu o średnicy D pierwsze minimum w obrazie dyfrakcji występuje przy kącie $\theta = 1{,}22\lambda / D$ (pod warunkiem, że otwór jest duży w porównaniu do długości fali światła, co ma miejsce w przypadku większości przyrządów optycznych). Ogólnie przyjęte kryterium do wyznaczania **dyfrakcyjnej granicy rozdzielczości** (ang. **diffraction limit**) na podstawie tego kąta, opracowane przez **lorda Rayleigha (1842–1919)** w XIX wieku, jest znane właśnie jako **kryterium Rayleigha** (ang. **Rayleigh criterion**).

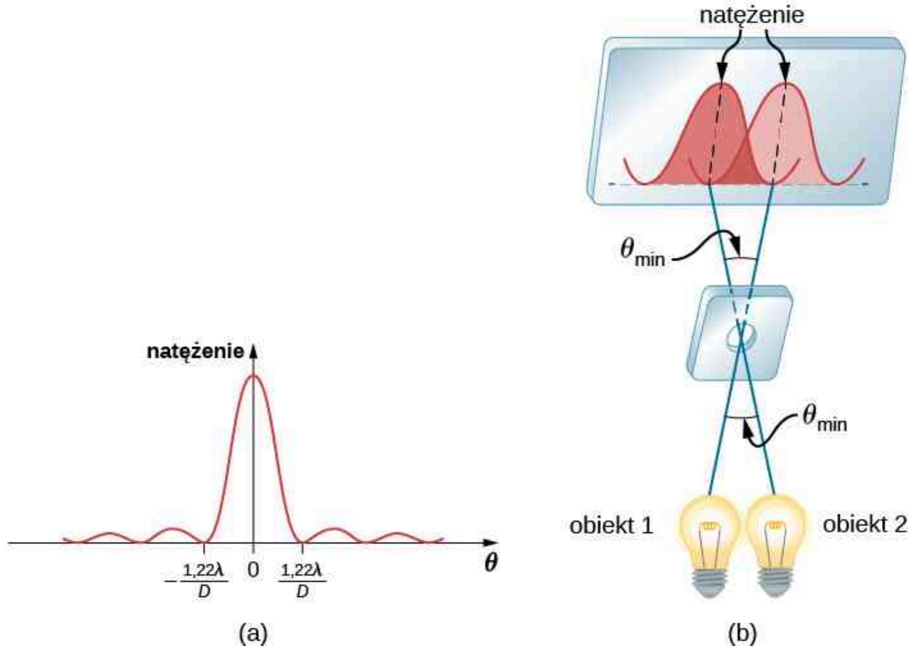
Kryterium Rayleigha

Dyfrakcyjna granica rozdzielczości określa, że dwa punkty są rozróżnialne, gdy środek obrazu dyfrakcyjnego jednego z nich znajduje się w miejscu pierwszego minimum obrazu dyfrakcyjnego drugiego (Rysunek 4.18 (b)).

Pierwsze minimum wypada pod kątem $\theta = 1{,}22\lambda / D$, stąd dwa obiekty punktowe będą rozróżnialne, jeśli są rozdzielone kątem

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}, \tag{4.5}$$

gdzie λ to długość fali światła (lub innego promieniowania elektromagnetycznego), a D to średnica otworu, soczewki, zwierciadła itp., przez które obserwujemy dwa przedmioty. W tym wyrażeniu kąt θ podaje się w radianach. Jest on również powszechnie znany jako granica dyfrakcyjna.



Rysunek 4.18 (a) Wykres natężenia światła dla dyfrakcji na otworze kołowym. Zauważmy, że podobnie jak dla pojedynczej szczeliny centralne maksimum jest większe i wyższe niż maksima boczne. (b) Dwa obiekty punktowe tworzą zachodzące na siebie obrazy dyfrakcyjne. Zilustrowane jest kryterium Rayleigha rozróżnialności obiektów. Centralne maksimum pierwszego obrazu dyfrakcyjnego leży w miejscu pierwszego minimum drugiego.

Wszystkie próby obserwacji i odwzorowania rozmiaru i kształtu obiektów ogranicza użyta długość fali światła. Nawet jej mała wartość nie zapewnia precyzji odwzorowania. Kiedy stosuje się fale o bardzo małej długości, tak jak w przypadku mikroskopu elektronowego fale materii, i tak istnieje granica naszej wiedzy o obiekcie. W tym przypadku to zasada nieoznaczoności Heisenberga mówi, że granica ta jest fundamentalna i nieunikniona, o czym przekonamy się w rozdziale o mechanice kwantowej.

Przykład 4.6

Obliczanie dyfrakcyjnej granicy rozdzielczości dla Teleskopu Kosmicznego Hubble’a

Podstawowe zwierciadło orbitującego teleskopu Hubble’a ma średnicę $2{,}4\,\text{m}$. Będąc na orbicie, teleskop pozwala uniknąć wpływu zakłóceń atmosferycznych na jego rozdzielczość.

a. Jaki jest kąt pomiędzy dwoma możliwymi do rozdzielenia punktowymi źródłami światła (mogą to być dwie gwiazdy)? Przyjmijmy średnią długość fali światła $550\,\text{nm}$;
b. Jeśli te dwie gwiazdy leżą w odległości 2 milionów lat świetlnych od Ziemi, czyli odległości Ziemi od galaktyki Andromedy, to jak blisko siebie mogą się znaleźć, by nadal być rozróżnialne? (Rok świetlny (ly) to odległość, jaką światło przebywa w ciągu 1 ziemskiego roku).

Strategia rozwiązania

Kryterium Rayleigha podane w Równaniu 4.5 w postaci $\theta = 1{,}22\lambda/D$ pozwala ustalić najmniejszy możliwy kąt θ pomiędzy obserwowanymi źródłami punktowymi, przy którym są one rozróżnialne. Gdy określimy ten kąt, możemy obliczyć odległość między gwiazdami, o ile wiemy, jak daleko od Ziemi się znajdują.

Rozwiązanie

a. Kryterium Rayleigha dla minimalnego kąta rozdzielczości ma postać

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D}.$$

Wprowadzając znane wartości, otrzymujemy

$$\theta = 1{,}22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}\,\text{m}}{2{,}4\,\text{m}} = 2{,}8 \cdot 10^{-7}\,\text{rad}\,.$$

b. Odległość s między dwoma obiektami odległymi od nas o r, widzianymi pod kątem θ, jest równa $s = r\theta$. Podstawiając znane wartości, otrzymujemy

$$s = 2 \cdot 10^{6}\,\text{ly} \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-7}\,\text{rad} = 0{,}56\,\text{ly}\,.$$

Znaczenie

Kąt znaleziony w części (a) zadania okazał się wyjątkowo mały (mniej niż $1\,/\,50\,000$ stopnia), ponieważ główne zwierciadło teleskopu jest bardzo duże w porównaniu z długością fali światła. Jak już wspomniano, efekty dyfrakcyjne są najbardziej widoczne, gdy światło oddziałuje z obiektami o rozmiarach rzędu długości fali światła. Jednak sam efekt nadal występuje, choć istnieje ograniczenie dyfrakcyjne w stosunku do tego, co można zaobserwować. Rzeczywista rozdzielczość teleskopu Hubble’a nie jest tak dobra, jak by wynikało z użytego wzoru. Podobnie jak w przypadku wszystkich instrumentów optycznych istnieją inne efekty, takie jak niejednorodności na powierzchni zwierciadeł lub aberracje soczewek, jeszcze bardziej ograniczające rozdzielczość. Pomimo to na Rysunku 4.19 widać różnicę poziomu jakości i szczegółowości obrazu obiektu obserwowanego przez teleskop Hubble’a znajdujący się powyżej atmosfery ziemskiej oraz obrazu z teleskopu naziemnego.



Rysunek 4.19 Te dwie fotografie galaktyki Galaxy M82 dają wyobrażenie o obserwowalnych szczegółach uzyskanych z (a) teleskopu naziemnego i (b) umieszczonego w przestrzeni kosmicznej teleskopu Hubble’a. Źródło: modyfikacja pracy „Ricnun”/Wikimedia Commons

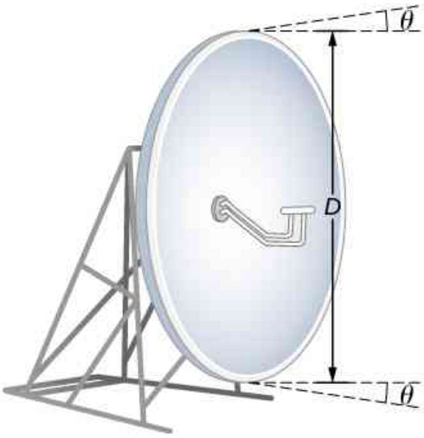
Odpowiedź w części (b) zadania wskazuje, że można rozróżnić dwie gwiazdy oddalone od siebie o około połowę roku świetlnego. Średnia odległość między gwiazdami w galaktyce jest rzędu 5 lat świetlnych w częściach zewnętrznych i około roku świetlnego blisko jej centrum. Dlatego teleskop Hubble’a pozwala rozróżnić większość pojedynczych gwiazd w galaktyce Andromedy, nawet jeśli leżą one w takiej odległości, że ich światło biegnie do nas 2 miliony lat. Na Rysunku 4.20 pokazano inne zwierciadło, tym razem używane do obserwowania fal radiowych z kosmosu.



Rysunek 4.20 Radioteleskop o średnicy $305\ \text{m}$ w obserwatorium Arecibo w Portoryko. Jest on wyłożony materiałem odbijającym i stanowi największą skupiającą zakrzywioną powierzchnię na świecie. Chociaż jego średnica D jest większa niż teleskopu Hubble'a, wykrywa on fale promieniowania o znacznie większej długości i jego dyfrakcyjna granica rozdzielczości zdecydowanie pogarsza się w porównaniu z przypadkiem teleskopu Hubble'a. Teleskop w Arecibo jest nadal bardzo przydatny, ponieważ niektóre ważne informacje o obiektach kosmicznych przekazywane falami radiowymi nie są przesyłane z wykorzystaniem światła widzialnego. Źródło: Jeff Hitchcock

4.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaka jest rozdzielczość kątowa teleskopu w Arecibo, pokazanego na Rysunku 4.20, gdy pracuje on przy długości fali $21\ \text{cm}$ (fale emitowane przez wodór galaktyczny)? Porównaj ją z rozdzielczością teleskopu Hubble'a.

Dyfrakcja jest problemem nie tylko dla przyrządów optycznych, ale również dla promieniowania elektromagnetycznego jako takiego. Każda wiązka światła o skończonej średnicy D i długości fali λ wykazuje dyfrakcyjne rozchodzenie się (rozbieżność wiązki). Równoległa wiązka rozchodzi się pod kątem θ, podanym za pomocą równania $\theta = 1{,}22\lambda\ /\ D$. Weźmy przykładowo wiązkę laserową, w której początkowo promienie są tak równoległe, jak to tylko możliwe (kąty pomiędzy promieniami są możliwie najbliżej $\theta = 0°$), rozchodzącą się pod kątem $\theta = 1{,}22\lambda\ /\ D$, gdzie D jest średnicą wiązki, a λ długością fali. Tej rozbieżności wiązki nie da się zaobserwować dla latarki, ponieważ w jej przypadku promienie wiązki nie są równoległe już w chwili startu. Jednakże przy przesyłaniu wiązki lasera lub sygnałów mikrofalowych na duże odległości efekt ten może być znaczący (Rysunek 4.21). Aby tego uniknąć, możemy zwiększyć D, jak ma to miejsce w przypadku światła lasera wysyłanego na Księżyc w celu pomiaru jego odległości od Ziemi. Wiązka lasera jest poszerzana przez teleskop, aby D było znacznie większe, a kąt θ mniejszy.



Rysunek 4.21 Wiązka wytwarzana przez mikrofalową antenę transmisyjną rozchodzi się pod minimalnym kątem $\theta = 1{,}22\lambda\ /\ D$ z powodu dyfrakcji. Nie da się wytworzyć wiązki równoległej, ponieważ ze względu na antenę wiązka ma ograniczoną średnicę.

W większości laboratoriów biologicznych, tam, gdzie używa się mikroskopów, pojawiają się problemy z rozdzielczo-

ścią. Im mniejsza odległość x, przy której można odróżnić dwa obiekty, tym większa rozdzielczość. Odległość ta określa moc rozdzielczą soczewki. Wyrażenie na rozdzielczość podaje się na podstawie kryterium Rayleigha. Rysunek 4.22 (a) pokazuje dwa punkty badanego obiektu położone w odległości x od siebie. Zgodnie z kryterium Rayleigha rozróżnienie ich jest możliwe, gdy minimalna odległość kątowa wynosi

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = \frac{x}{d},$$

gdzie d jest odległością między próbką a soczewką obiektywu; zastosowaliśmy również przybliżenie małego kąta (tzn. założyliśmy, że x jest dużo mniejsza od d), więc $\operatorname{tg}\theta \approx \sin\theta \approx \theta$. Dlatego rozdzielczość jest równa

$$x = 1{,}22\frac{\lambda d}{D}.$$

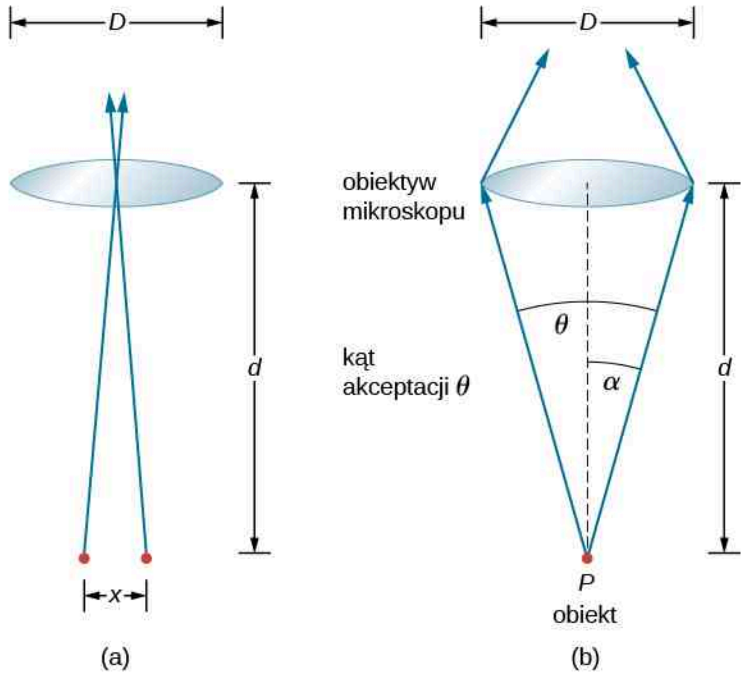
Innym sposobem na określenie rozdzielczości jest wprowadzenie pojęcia apertury numerycznej (NA), będącej miarą maksymalnego dozwolonego kąta, przy którym soczewka zbiera wiązkę światła i wprowadza ją dalej do wnętrza. Rysunek 4.22 (b) ilustruje soczewkę i przedmiot w punkcie P. NA to miara zdolności soczewki do skupienia światła i uzyskania szczegółów. Kąt wyznaczony przez soczewkę w jej ognisku definiuje się jako $\theta = 2\alpha$. Na podstawie rysunku, po zastosowaniu przybliżenia małych kątów, możemy napisać

$$\sin\alpha = \frac{\frac{D}{2}}{d} = \frac{D}{2d}.$$

NA dla soczewki wynosi $NA = n\sin\alpha$, gdzie n jest współczynnikiem załamania ośrodka między przedmiotem w punkcie P a soczewką. Z powyższej definicji dla NA otrzymujemy

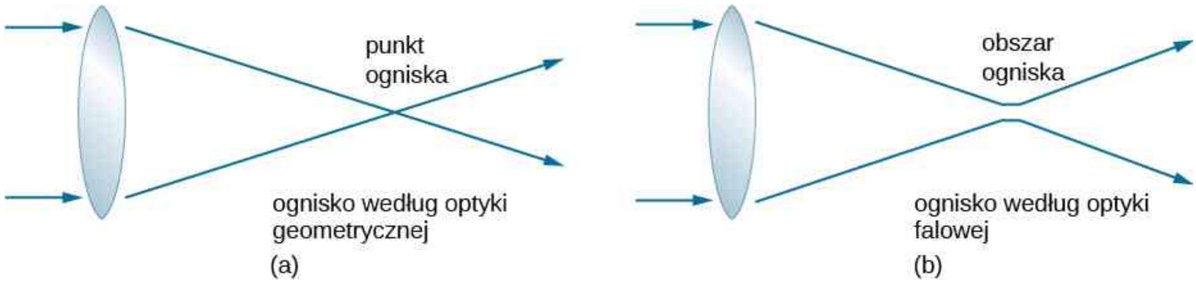
$$x = 1{,}22\frac{\lambda d}{D} = 1{,}22\frac{\lambda}{2\sin\alpha} = 0{,}61\frac{\lambda n}{NA}.$$

W mikroskopie NA ma niemałe znaczenie, ponieważ określa zdolność rozdzielczą obiektywu. Obiektyw o dużej wartości NA pozwala dostrzec więcej szczegółów. Takie soczewki są również w stanie zbierać więcej światła, a tym samym dawać jaśniejszy obraz. Inaczej można powiedzieć, że im bardziej rośnie NA, tym większy stożek światła może być wprowadzony do obiektywu, a co za tym idzie, soczewka skupia więcej rzędów dyfrakcji. W ten sposób mikroskop dostarcza dokładniejszej informacji, dając wyraźniejszy obraz ze względu na większą zdolność rozdzielczą.



Rysunek 4.22 (a) Dwa punkty oddalone od siebie o x, umieszczone w odległości d od obiektywu. (b) Określenia i symbole użyte w dyskusji na temat zdolności rozdzielczej dla obiektywu i obiektu w punkcie P. Źródło (a): modyfikacja pracy „Infopro”/Wikimedia Commons

Jedną z konsekwencji dyfrakcji jest to, że punkt ogniska (ognisko) ma skończoną szerokość i rozkład natężenia. Wyobraźmy sobie ogniskowanie wiązki jedynie według optyki geometrycznej, jak na Rysunku 4.23 (a). Punkt ogniska jest wtedy nieskończenie mały, co daje ogromne natężenie skupionej wiązki, mogące doprowadzić do zapłonu próbek niezależnie od NA obiektywu – jest to jednak zbyt duże uproszczenie. W przypadku optyki falowej z powodu dyfrakcji bierzemy pod uwagę zjawisko, w którym punkt ogniska rozmywa się do postaci obszaru ogniska (Rysunek 4.23 (b)), przy czym stopień rozmycia zmniejsza się wraz ze wzrostem NA, jednak obszar ten nigdy nie staje się prawdziwym punktem. W konsekwencji natężenie w ognisku wzrasta razem z wartością NA i zwiększa się prawdopodobieństwo uszkodzenia próbki.



Rysunek 4.23 (a) W optyce geometrycznej ognisko przedstawia się jako punkt, ale fizycznie nie jest to możliwe, ponieważ wynika z tego nieskończone natężenie światła w ognisku. (b) W optyce falowej ognisko jest rozszerzonym obszarem.

W innym typie mikroskopu cząsteczki wewnątrz próbki są pobudzane do emitowania światła za sprawą mechanizmu zwanego fluorescencją. Poprzez kontrolowanie cząsteczek emitujących światło można skonstruować obrazy o dużej rozdzielczości, większej, niżby to wynikało z kryterium Rayleigha, tym samym omijając granicę dyfrakcji. Za rozwój metody superrozdzielczej mikroskopii fluorescencyjnej została w roku 2014 przyznana Nagroda Nobla.

W modelu rozdzielczości optycznej dwa obrazy dyfrakcyjne dla światła przechodzącego przez dwa okrągłe otwory pokazano w symulacji (https://openstaxcollege.org/l/21optresmodsim) autorstwa Fu-Kwun Hwang. Zobacz, jak obrazy łączą się w miarę zmniejszania średnicy otworów.

4.6 | Dyfrakcja rentgenowska

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

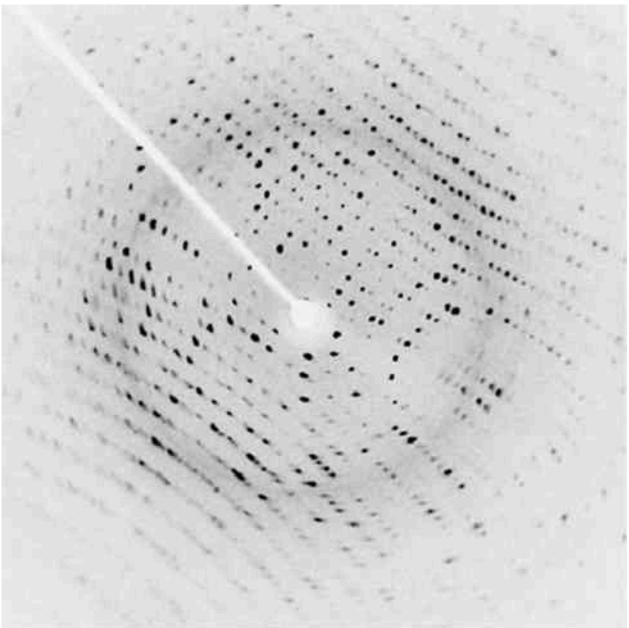
- opisywać interferencyjne i dyfrakcyjne efekty pojawiające się, gdy promieniowanie rentgenowskie oddziałuje z strukturami atomowymi.

Ponieważ fotony promieniowania rentgenowskiego mają wysoką energię, charakteryzują się one małymi długościami fal, rzędu od 10^{-12} m do 10^{-8} m. Dlatego typowe fotony rentgenowskie zachowują się jak promienie (geometryczne), gdy napotykają obiekty makroskopowe, takie jak zęby, wytwarzając za nimi ostre cienie. Ponieważ jednak atomy mają rozmiary rzędu $0{,}1$ nm, promienie rentgenowskie mogą być wykorzystane do wykrywania lokalizacji, kształtu i wielkości atomów i molekuł. Proces ten jest nazywany **dyfrakcją rentgenowską** (ang. **X-ray diffraction**) i dotyczy interferencji promieniowania rentgenowskiego w celu wytworzenia obrazów, których analiza daje informację o strukturach rozpraszających to promieniowanie.

Być może najsłynniejszym przykładem wykorzystania dyfrakcji promieni rentgenowskich jest odkrycie w 1953 r. podwójnej helikalnej struktury **DNA** przez międzynarodowy zespół naukowców pracujących w Cavendish Laboratory w Anglii. Zespół ten tworzyli: Amerykanin James Watson, Anglik Francis Crick i Maurice Wilkins urodzony w Nowej Zelandii. Wykorzystując dane z dyfrakcji rentgenowskiej opracowane przez Rosalind Franklin, stworzyli model struktury podwójnej helisy DNA, która jest tak istotna dla życia. Za tę pracę Watson, Crick i Wilkins otrzymali Nagrodę Nobla w 1962 r. w dziedzinie fizjologii lub medycyny. (W kwestii tej są pewne kontrowersje w związku z faktem, że Rosalind Franklin nie została włączona do nagrody, ponieważ w 1958 roku zmarła na raka jajnika w wieku 37 lat, zanim nagrodę przyznano).

Rysunek 4.24 przedstawia obraz dyfrakcyjny utworzony na skutek rozproszenia promieni rentgenowskich na krysztale. Proces ten określany jest jako krystalografia rentgenowska ze względu na informacje, które może dać o strukturze kryształów; właśnie tego typu danych o budowie DNA dostarczyła Rosalind Franklin Watsonowi i Crickowi.

Zdjęcia rentgenowskie nie tylko potwierdzają rozmiar i kształt atomów, ale dają też informacje o ich rozmieszczeniu/ułożeniu w materiałach. Na przykład ostatnie badania dotyczące ułożenia w sieci krystalicznej atomów materiałów będących nadprzewodnikami wysokotemperaturowymi mają zasadnicze znaczenie dla uzyskania materiału nadprzewodzącego. Badania te mogą być wykonywane z zastosowaniem krystalografii rentgenowskiej.



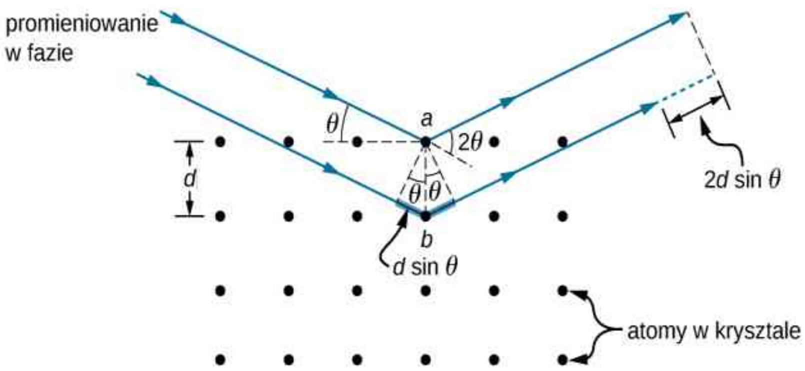
Rysunek 4.24 Dyfraktogram rentgenowski kryształu białka (lizozymu jaja kurzego). Jego analiza dostarcza informacji o strukturze tego białka. Źródło: „Del45"/Wikimedia Commons

Rozproszenie promieni rentgenowskich na kryształach wykorzystano do udowodnienia, że promienie te są falami elektromagnetycznymi (EM) o dużej energii. Podejrzenia takie zrodziły się w momencie odkrycia promieni rentgenowskich w 1895 roku, ale dopiero w 1912 r. Niemiec **Max von Laue (1879–1960)** przekonał dwóch swoich kolegów do badań nad dyfrakcją promieni rentgenowskich na kryształach. Albowiem, jeśli otrzymamy obraz dyfrakcyjny, to uzasadnione jest stwierdzenie, że promienie rentgenowskie muszą być falami, których długość może być określona. (Odległości między atomami w różnych kryształach były w tym czasie już stosunkowo dobrze zbadane dzięki znajomości wartości liczby Avogadra). Eksperymenty okazały się przekonujące, a von Laue został laureatem Nagrody Nobla w dziedzinie fizyki w 1914 roku. Otrzymał ją za swoją sugestię, która doprowadziła do udowodnienia, że promieniowanie rentgenowskie to fale EM. W 1915 roku wyjątkowy zespół złożony z ojca i syna, **sir Williama Henry'ego Bragga (1862–1942)** i **sir Williama Lawrence'a Bragga (1890–1971)**, otrzymał wspólną Nagrodę Nobla za wynalezienie spektrometru rentgenowskiego oraz rozwój nowego działu nauki – analizy rentgenowskiej.

W sposób podobny do opisu interferencji w cienkiej warstwie rozpatrzymy dwie fale płaskie o długości fali rentgenowskiej, z których każda odbija się od innej płaszczyzny atomów w sieci krystalicznej, jak pokazano na Rysunku 4.25. Na podstawie znajomości zwykłej geometrii można stwierdzić, że różnica długości dróg przebytych przez promienie to $2d\sin\theta$. Gdy odległość ta jest całkowitą wielokrotnością długości fali, zachodzi konstruktywna interferencja. Ten warunek jest opisany równaniem Bragga

$$m\lambda = 2d\sin\theta, \qquad (4.6)$$

gdzie $m = 1, 2, 3, \ldots$ jest dodatnią liczbą całkowitą, a d odległością pomiędzy płaszczyznami. Zgodnie z prawem odbicia zarówno fale padające, jak i odbite, opisywane są tym samym kątem θ, ale tutaj – w przeciwieństwie do ogólnej praktyki w optyce geometrycznej – wartość θ jest mierzona względem samej powierzchni, a nie normalnej do niej.



Rysunek 4.25 Dyfrakcja promieni rentgenowskich na krysztale. Dwie fale padające odbijają się od dwóch płaszczyzn kryształu. Różnica długości dróg optycznych jest zaznaczona linią przerywaną.

Przykład 4.7

Dyfrakcja rentgenowska na krysztale soli

Pospolita sól kuchenna składa się głównie z kryształów NaCl. W krysztale NaCl występuje rodzina płaszczyzn odległych o $0{,}252\ \text{nm}$. Jeśli obserwuje się maksimum pierwszego rzędu przy kącie padania wynoszącym $18{,}1°$, to jaka jest długość fali rentgenowskiej rozpraszanej przez ten kryształ?

Strategia rozwiązania

Użyjemy Równania 4.6 (tj. równania Bragga), aby znaleźć θ.

Rozwiązanie

Znana jest wartość kąta padania, przy którym występuje maksimum pierwszego rzędu. Odległość d między płaszczyznami również jest znana. Przekształcając równanie Bragga dla długości fali, otrzymujemy

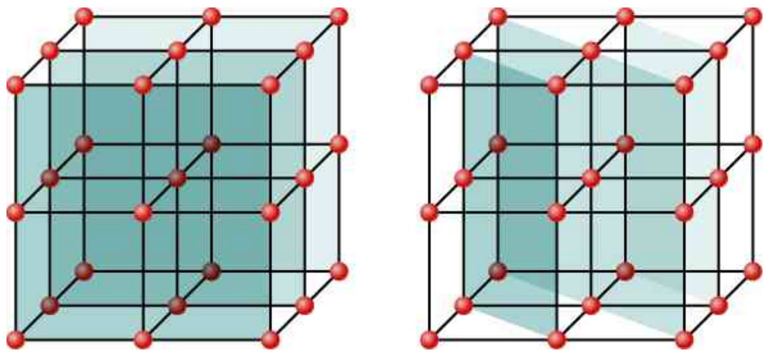
$$\lambda = \frac{2d\sin\theta}{m} = \frac{2\cdot 0{,}252\cdot 10^{-9}\ \text{m}\cdot\sin(18{,}1°)}{1} = 1{,}57\cdot 10^{-10}\ \text{m} = 0{,}157\,\text{nm}\,.$$

Znaczenie

Otrzymana długość fali elektromagnetycznej mieści się w obszarze widma promieniowania rentgenowskiego. Powtórzmy: falowy charakter promieniowania staje się wyraźny, gdy długość fali ($\lambda = 0{,}157\ \text{nm}$) jest porównywalna z wielkością struktury fizycznej ($d = 0{,}252\ \text{nm}$), z którą ta fala oddziałuje.

4.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dla eksperymentu opisanego w Przykładzie 4.7 sprawdź, jakie są dwa inne kąty, dla których można zaobserwować maksima interferencji. Co ogranicza liczbę możliwych maksimów?

Mimo że na Rysunku 4.25 przedstawiono dla uproszczenia kryształ jako dwuwymiarowy układ centrów rozpraszania, prawdziwe kryształy są strukturami trójwymiarowymi. Rozpraszanie może zachodzić jednocześnie dla różnych rodzin płaszczyzn sieciowych, zwanych **płaszczyznami Bragga** (ang. **Bragg planes**), w różnych kierunkach i dla różnych odległości między nimi, jak to pokazano na Rysunku 4.26. Powstały obraz interferencyjny może być zatem dość skomplikowany.



Rysunek 4.26 Ze względu na regularność ułożenia atomów tworzących strukturę kryształu jeden kryształ może składać się z wielu rodzin płaszczyzn sieciowych, z których każda płaszczyzna daje wkład/przyczynek do dyfrakcji promieniowania rentgenowskiego.

4.7 | Holografia

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, jak trójwymiarowy obraz jest zapisywany w postaci hologramu;
- opisywać, jak trójwymiarowy obraz jest odtwarzany z hologramu.

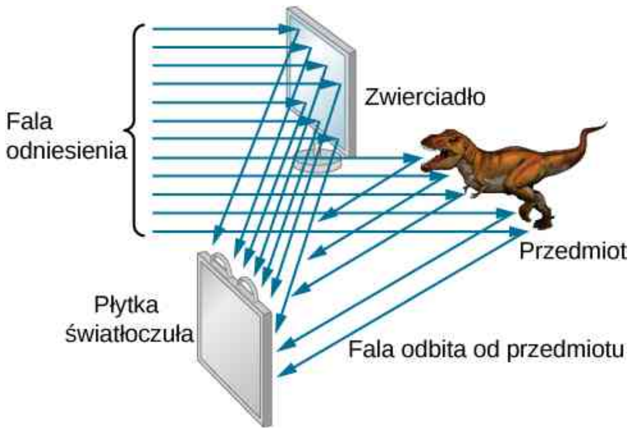
Hologram, taki jak ten z Rysunku 4.27, jest prawdziwym trójwymiarowym obrazem zarejestrowanym na kliszy (płytce światłoczułej) przy pomocy laserów. Hologramy wykorzystuje się do zabawy, do dekoracji na upominkach i okładkach magazynów, w zabezpieczeniach na kartach kredytowych i prawach jazdy (przy czym aby je odtworzyć, potrzebne są laserowe lub podobne im urządzenia) oraz do przechowywania ważnych informacji w postaci trójwymiarowej. Można się przekonać, że hologram jest prawdziwym trójwymiarowym obrazem, ponieważ obiekty na nim widoczne zmieniają swoją względną pozycję przy oglądaniu obrazu z różnych stron.



Rysunek 4.27 Karty kredytowe powszechnie mają logo na hologramie, dzięki czemu są trudne do podrobienia. Źródło: Dominic Alves

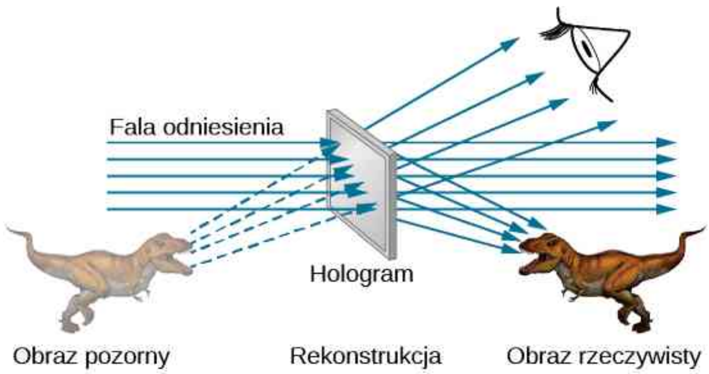
Nazwa hologram oznacza „cały obraz” (z gr. **holo**, tak jak w słowie „holistyczny”), co ma związek z trójwymiarowością obrazu. **Holografia** (ang. **holography**) to proces wytwarzania hologramów i chociaż mogą one być zapisane na kliszy fotograficznej, proces ten różni się od zwykłej fotografii. Holografia wykorzystuje interferencję lub, ogólniej, zjawiska optyki falowej, podczas gdy normalna fotografia bazuje na optyce geometrycznej. Rysunek 4.28 przedstawia jeden ze sposobów wytwarzania hologramu. Wiązka spójnego światła laserowego jest rozdzielona na dwie części. Część wiązki światła, którą nazywa się wiązką odniesienia, po odbiciu od zwierciadła pada na kliszę, a druga część trafia tam dopiero po odbiciu od przedmiotu. Światło rozproszone na obiekcie nakłada się na wiązkę odniesienia, ulegając interferencji konstruktywnej i destruktywnej. W rezultacie naświetlony film wygląda na zamglony, ale po dokładnym przyjrzeniu się mu znajdujemy na nim skomplikowany wzór interferencyjny. Jeżeli w danym punkcie interferencja

była konstruktywna, to w tym miejscu folia (będąca negatywem) jest zaciemniona. Holografia jest czasem nazywana bezsoczewkową fotografią, ponieważ wykorzystuje właściwości falowe światła w przeciwieństwie do normalnej fotografii, która opiera się na optyce geometrycznej i wymaga soczewek.



Rysunek 4.28 Produkcja hologramu. Wiązka spójnego światła z lasera tworzy dobrze określony obraz interferencyjny na kawałku folii. Wiązka laserowa jest podzielona przez częściowo posrebrzane lustro na część światła padającego na obiekt i pozostałą część trafiającą bezpośrednio na płytkę światłoczułą. Źródło: modyfikacja pracy Mariany Ruiz Villarreal

Ze światła padającego na hologram można otrzymać trójwymiarowy obraz oryginalnego przedmiotu. Proces ten jest skomplikowany w szczegółach, ale jego podstawy można zrozumieć na podstawie Rysunku 4.29, na którym laser tego typu, który był użyty do rejestracji hologramu na płytce światłoczułej, jest teraz wykorzystany do jej oświetlenia. Niektóre naświetlone obszary płytki są ciemne i blokują przejście światła przez płytkę, podczas gdy inne pozwalają na jego przejście. Płytka światłoczuła działa więc podobnie jak zbiór siatek dyfrakcyjnych o różnych odległościach między szczelinami. Światło przechodzące przez hologram jest uginane w różnych kierunkach, tworząc zarówno rzeczywisty, jak i pozorny obraz przedmiotu zapisanego na płytce. Obraz interferencyjny jest taki sam jak wytworzony przez sam przedmiot. Oglądając różne fragmenty obrazu interferencyjnego, otrzymujemy różne perspektywy, tak jak przy patrzeniu bezpośrednio na przedmiot. W ten sposób obraz rzeczywiście sprawia wrażenie trójwymiarowego przedmiotu.



Rysunek 4.29 Hologram transmisyjny to taki, który daje prawdziwe i wirtualne obrazy, gdy wiązka lasera tego samego rodzaju jak ten, którym zarejestrowano hologram, przechodzi przez niego. Dyfrakcja z różnych części hologramu wytwarza ten sam obraz interferencyjny, który został wytworzony przez oryginalny przedmiot podczas jego wytworzenia. Źródło: modyfikacja pracy Mariany Ruiz Villarreal

Hologram pokazany na Rysunku 4.29 jest hologramem transmisyjnym. Istnieją również hologramy oglądane w świetle odbitym, takie jak hologramy na światło białe na kartach kredytowych, będące najbardziej powszechnymi hologramami odbiciowymi (refleksyjnymi). W hologramach tych często pojawiają się nieco rozmyte tęczowe brzegi, ponieważ obrazy dyfrakcyjne o różnych barwach światła mają nieco inne położenie ze względu na różne długości fal. Inne zastosowania holografii obejmują wszystkie rodzaje trójwymiarowego magazynowania informacji, w postaci holograficznych obrazów posągów w muzeach, konstrukcji do badań inżynierskich oraz obrazów narządów ludzkich.

Holografia wynaleziona pod koniec 1940 roku przez **Dennisa Gabora (1900–1970)**, który otrzymał za to w 1971 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie fizyki, rozwinęła się wraz z rozwojem techniki laserowej. Ponieważ lasery wytwarzają spójną monochromatyczną wiązkę światła, ich obrazy interferencyjne są bardzo wyraźne. Precyzja jest tak wielka, że możliwe jest nawet nagranie wielu hologramów na jednym kawałku folii poprzez zmianę jego kąta ustawienia dla każdego kolejnego obrazu. Hologramy, które w ten sposób rejestrują poszczególne elementy ruchu (np. spaceru), stają się rodzajem trójwymiarowego bezsoczewkowego filmu.

W podobny sposób w dziedzinie medycyny hologramy pozwoliły stworzyć ze zbioru pojedynczych obrazów (zdjęć) całkowicie trójwymiarową, holograficzną ekspozycję obiektu. Przy pomocy endoskopu mogą być wykonywane wysokiej rozdzielczości trójwymiarowe, holograficzne obrazy narządów wewnętrznych i tkanek. Ponadto stosunkowo proste jest przechowywanie tych obrazów w celu ich wykorzystania w przyszłości.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 4

KLUCZOWE POJĘCIA

brakujący rząd (ang. missing order) maksimum interferencyjne, które nie jest widoczne, ponieważ pokrywa się z minimum dyfrakcyjnym

dyfrakcja (ang. diffraction) uginanie się fal wokół krawędzi otworu lub przeszkody (zespół zjawisk związanych z uginaniem się fal wokół krawędzi otworu lub przeszkody i interferencją fal wtórnych)

dyfrakcja rentgenowska (ang. X-ray diffraction) technika, która daje szczegółowe informacje o strukturze krystalograficznej materiałów naturalnie występujących w przyrodzie i wytworzonych sztucznie

dyfrakcyjna granica rozdzielczości (ang. diffraction limit) ograniczenie rozdzielczości z powodu dyfrakcji

holografia (ang. holography) proces wytwarzania hologramów za pomocą laserów

hologram (ang. hologram) trójwymiarowy obraz zarejestrowany na kliszy za pomocą wiązki laserowej; dosłownie słowo to oznacza cały obraz (z gr. holo, podobnie jak w słowie „holistyczny”)

interferencja destruktywna na pojedynczej szczelinie (ang. destructive interference for a single slit) występuje, gdy szerokość szczeliny jest porównywalna z długością fali oświetlającego ją światła

kryterium Rayleigha (ang. Rayleigh criterion) dwa obiekty punktowe są rozróżnialne, gdy środek obrazu dyfrakcyjnego jednego z nich wypada bezpośrednio w miejscu pierwszego minimum dyfrakcyjnego drugiego

obraz dyfrakcyjny na podwójnej szczelinie (ang. two-slit diffraction pattern) obraz dyfrakcyjny uzyskany z dwóch szczelin o szerokości D, które znajdują się w odległości d od siebie, jest złożeniem obrazu interferencyjnego pochodzącego z dwóch źródeł punktowych odległych od siebie o d i obrazu dyfrakcyjnego ze szczeliny o szerokości D

płaszczyzny Bragga (ang. Bragg planes) rodziny płaszczyzn (sieciowych) wewnątrz kryształów, które mogą powodować dyfrakcję rentgenowską

rozdzielczość (ang. resolution) zdolność – lub jej ograniczenie – rozróżniania szczegółów w obrazach

siatka dyfrakcyjna (ang. diffraction grating) wiele równomiernie rozmieszczonych równoległych szczelin

szerokość centralnego piku (ang. width of the central peak) kąt pomiędzy minimami dla $m = 1$ i $m = -1$

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Destruktywna interferencja dla pojedynczej szczeliny	$D \sin\theta = m\lambda$, gdzie $m = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
Połowa kąta fazowego	$\beta = \frac{\phi}{2} = \frac{\pi D \sin\theta}{\lambda}$
Amplituda natężenia pola elektrycznego w obrazie dyfrakcyjnym	$E = N \Delta E_0 \frac{\sin\beta}{\beta}$
Natężenie obrazu dyfrakcyjnego	$I = I_0 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2$
Kryterium Rayleigha dla okrągłych otworów	$\theta = 1{,}22 \frac{\lambda}{D}$
Równanie Bragga	$m\lambda = 2d \sin\theta$, gdzie $m = 1, 2, 3, \ldots$

PODSUMOWANIE

4.1 Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

- Dyfrakcja powoduje wysyłanie fal wtórnych w różne strony wokół krawędzi otworu lub innej przeszkody.
- Pojedyncza szczelina daje obraz interferencyjny (dyfrakcyjny) charakteryzujący się szerokim centralnym maksimum oraz węższymi i ciemniejszymi maksimami bocznymi.

4.2 Natężenie światła w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

- Natężenie w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie można obliczyć za pomocą metody wskazów, otrzymując

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 ,$$

gdzie $\beta = \phi \,/\, 2 = \pi D \sin \theta \,/\, \lambda$, D jest szerokością szczeliny, λ długością fali, a θ kątem mierzonym od kierunku centralnego piku.

4.3 Dyfrakcja na podwójnej szczelinie

- Dla realnych szczelin o skończonych szerokościach efekty interferencji i dyfrakcji występują jednocześnie, tworząc skomplikowany wzór natężenia obrazu.
- Można wyznaczyć względne natężenia prążków interferencyjnych przy uwzględnieniu dyfrakcji.
- Brakujące rzędy powstają, gdy maksima interferencji i minima dyfrakcji znajdują się w tym samym miejscu.

4.4 Siatki dyfrakcyjne

- Siatki dyfrakcyjne składają się z dużej liczby równomiernie rozmieszczonych równoległych szczelin, które wytwarzają obraz interferencyjny podobny do uzyskanego dla podwójnej szczeliny, ale ostrzejszy.
- Konstruktywna interferencja zachodzi, gdy $d \sin \theta = m\lambda$ dla $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, gdzie d jest odległością między szczelinami, θ jest kątem padania promienia, a m rzędem interferencji.

4.5 Otwory kołowe i rozdzielczość

- Dyfrakcja ogranicza rozdzielczość.
- Kryterium Rayleigha stwierdza, że dwa obiekty punktowe są rozróżnialne, gdy środek obrazu dyfrakcyjnego jednego z nich znajduje się bezpośrednio w miejscu pierwszego minimum dyfrakcyjnego drugiego.

4.6 Dyfrakcja rentgenowska

- Zakres promieniowania rentgenowskiego obejmuje względnie krótkie długości fal EM; promieniowanie to może wykazywać właściwości falowe, takie jak interferencja, gdy oddziałuje z odpowiednio małymi obiektami.

4.7 Holografia

- Holografia jest techniką opartą na zjawisku interferencji fal, służącą do rejestrowania i odtwarzania trójwymiarowych obrazów.
- Lasery oferują praktyczny sposób wytwarzania ostrych obrazów holograficznych ze względu na swoje monochromatyczne i spójne światło, dające wyraźne obrazy interferencyjne.

PYTANIA

4.1 Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

1. Jeżeli zmniejszysz szerokość szczeliny, na której światło ulega dyfrakcji, to jak zmieni się dawany przez nią obraz dyfrakcyjny?

2. Porównaj zjawisko interferencji i dyfrakcji.

3. Jeżeli ty i twój przyjaciel jesteście po przeciwnych stronach wzgórza, to możecie się komunikować za pomocą **walkie-talkie**, ale nie przy użyciu latarki. Wyjaśnij to.

4. Co się dzieje z obrazem dyfrakcyjnym na pojedynczej szczelinie, gdy całe urządzenie optyczne jest zanurzone w wodzie?

5. W badaniach dyfrakcji na pojedynczej szczelinie zakładamy, że długość szczeliny jest znacznie większa niż jej szerokość. Co dzieje się z obrazem dyfrakcyjnym, jeśli te dwa wymiary są porównywalne?

6. Prostokątna szczelina ma dwa razy większą szerokość niż wysokość. Czy dyfrakcyjny centralny pik jest szerszy w kierunku pionowym, czy w kierunku poziomym?

4.2 Natężenie światła w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

7. W Równaniu 4.4 parametr β sprawia wrażenie kąta, ale nie jest to kąt, który można zmierzyć za pomocą kątomierza w świecie fizycznym. Wyjaśnij, co oznacza β.

4.3 Dyfrakcja na podwójnej szczelinie

8. Poniżej przedstawiono centralną część obrazu interferencyjnego dla światła czerwonego o ściśle określonej długości fali, padającego na podwójną szczelinę. Obraz ten jest w rzeczywistości połączeniem interferencji na pojedynczej i podwójnej szczelinie. Zwróć uwagę, że jasne plamy są równomiernie rozmieszczone. Czy jest to charakterystyczne dla podwójnej, czy pojedynczej szczeliny? Zauważ, że niektóre z jasnych punktów są słabo widoczne po obu stronach środkowej osi widma. Czy to jest cechą pojedynczej, czy podwójnej szczeliny? Co jest mniejsze, szerokość szczelin czy odległość między nimi? Uzasadnij swoje odpowiedzi.



4.5 Otwory kołowe i rozdzielczość

9. Czy wyższa rozdzielczość jest uzyskana w mikroskopie dla czerwonego, czy niebieskiego światła? Uzasadnij swoją odpowiedź.

10. Zdolność rozdzielcza teleskopu wzrasta wraz ze średnicą jego obiektywu. Jaka jest inna korzyść z większego obiektywu?

11. Odległość między atomami w cząsteczce wynosi około 10^{-8} cm. Czy światło widzialne może być wykorzystywane do „oglądania” cząsteczek?

12. Wiązka światła zawsze się rozprzestrzenia. Dlaczego nie można spowodować, aby wiązka była utworzona z równoległych promieni? Dlaczego nie można skorygować rozbieżności wiązki przy użyciu zwierciadeł, soczewek lub otworów?

4.6 Dyfrakcja rentgenowska

13. Sieci krystaliczne mogą być badane promieniowaniem rentgenowskim, ale nie UV. Dlaczego?

4.7 Holografia

14. Dlaczego można powiedzieć, że hologram jest prawdziwym trójwymiarowym obrazem, a obrazy w trójwymiarowych filmach nie?

15. Jeśli hologram rejestrujemy przy użyciu monochromatycznego światła o jednej długości fali, ale jego obraz oglądamy przy innej długości, powiedzmy, że krótszej o $10\,\%$, to co zobaczymy? Co zobaczymy, jeśli hologram jest oglądany przy użyciu światła o długości fali równej dokładnie połowie pierwotnej długości fali?

16. Jaki obraz zobaczysz, jeśli hologram jest rejestrowany przy użyciu światła monochromatycznego, ale jego obraz oglądasz w białym świetle? Wyjaśnij.

ZADANIA

4.1 Dyfrakcja na pojedynczej szczelinie

17. a. Pod jakim kątem jest pierwsze minimum dla światła o długości fali 550 nm padającego na pojedynczą szczelinę o szerokości 1 μm?
b. Czy wystąpi drugie minimum?

18. a. Oblicz kąt, pod jakim występuje pierwsze minimum dyfrakcyjne na pojedynczej szczelinie, o szerokości 2 μm, na którą pada światło fioletowe o długości fali 410 nm;
b. Pod jakim kątem jest pierwsze minimum dla światła czerwonego o długości fali 700 nm?

19. a. Jak szeroka jest pojedyncza szczelina, która daje pierwsze minimum dla światła o długości fali 633 nm i kąta $28°$?
b. Pod jakim kątem wystąpi drugie minimum?

20. a. Jaka jest szerokość pojedynczej szczeliny, dla której pierwsze minimum dla światła o długości fali 600 nm występuje przy kącie $60°$?
b. Znajdź długość fali światła, dla którego pierwsze minimum występuje pod kątem $62°$.

21. Znajdź długość fali światła, dla którego trzecie minimum występuje przy kącie $48{,}6°$, gdy pada ono na pojedynczą szczelinę o szerokości 3 μm.

22. a. Światło sodowe (światło z lampy, w której źródłem są pary sodu) ma średnią długość fali 589 nm. Fala pada na pojedynczą szczelinę o szerokości $7{,}5\text{ μm}$. Pod jakim kątem występuje drugie minimum?
b. Jaki jest najwyższy rząd obserwowanych minimów dyfrakcyjnych?

23. Rozpatrz pojedynczą szczelinę dyfrakcyjną o szerokości $0{,}25\text{ mm}$, na którą pada światło o długości fali $\lambda = 589\text{ nm}$. Obraz szczeliny jest rzutowany na ekran odległy o 1 m. Jak daleko od środka obrazu znajdują się środki pierwszego i drugiego ciemnego prążka?

24. a. Znajdź kąt między pierwszymi minimami dwóch linii światła z lampy sodowej, które mają długości fali $589{,}1\text{ nm}$ i $589{,}6\text{ nm}$, gdy światło pada na pojedynczą szczelinę o szerokości 2 μm;
b. Jaka jest odległość między tymi minimami, jeśli obraz dyfrakcyjny obserwujemy na ekranie w odległości 1 m od szczeliny?

c. Przedyskutuj łatwość lub trudność pomiaru takiej odległości.

25. a. Jaka jest minimalna szerokość pojedynczej szczeliny (mierzona jako wielokrotność długości fali λ), przy której można zaobserwować pierwsze minimum dla długości fali λ?
b. Jaka jest jej minimalna szerokość, jeśli można zaobserwować 50 minimów?
c. A jaka jest, jeśli można zaobserwować 1000 minimów?

26. a. Jeżeli minimum obrazu dyfrakcyjnego z pojedynczej szczeliny powstaje dla kąta $14{,}5^\circ$, to jaki jest kąt dla minimum drugiego rzędu?
b. Jaki jest kąt dla minimum trzeciego rzędu?
c. Czy istnieje minimum czwartego rzędu?
d. Wykorzystaj swoje odpowiedzi do pokazania, że szerokość kątowa centralnego maksimum ma wartość około dwukrotnie większą od szerokości kątowej następnego maksimum (jest to kąt pomiędzy pierwszym i drugim minimum).

27. Jeśli odległość na ekranie pomiędzy pierwszym i drugim minimum obrazu pojedynczej szczeliny dyfrakcyjnej wynosi 6 mm, to jaka jest odległość pomiędzy ekranem a szczeliną? Światło ma długość fali 500 nm, a szerokość szczeliny wynosi $0{,}16\text{ mm}$.

28. Wejście do portu możliwe jest przez barierę skalną posiadającą szeroki otwór o szerokości 50 m. Fale oceaniczne mają długość 20 m i padają prostopadle do powierzchni otworu. Pod jakim kątem względem kierunku padania fal powinny znajdować się łodzie w porcie, aby były najmniej narażone na ich działanie?

29. Technik konserwacji samolotów przechodzi obok wysokich drzwi hangaru, które działają jak pojedyncza szczelina dla dźwięków wpadających do środka. Na zewnątrz hangaru, w linii prostopadłej do otworu w drzwiach, silnik odrzutowy wytwarza dźwięk o częstotliwości 600 Hz. Pod jakim kątem względem kierunku prostopadłego do drzwi technik zaobserwuje pierwsze minimum natężenia dźwięku, jeśli otwór drzwiowy ma szerokość $0{,}8\text{ m}$, a prędkość dźwięku wynosi 340 m / s?

4.2 Natężenie światła w dyfrakcji na pojedynczej szczelinie

30. Pojedyncza szczelina o szerokości 3 μm jest oświetlona przez żółte światło lampy sodowej o długości fali 589 nm. Znajdź natężenie dla kąta 15° mierzonego względem osi, w kierunku której występuje centralne maksimum.

31. Pojedyncza szczelina o szerokości $0{,}1\text{ mm}$ jest oświetlona przez lampę rtęciową, wysyłającą falę o długości 576 nm. Znajdź natężenie oświetlenia dla kąta 10° względem osi, dla której występuje centralne maksimum.

32. Szerokość centralnego piku dyfrakcyjnego na pojedynczej szczelinie wynosi 5 mm. Długość fali światła jest równa 600 nm, a ekran stoi w odległości 2 m od szczeliny.
a. Jaka jest szerokość tej szczeliny?
b. Określ natężenie światła w punkcie odległym o $4{,}5\text{ mm}$ od centrum względem natężenia w centrum obrazu.

33. Rozważ obraz dyfrakcyjny na pojedynczej szczelinie dla $\lambda = 600\text{ nm}$, $D = 0{,}025\text{ mm}$ i $x = 2\text{ m}$. Znajdź natężenie względem I_0 dla kątów $\theta = 0{,}5^\circ$, 1°, $1{,}5^\circ$, 3° i 10°.

4.3 Dyfrakcja na podwójnej szczelinie

34. Dwie szczeliny o szerokości 2 μm każda, wykonane w nieprzezroczystym materiale, są w odległości takiej, że ich środki są oddalone od siebie o 6 μm. Na taką podwójną szczelinę pada monochromatyczne światło o długości fali 450 nm. Na ekranie powstaje połączenie obrazu interferencyjnego i dyfrakcyjnego.
a. Ile prążków interferencyjnych będzie obserwowanych w obszarze centralnego maksimum dyfrakcyjnego?
b. Ile prążków interferencyjnych będzie obserwowanych, jeśli zwiększymy dwukrotnie szerokość szczeliny przy zachowaniu takiej samej odległości pomiędzy szczelinami?
c. Ile prążków interferencyjnych będzie obserwowanych, jeśli odległość między szczelinami wzrośnie dwukrotnie do 12 μm przy zachowaniu takiej samej szerokości szczelin?
d. Co zmieni się w punkcie (a), gdy zamiast światła o długości fali 450 nm użyjemy światła o długości fali 680 nm?
e. Ile wynosi stosunek wartości natężenia piku centralnego do natężenia następnego jasnego piku w punkcie (a)?
f. Czy stosunek ten zależy od długości fali światła?
g. Czy stosunek ten zależy od odległości między szczelinami?

35. Podwójna szczelina tworzy obraz dyfrakcyjny, który jest połączeniem interferencji na pojedynczej i podwójnej szczelinie. Znajdź stosunek szerokości szczelin do odległości między nimi, jeśli pierwsze minimum w obrazie otrzymanym z pojedynczej szczeliny pokrywa się z piątym maksimum obrazu z dwóch szczelin. (Powoduje to znaczne zmniejszenie natężenia piątego maksimum).

36. W przypadku konfiguracji z dwiema szczelinami, gdzie szczeliny oddalone są od siebie o odległość cztery razy większą od ich szerokości, oblicz, ile prążków interferencyjnych leży w obszarze środkowego piku obrazu dyfrakcyjnego.

37. Światło o długości fali 500 nm pada prostopadle na 50 szczelin o szerokości $2{,}5 \cdot 10^{-3}\text{ mm}$, rozmieszczonych co $5 \cdot 10^{-3}\text{ mm}$. Ile prążków interferencyjnych

leży w obszarze środkowego piku dyfrakcyjnego?

38. Monochromatyczne światło o długości fali 589 nm pada na podwójną szczelinę o szerokości $2{,}5 \text{ μm}$, o nieznanej odległości między szczelinami. Wewnątrz centralnego maksimum dyfrakcyjnego znajduje się dziewięć maksimów interferencyjnych. Na podstawie powyższych informacji znajdź odległość między szczelinami.

39. Kiedy światło monochromatyczne o długości fali 430 nm pada na dwie szczeliny, gdzie odległość między dwiema szczelinami wynosi 5 μm, obserwuje się 11 prążków interferencyjnych w obszarze centralnego maksimum. Ile prążków interferencyjnych zaobserwujesz w obszarze centralnego maksimum, gdy na tę samą podwójną szczelinę będzie padało światło o długości fali $632{,}8 \text{ nm}$?

40. Określ natężenia dwóch kolejnych pików interferencyjnych, poza pikiem środkowym, w obszarze centralnego maksimum dyfrakcyjnego, gdy światło o długości fali 628 nm pada na podwójną szczelinę o szerokości 500 nm. Szczeliny znajdują się w odległości 1500 nm od siebie. Przyjmij, że natężenie w środku centralnego maksimum wynosi $1 \text{ mW} / \text{cm}^2$.

4.4 Siatki dyfrakcyjne

41. Siatka dyfrakcyjna ma 2000 linii na centymetr. Dla jakiego kąta zaobserwujemy maksimum pierwszego rzędu w przypadku zielonego światła o długości fali 520 nm?

42. Znajdź kąt, pod jakim obserwuje się maksimum trzeciego rzędu dla żółtego światła o długości fali 580 nm, które pada na siatkę dyfrakcyjną posiadającą 1500 linii na centymetr.

43. Ile szczelin na centymetr ma siatka dyfrakcyjna, dla której maksimum pierwszego rzędu w przypadku niebieskiego światła o długości fali 470 nm występuje pod kątem $25°$?

44. Jaka jest odległość między szczelinami siatki dyfrakcyjnej, która daje maksimum drugiego rzędu dla czerwonego światła o długości fali 760 nm pod kątem $60°$?

45. Oblicz długość fali światła, które padając na siatkę dyfrakcyjną o 5000 liniach na centymetr, daje maksimum drugiego rzędu dla kąta $45°$.

46. Prąd elektryczny płynący przez gazowy wodór wytwarza kilka różnych długości fali w zakresie światła widzialnego. Jakie są te długości fali widma wodoru, jeżeli dają maksima pierwszego rzędu pod kątami $24{,}2°$, $25{,}7°$, $29{,}1°$ i $41°$, gdy światło pada na siatkę dyfrakcyjną posiadającą 10 000 linii na centymetr?

47. a. Jaka będzie odpowiednia wartość czterech kątów z poprzedniego zadania dla siatki dyfrakcyjnej, mającej 5000 linii na centymetr?
b. Dla tej samej siatki znajdź kąty maksimów drugiego rzędu;
c. Omów związek pomiędzy zmniejszeniem liczby linii na centymetr a nowymi kątami dla maksimów różnych rzędów.

48. Jaki jest odstęp pomiędzy strukturami występującymi w piórku ptaka, które działają jak odbiciowe siatki dyfrakcyjne przy założeniu, że dają one maksimum pierwszego rzędu pod kątem $30°$ dla światła o długości fali 525 nm?

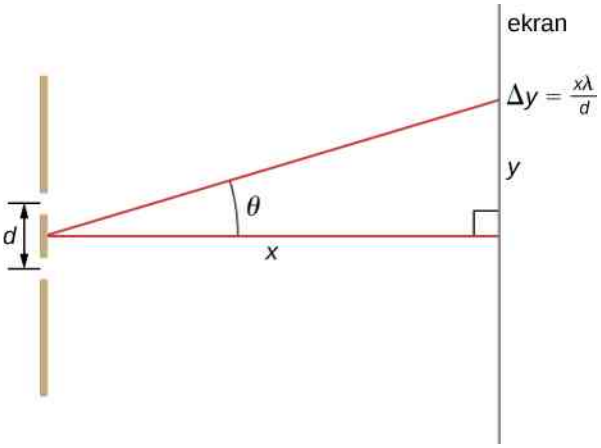
49. Opal, taki jak pokazany na Rysunku 4.15, działa jak odbiciowa siatka dyfrakcyjna posiadająca struktury odbiciowe odległe o około 8 μm. Gdy opal jest oświetlony światłem padającym prostopadle, pod jakim kątem będzie widoczne
a. światło czerwone;
b. światło niebieskie?

50. Pod jakim kątem siatka dyfrakcyjna daje maksimum drugiego rzędu dla światła, dla którego maksimum pierwszego rzędu występuje przy kącie $20°$?

51. a. Znajdź maksymalną liczbę linii na centymetr siatki dyfrakcyjnej, którą może ona mieć, aby było widoczne przynajmniej jedno maksimum dla najmniejszej długości fali światła widzialnego;
b. Czy taka siatka będzie przydatna dla widma ultrafioletowego?
c. A dla widma w podczerwieni?

52. a. Wykaż, że jeżeli siatka dyfrakcyjna ma 30 000 linii na centymetr, to nie będzie widoczne żadne maksimum dla światła widzialnego;
b. Jaka jest najdłuższa długość fali, dla jakiej powstaje pierwsze maksimum?
c. Jaka jest największa liczba linii na centymetr, którą może mieć siatka dyfrakcyjna, aby było widoczne kompletne widmo drugiego rzędu dla światła widzialnego?

53. Poniższy rysunek stosuje się również do dyfrakcji na siatce ze szczelinami umieszczonymi w odległości d od siebie. Jaka jest odległość między prążkami wytworzonymi przez siatkę dyfrakcyjną mającą 125 linii na centymetr dla światła o długości fali 600 nm, jeśli ekran stoi w odległości $1{,}5 \text{ m}$ od niej? (Wskazówka: Przy założeniu, że odległość d jest porównywalna z λ, odległość między sąsiednimi prążkami wynosi $\Delta y = x\lambda / d$).



4.5 Otwory kołowe i rozdzielczość

54. Radioteleskop o średnicy $305\,\mathrm{m}$ w Arecibo pokazany na Rysunku 4.20 wykrywa fale radiowe o średniej długości $4\,\mathrm{cm}$.
a. Jaki jest kąt między dwoma dającymi się rozróżnić źródłami punktowymi dla tego teleskopu?
b. Jak blisko siebie mogą być te źródła punktowe, jeśli znajdują się w galaktyce Andromedy odległej o 2 mln lat świetlnych?

55. Zakładając rozdzielczość kątową wyznaczoną dla teleskopu Hubble'a w Przykładzie 4.6, wyznacz rozmiar najmniejszego szczegółu, który można by zaobserwować na Księżycu.

56. Rozbieżność wiązki światła latarki na skutek dyfrakcji jest nieznaczna w porównaniu z innymi jego optycznymi ograniczeniami, takimi jak sferyczne aberracje w jego zwierciadle. Aby to pokazać, oblicz minimum kątowe rozbieżności wiązki promieni latarki, która ma pierwotnie średnicę $5\,\mathrm{cm}$, a średnia długość fali jej światła wynosi $600\,\mathrm{nm}$.

57. a. Jaki jest minimalny kąt rozbieżności wiązki lasera He-Ne o długości fali $633\,\mathrm{nm}$, która ma początkowo $1\,\mathrm{mm}$ średnicy?
b. Jeżeli laser jest skierowany na górskie urwisko odległe od nas o $15\,\mathrm{km}$, to jak duża będzie oświetlająca je plama światła?
c. Zaniedbując efekty atmosferyczne, oblicz, jak wielka plama światła powstanie na Księżycu. (Może to być zrobione tak, aby wiązka światła trafiła w umieszczony wcześniej przez kosmonautów na Księżycu odpowiedni reflektor, odbiła się i wróciła na Ziemię, by z czasu ruchu można było wyznaczyć odległość).

58. Teleskopy mogą być wykorzystane w celu powiększenia średnicy wiązki lasera i ograniczenia rozbieżności wiązki na skutek dyfrakcji. Wiązka laserowa jest wysyłana przez teleskop i może być skierowana na satelitę lub Księżyc.
a. Jeżeli odbywa się to z teleskopu w Mount Wilson, to wytworzona wiązka ma średnicę $2{,}54\,\mathrm{m}$ dla światła o długości fali $633\,\mathrm{nm}$. Jaka jest minimalna rozpiętość kątowa wiązki?
b. Przy zaniedbaniu efektów atmosferycznych jaka jest wielkość utworzonej plamy światła na Księżycu przy założeniu, że odległość z Ziemi do Księżyca wynosi $3{,}84 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$?

59. Granica ostrości oka jest związana z dyfrakcją na jego źrenicy.
a. Jaki jest kąt między dwoma możliwymi do rozróżnienia punktami świetlnymi dla średnicy źrenicy równej $3\,\mathrm{mm}$ przy założeniu średniej długości fali $550\,\mathrm{nm}$?
b. Przyjmij otrzymany wynik jako praktyczną granicę rozdzielczości dla oka. Jaka jest możliwie największa odległość samochodu, abyś mógł rozróżnić dwa reflektory, zważywszy, że znajdują się one w odległości $1{,}3\,\mathrm{m}$ od siebie?
c. Jaka jest odległość między dwoma punktami, które są rozróżnialne w odległości $0{,}8\,\mathrm{m}$ od oka?
d. W jaki sposób ma się twoja odpowiedź z podpunktu (c) do obserwowania szczegółów przedmiotów w codziennych okolicznościach?

60. Jaka jest minimalna średnica zwierciadła w teleskopie, która pozwala zobaczyć szczegóły na Księżycu, odległym od Ziemi o $384\,000\,\mathrm{km}$, o wymiarze $5\,\mathrm{km}$? Załóż, że średnia długość fali dla odebranego światła wynosi $550\,\mathrm{nm}$.

61. Znajdź promień obrazu gwiazdy na siatkówce oka, gdy jego źrenica jest rozszerzona do $0{,}65\,\mathrm{cm}$, a odległość źrenicy od siatkówki wynosi $2{,}8\,\mathrm{cm}$. Załóż, że $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$.

62. a. Planeta karłowata Pluton i jego księżyc Charon znajdują się w odległości $19\,600\,\mathrm{km}$. Pomijając efekty atmosferyczne, oceń, czy teleskop w Palomar Mountain o średnicy $5{,}08\,\mathrm{m}$ jest w stanie rozróżnić te ciała, gdy są one $4{,}5 \cdot 10^9\,\mathrm{km}$ oddalone od Ziemi. Załóż, że średnia długość fali światła wynosi $550\,\mathrm{nm}$;
b. W rzeczywistości wykorzystując teleskop naziemny, nie da się prawie dostrzec, że Pluton i Charon są oddzielnymi ciałami. Jakie są tego przyczyny?

63. Satelita szpiegowski okrąża Ziemię na wysokości $180\,\mathrm{km}$. Jaka jest minimalna średnica soczewki obiektywu w teleskopie, który ma być wykorzystany do rozróżnienia kolumny maszerujących żołnierzy w odległości $2\,\mathrm{m}$ od siebie? Załóż, że $\lambda = 550\,\mathrm{nm}$.

64. Jaki jest minimalny odstęp kątowy dla dwóch gwiazd, które są rozróżnialne podczas obserwacji przez 8,1-metrowy teleskop Gemini South, zakładając, że efekty atmosferyczne nie ograniczają rozdzielczości? Należy przyjąć $550\,\mathrm{nm}$ jako długość fali światła emitowanego przez gwiazdy.

65. Reflektory samochodu są umieszczone $1{,}3\,\mathrm{m}$ od siebie. Jaka jest maksymalna odległość, przy której oko

może rozróżnić te dwa reflektory? Przyjmij średnicę źrenicy równą $0{,}4\ \mathrm{cm}$.

66. Kropki na stronie z drukarki laserowej muszą być na tyle blisko siebie, by nie było widać poszczególnych punktów tuszu. Aby uzyskać taki efekt, odległość między punktami musi być mniejsza niż ta wynikająca z kryterium Rayleigha. Przyjmij średnicę źrenicy oka równą $3\ \mathrm{mm}$, a odległość oka od papieru $35\ \mathrm{cm}$. Przy jakiej minimalnej odległości między tymi dwoma punktami nie będą już one rozróżniane? Ilu punktom na cal (dpi) to odpowiada?

67. Patrzysz w dół na autostradę z pasażerskiego samolotu odrzutowego lecącego na wysokości $6\ \mathrm{km}$. Jak daleko od siebie muszą się znajdować dwa samochody, abyś był w stanie je rozróżnić? Załóż, że $\lambda = 550\ \mathrm{nm}$, a średnica źrenicy twoich oczu wynosi $4\ \mathrm{mm}$.

68. Czy astronauta znajdujący się w satelicie na orbicie Ziemi w odległości $180\ \mathrm{km}$ od jej powierzchni może rozróżnić dwa drapacze chmur, które są oddalone o $20\ \mathrm{m}$ od siebie? Załóż, że źrenice oczu astronauty mają średnicę $5\ \mathrm{mm}$ i że większość wpadającego do oczu światła ma długość fali wynoszącą około $500\ \mathrm{nm}$.

69. Napisy na stadionowej tablicy wyników są utworzone z gęsto rozmieszczonych żarówek, które emitują głównie światło żółte. (Przyjmij $\lambda = 600\ \mathrm{nm}$). Jak blisko muszą być względem siebie rozmieszczone żarówki, aby obserwator z odległości $80\ \mathrm{m}$ widział wyświetlane linie jako ciągłe, a nie jako poszczególne żarówki? Załóż, że źrenice oczu obserwatora mają średnicę $5\ \mathrm{mm}$.

70. Jeżeli mikroskop może zbierać światło od obiektów w kątach do $\alpha = 70°$, to jaka jest najmniejsza struktura, która może zostać rozróżniona, gdy oświetlona jest światłem o długości fali $500\ \mathrm{nm}$,

a. gdy preparat jest w powietrzu;

b. gdy preparat jest zanurzony w oleju o współczynniku załamania światła $1{,}52$?

71. Aparat wykorzystuje obiektyw z przysłoną o średnicy $2\ \mathrm{cm}$. Jaka jest rozdzielczość kątowa zdjęcia wykonanego przy długości fali $700\ \mathrm{nm}$? Czy będą widoczne oznaczenia na milimetrowej linijce umieszczonej w odległości $35\ \mathrm{m}$ od aparatu?

4.6 Dyfrakcja rentgenowska

72. Promieniowanie rentgenowskie o długości fali $0{,}103\ \mathrm{nm}$ odbija się od kryształu, a maksima drugiego rzędu są rejestrowane pod kątem Bragga $25{,}5°$. Jaki jest odstęp pomiędzy płaszczyznami rozpraszającymi w tym krysztale?

73. Maksimum pierwszego rzędu odbicia Bragga występuje, gdy monochromatyczne promieniowanie rentgenowskie pada na kryształ pod kątem $32{,}3°$ względem płaszczyzny odbijającej. Jaka jest długość fali tego promieniowania?

74. Eksperyment rozpraszania promieni rentgenowskich przeprowadza się na krysztale, którego atomy tworzą płaszczyzny odległe od siebie o $0{,}44\ \mathrm{nm}$. Jeżeli źródło promieni rentgenowskich wytwarza fale o długości $0{,}548\ \mathrm{nm}$, to jaki jest kąt (w odniesieniu do płaszczyzn odbijających), pod którym eksperymentator musi oświetlać kryształ w celu obserwacji maksimum pierwszego rzędu?

75. Struktura krystaliczna NaCl tworzy płaszczyzny odległe od siebie o $0{,}541\ \mathrm{nm}$. Jaki jest najmniejszy kąt mierzony względem tych płaszczyzn, dla którego dyfrakcja promieniowania rentgenowskiego może być zaobserwowana, jeżeli zastosowane promieniowanie rentgenowskie ma długość fali $0{,}085\ \mathrm{nm}$?

76. Dla pewnego kryształu maksimum pierwszego rzędu dyfrakcji promieni rentgenowskich obserwuje się pod kątem $27{,}1°$ mierzonym względem jego powierzchni przy użyciu źródła promieniowania rentgenowskiego o nieznanej długości fali. Ponadto, gdy kryształ oświetli się inną, tym razem znaną długością fali równą $0{,}137\ \mathrm{nm}$, maksimum drugiego rzędu wystąpi przy $37{,}3°$. Wyznacz

a. odstęp między płaszczyznami odbijającymi;

b. nieznaną długość fali.

77. Kryształy kalcytu zawierają rozpraszające (odbijające) płaszczyzny odległe od siebie o $0{,}3\ \mathrm{nm}$. Jaka jest odległość kątowa między maksimum pierwszego i drugiego rzędu dyfrakcji dla fal rentgenowskich o długości $0{,}13\ \mathrm{nm}$?

78. Kąt Bragga dla pierwszego rzędu dyfrakcji na pewnym krysztale wynosi $12{,}1°$. Jaki jest ten kąt dla drugiego rzędu?

ZADANIA DODATKOWE

79. Światło białe pada na dwie wąskie szczeliny odległe od siebie o $0{,}4\ \mathrm{mm}$. Obraz interferencyjny jest obserwowany na ekranie oddalonym o $3\ \mathrm{m}$.

a. Jaka jest odległość między pierwszymi dwoma maksimami dla światła czerwonego ($\lambda = 700\ \text{nm}$) i fioletowego ($\lambda = 400\ \text{nm}$)?
b. W jakiej odległości od punktu centralnego znajduje się najbliższe maksimum dla światła żółtego ($\lambda = 600\ \text{nm}$), pokrywające się z maksimum dla światła fioletowego? Określ rząd dla każdego z tych maksimów.

80. Mikrofale o długości $10\ \text{mm}$ padają prostopadle na metalową płytkę, która posiada szczelinę o szerokości $25\ \text{mm}$.
a. Gdzie jest położone pierwsze minimum dyfrakcyjne w tym przypadku?
b. Czy będą obserwowane minima dla fali o długości $30\ \text{mm}$?

81. Kwazary (ang. quasar – quasi-stellar radio source, co znaczy „obiekt gwiazdopodobny emitujący fale radiowe”) to odkryte w 1960 roku bardzo odległe obiekty astronomiczne przypominające gwiazdy, będące w rzeczywistości rodzajem aktywnych galaktyk. Są to silne nadajniki fal radiowych o rozmiarze kątowym tak małym jak gwiazdy. Kwazar 3C405 to właściwie dwa odrębne źródła radiowe widziane pod kątem $82\ \text{s}$ kątowych. Jeśli kwazar bada się za pomocą emisji fal radiowych o częstotliwości $410\ \text{MHz}$, to jaka jest minimalna średnica radioteleskopu, którym można rozróżnić te dwa źródła?

82. Dwie szczeliny, każda o szerokości $1800\ \text{nm}$ oraz odległości między ich środkami równej $1200\ \text{nm}$, oświetlone są falą płaską z jonowego lasera kryptonowego, emitującego fale o długości $461{,}9\ \text{nm}$. Znajdź liczbę pików interferencyjnych w obszarze centralnego maksimum dyfrakcyjnego.

83. Promieniowanie mikrofalowe o nieznanej długości fali pada na pojedynczą szczelinę o szerokości $6\ \text{cm}$. Szerokość kątowa centralnego piku wynosi $25°$. Znajdź długość tej fali.

84. Czerwone światło (długość fali wynosi w powietrzu $632{,}8\ \text{nm}$) z lasera helowo-neonowego pada na pojedynczą szczelinę o szerokości $0{,}05\ \text{mm}$. Całe urządzenie zanurza się w wodzie o współczynniku załamania równym $1{,}333$. Określ szerokość kątową centralnego piku.

85. Promień światła o długości fali $461{,}9\ \text{nm}$ wychodzi przez okrągłą przysłonę jonowego lasera kryptonowego o średnicy $2\ \text{mm}$. Skutkiem dyfrakcji wiązka poszerza się w czasie rozchodzenia. Jak duża jest centralna plama dyfrakcyjna w punkcie odległym o
a. $1\ \text{m}$;
b. $1\ \text{km}$;
c. $1000\ \text{km}$;
d. na powierzchni Księżyca, w odległości $400\,000\ \text{km}$ od Ziemi?

86. Jak daleko od siebie muszą się znaleźć dwa obiekty na Księżycu, aby mogły być rozróżniane przez oko, gdyby rozdzielczość ograniczały tylko efekty dyfrakcyjne źrenicy? Przyjmij $550\ \text{nm}$ dla długości fali światła, średnicę źrenicy $5\ \text{mm}$ i odległość $400\,000\ \text{km}$ do Księżyca.

87. Jak daleko od siebie muszą być położone dwa obiekty na Księżycu, aby były rozróżniane przez teleskop Gemini North na Mauna Kea na Hawajach, mający średnicę $8{,}1\ \text{m}$, gdy rozdzielczość ograniczają jedynie efekty dyfrakcji przysłony teleskopu? Przyjmij $550\ \text{nm}$ dla długości fali światła i $400\,000\ \text{km}$ dla odległości od Księżyca.

88. Satelita szpiegowski jest podobno w stanie rozróżnić obiekty odległe o $10\ \text{cm}$ od siebie, będąc $197\ \text{km}$ nad powierzchnią Ziemi. Jaka jest średnica źrenicy wejściowej teleskopu, jeżeli jego rozdzielczość jest ograniczona tylko przez efekty dyfrakcyjne? Przyjmij długość fali światła $550\ \text{nm}$.

89. Monochromatyczne światło o długości fali $530\ \text{nm}$ przechodzi przez poziomą pojedynczą szczelinę o szerokości $1{,}5\ \mu\text{m}$, zrobioną w nieprzezroczystej płycie. Ekran o wymiarach $2\ \text{m} \times 2\ \text{m}$ jest odległy o $1{,}2\ \text{m}$ od szczeliny.
a. W jaki sposób rozłożony jest obraz dyfrakcyjny na ekranie?
b. Jakie są kąty powstających minimów dyfrakcyjnych względem środka?
c. Dla jakich kątów powstają maksima?
d. Jak szeroki jest centralny jasny prążek na ekranie?
e. Jak szerokie na ekranie są kolejne jasne prążki?

90. Monochromatyczne światło o nieznanej długości fali pada na szczelinę o szerokości $20\ \mu\text{m}$. Obraz dyfrakcyjny jest widoczny na ekranie w odległości $2{,}5\ \text{m}$ od szczeliny, przy czym centralne maksimum rozciąga się na odległość $10\ \text{cm}$. Znajdź długość fali.

91. Źródło światła o dwóch długościach fali: $550\ \text{nm}$ i $600\ \text{nm}$, o równym natężeniu, pada na szczelinę o szerokości $1{,}8\ \mu\text{m}$. Znajdź odległość między dwoma jasnymi prążkami rzędu $m = 1$ na ekranie odległym o $30\ \text{cm}$ od szczeliny.

92. Pojedynczą szczelinę o szerokości $2100\ \text{nm}$ oświetla prostopadle fala o długości $632{,}8\ \text{nm}$. Znajdź różnicę faz między falami wysyłanymi z góry szczeliny i miejsca odległego o $1 / 3$ jej szerokości od dolnej części szczeliny do punktu na ekranie odległego o $2\ \text{m}$ w poziomie i $10\ \text{cm}$ w pionie od środka szczeliny.

93. Pojedyncza szczelina o szerokości $3\ \mu\text{m}$ jest oświetlona przez żółte światło lampy sodowej o długości fali $589\ \text{nm}$. Znajdź natężenie pod kątem $15°$ w stosunku do osi w odniesieniu do natężenia centralnego maksimum.

94. Pojedyncza szczelina o szerokości $0{,}1\ \text{mm}$ jest oświetlona przez światło lampy rtęciowej o długości fali $576\ \text{nm}$. Znajdź natężenie pod kątem $10°$ w stosunku

do osi w odniesieniu do natężenia centralnego maksimum.

95. Siatka dyfrakcyjna tworzy drugie maksimum w odległości 89,7 cm od centralnego maksimum na ekranie odległym o 2 m od siatki. Jeśli siatka ma 600 linii na centymetr, to jaka jest długość fali światła, które daje obraz dyfrakcyjny?

96. Siatka dyfrakcyjna mająca 4000 linii na centymetr została użyta do ugięcia światła, które zawiera wszystkie długości fali między 400 nm a 650 nm. Jak szerokie jest widmo pierwszego rzędu na ekranie oddalonym o 3 m od siatki?

97. Siatka dyfrakcyjna mająca 2000 linii na centymetr została zastosowana do pomiaru długości fal emitowanych przez wodorową lampę wyładowczą.
a. Pod jakim kątem znajdują się maksima dwóch pierwszych rzędów niebieskich linii dla długości fal 410 nm i 434 nm?
b. Maksima dwóch innych linii pierwszego rzędu można znaleźć dla $\theta_1 = 0{,}097\ \text{rad}$ i $\theta_2 = 0{,}132\ \text{rad}$. Jakie są długości fal dla tych linii?

98. Pokaż, że w przypadku białego światła ($400\ \text{nm} < \lambda < 700\ \text{nm}$) padającego prostopadle na siatkę dyfrakcyjną prążki drugiego i trzeciego rzędu widma zachodzą na siebie bez względu na stałą siatki d.

99. Ile pełnych rzędów widma światła widzialnego ($400\ \text{nm} < \lambda < 700\ \text{nm}$) może powstawać podczas dyfrakcji na siatce, która zawiera 5000 linii na centymetr?

100. Dwie lampy dające światło o długości fali 589 nm stoją 1 m od siebie na drewnianej desce. W jakiej maksymalnej odległości może być obserwator, by nadal widzieć lampy jako dwa oddzielne źródła światła, jeśli rozdzielczość wynika wyłącznie z dyfrakcji światła wpadającego do oka? Załóż, że światło wpada do oka przez źrenicę o średnicy 4,5 mm.

101. Podczas jasnego dnia przy przejrzystym powietrzu jesteś na szczycie góry i patrzysz na miasto odległe o 12 km. Są tam dwie wysokie wieże stojące 20 m od siebie. Czy twoje oko może rozróżnić te dwie wieże, jeśli średnica jego źrenicy wynosi 4 mm? Jeśli nie, jaka powinna być minimalna moc powiększenia teleskopu potrzebnego do rozróżnienia tych wież? W swoich obliczeniach przyjmij 550 nm dla długości fali światła.

102. Radioteleskopy są wykorzystywane do wykrywania emisji radiowych z kosmosu. Ponieważ fale radiowe są znacznie dłuższe niż długości fal światła widzialnego, średnica teleskopu radiowego musi być bardzo duża, aby zapewnić dobrą rozdzielczość. Na przykład radioteleskop w Penticton w Kolumbii Brytyjskiej, prowincji Kanady, ma średnicę wynoszącą 26 m i może pracować przy częstotliwościach sięgających 6,6 GHz.
a. Jaka jest długość fali odpowiadająca tej częstotliwości?
b. Jaka jest rozdzielczość kątowa dwóch źródeł radiowych, które mogą być rozróżniane przez ten teleskop?
c. Porównaj tę rozdzielczość teleskopu z rozmiarem kątowym Księżyca.

Źródło poniższej ilustracji: Jason Nishiyama



103. Oblicz długość fali światła, które daje pierwsze minimum przy kącie 36,9°, gdy pada na pojedynczą szczelinę o szerokości 1 µm.

104. a. Znajdź kąt trzeciego minimum dyfrakcyjnego dla światła o długości fali 633 nm padającego na szczelinę o szerokości 20 µm;
b. Jakiej szerokości szczelina dawałaby to minimum przy 85°?

105. Niech przykładem dyfrakcji na szczelinach o wymiarach spotykanych w życiu codziennym będą drzwi o szerokości 1 m.
a. Jakie jest kątowe położenie pierwszego minimum na obrazie dyfrakcyjnym dla światła o długości fali 600 nm?
b. Powtórz te obliczenia dla dźwięku o częstotliwości 440 Hz (a1). Przyjmij prędkość dźwięku równą 343 m / s.

106. Jakie są kątowe położenia pierwszego i drugiego minimum obrazu dyfrakcyjnego wytwarzanego przez szczelinę o szerokości 0,2 mm, oświetloną światłem o długości fali 400 nm? Jaka jest szerokość kątowa centralnego piku?

107. Jak daleko umieściłbyś ekran ze szczeliną z poprzedniego zadania, aby drugie minimum znalazło się w odległości 2,5 mm od środka obrazu dyfrakcyjnego?

108. Jak wąska jest szczelina dająca obraz dyfrakcyjny na ekranie odległym od niej o $1{,}8\,\mathrm{m}$, którego centralny pik ma szerokość $1\,\mathrm{m}$? Przyjmij $\lambda = 589\,\mathrm{nm}$.

109. Załóż, że centralny pik na obrazie dyfrakcyjnym na pojedynczej szczelinie jest tak szeroki, że można przyjąć, iż pierwsze minima są w położeniach kątowych $\pm 90°$. Jaki jest stosunek szerokości szczeliny do długości fali światła w tym przypadku?

110. Centralna część piku dyfrakcyjnego na podwójnej szczelinie zawiera dokładnie 9 prążków interferencyjnych. Jaki jest stosunek odległości między szczelinami do szerokości szczeliny?

111. Określ natężenie trzech maksimów interferencyjnych, innych niż maksimum centralne, w obszarze centralnego maksimum dyfrakcyjnego, jeśli takie istnieją, gdy światło o długości fali $500\,\mathrm{nm}$ pada prostopadle na układ dwóch szczelin o szerokości $1000\,\mathrm{nm}$ każda, będących w odległości $1500\,\mathrm{nm}$ od siebie. Przyjmij natężenie w centralnym miejscu obrazu równe $1\,\mathrm{mW} / \mathrm{cm}^2$.

112. Żółte światło z lampy sodowej wydaje się światłem monochromatycznym, lecz gdy pada na siatkę dyfrakcyjną mającą $10\,000$ linii na centymetr, wytwarza ono dwa maksima pierwszego rzędu pod kątem $36{,}093°$ i $36{,}129°$. Jakie są wartości tych dwóch długości fal – z dokładnością do $0{,}1\,\mathrm{nm}$?

113. Struktury na piórku ptaka działają jak odbiciowe siatki dyfrakcyjne o 8000 linii na centymetr. Ile wynosi kąt maksimum pierwszego rzędu dla światła o długości fali $600\,\mathrm{nm}$?

114. Jeżeli siatka dyfrakcyjna wytwarza maksimum pierwszego rzędu dla najkrótszej długości fali światła widzialnego przy $30°$, to przy jakim kącie wystąpi maksimum pierwszego rzędu dla najdłuższej długości fali światła widzialnego?

115. a. Jaka długość fali światła widzialnego daje maksimum czwartego rzędu pod kątem $25°$, gdy pada ono na siatkę dyfrakcyjną posiadającą $25\,000$ linii na centymetr?
b. Co jest nieracjonalnego w tym wyniku?
c. Które założenia w zadaniu są nieuzasadnione lub sprzeczne?

116. Rozważ spektrometr działający na bazie siatki dyfrakcyjnej. Sformułuj zagadnienie, w którym należy obliczyć odległość między dwiema długościami fal elektromagnetycznego promieniowania w spektrometrze. Wśród wielkości, które należy uwzględnić, są długości fal, jakie mają być rozróżnialne, liczba szczelin na metr w siatce dyfrakcyjnej oraz odległość siatki od ekranu lub detektora. Omów praktyczność urządzenia pod względem zdolności do rozróżniania długości interesujących nas fal.

117. Astronom amator chce zbudować teleskop z taką granicą rozdzielczości dyfrakcyjnej, która pozwoli mu sprawdzić, czy na księżycach Jowisza są ludzie.
a. Jaka jest średnica zwierciadła potrzebnego, aby móc zobaczyć szczegóły o rozmiarze $1\,\mathrm{m}$ na księżycu Jowisza w odległości $7{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$ od Ziemi? Niech średnia długość fali światła wynosi $600\,\mathrm{nm}$;
b. Co jest nieuzasadnionego w tym wyniku?
c. Jakie założenia są nieuzasadnione lub niespójne?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

118. Niebieskie światło o długości fali $450\,\mathrm{nm}$ pada na szczelinę o szerokości $0{,}25\,\mathrm{mm}$. Soczewka skupiająca o długości ogniskowej równej $20\,\mathrm{cm}$ umieszczona jest za szczeliną i skupia obraz dyfrakcyjny na ekranie.
a. Jak daleko jest ekran od soczewki?
b. Jaka jest odległość pomiędzy pierwszym i trzecim minimum obrazu dyfrakcyjnego?

119. a. Załóż, że maksima znajdują się w połowie odległości między minimami obrazu na pojedynczej szczelinie dyfrakcyjnej. Użyj średnicy i obwodu wykresu wskazowego do opisania jego natężenia dla dyfrakcji na pojedynczej szczelinie, aby określić natężenie trzeciego i czwartego maksimum względem natężenia maksimum centralnego;
b. Wykonaj te same obliczenia, wykorzystując Równanie 4.4.

120. a. Przez zróżniczkowanie Równania 4.4 pokaż, że maksima wyższego rzędu pojedynczej szczeliny dyfrakcyjnej występują przy wartościach β, które spełniają warunek $\operatorname{tg} \beta = \beta$;
b. Wykreśl $y = \operatorname{tg} \beta$ i $y = \beta$ jako funkcje β i znajdź punkty przecięcia tych dwóch krzywych. Jakie informacje dają one o rozmieszczeniu maksimów?
c. Przekonaj się sam, że punkty te nie pojawiają się dokładnie w $\beta = (n + 1/2)\pi$, gdzie $n = 0, 1, 2, \ldots$, ale są bardzo blisko tych wartości.

121. Jaką maksymalną liczbę rys, przypadających na $1\,\mathrm{cm}$ powinna posiadać siatka dyfrakcyjna, aby za jej pomocą można było otrzymać widmo pierwszego rzędu dla światła białego?

122. Pokaż, że siatka dyfrakcyjna nie może dawać maksimum drugiego rzędu dla danej długości fali światła, jeżeli maksimum pierwszego rzędu jest usytuowane pod kątem mniejszym niż $30°$.

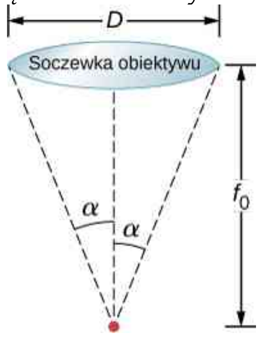
123. Promień lasera He-Ne odbija się od powierzchni płyty CD i pada na ścianę. Najjaśniejszym punktem jest wiązka odbita pod kątem równym kątowi padania. Jednakże obserwowane są również prążki. Jeśli ściana znaj-

duje się w odległości 1,5 m od płyty, a pierwszy prążek można zaobserwować 0,6 m od centralnego maksimum, to jakie są odległości między rowkami na płycie CD?

124. Przedmioty oglądane przez mikroskop są umieszczone bardzo blisko ogniska obiektywu. Pokaż, że minimalna rozróżnialna przez mikroskop odległość x między dwoma przedmiotami dana jest przez

$$x = \frac{1{,}22\lambda f_0}{D},$$

gdzie, jak pokazano poniżej, f_0 jest ogniskową, a D oznacza średnicę soczewki obiektywu.



5 | TEORIA WZGLĘDNOŚCI

Treść rozdziału

Wstęp



Rysunek 5.1 Szczególna teoria względności wyjaśnia, dlaczego na Ziemi czas płynie inaczej niż dla szybko poruszającego się satelity systemu GPS (**Global Positioning System**). Odbiorniki nawigacji satelitarnej znajdujące się w samochodach nie mogłyby poprawnie określać swojej pozycji na Ziemi, nie biorąc pod uwagę tej rozbieżności. Źródło: USAF

Szczególna teoria względności została sformułowana przez **Alberta Einsteina (1879–1955)** w 1905 roku. Opisuje ona, w jaki sposób czas, przestrzeń i zjawiska fizyczne zachowują się w różnych układach odniesienia poruszających się ze stałą prędkością względem siebie. Teoria ta różni się od późniejszej pracy Einsteina opisującej ogólną teorię względności, która uwzględnia dowolny układ odniesienia, w tym układ o niezerowym przyspieszeniu. Kluczowym założeniem teorii Einsteina jest niezależność prędkości światła w próżni od układu odniesienia.

Teoria względności doprowadziła do znaczących zmian w sposobie postrzegania czasu i przestrzeni. „Zdroworozsądkowe prawa fizyczne”, których używamy do opisu czasoprzestrzeni opierającej się na prawach Newtona, rozróżniają czas i przestrzeń jako odrębne pojęcia i różnią się znacząco od praw właściwych obiektom poruszającym się z prędkością bliską prędkości światła. Na przykład szczególna teoria względności stwierdza, że pomiary czasu i długości nie są takie same dla poruszających się względem siebie układów odniesienia. Cząstka zaobserwowana w jednym układzie może istnieć 10^{-8} s, gdy w innym istnieje $2 \cdot 10^{-8}$ s. Pewien przedmiot może mieć $2\,\text{m}$ w jednym układzie, a w innym $3\,\text{m}$. Te zmiany są zwykle wyraźne dopiero dla prędkości bliskich prędkości światła, ale nawet

w przypadku dużo mniejszych prędkości osiąganych przez satelitę GPS, którego poprawne funkcjonowanie wymaga niezwykle dokładnych pomiarów czasowych, zmiana długości w różnych układach odniesienia może wpłynąć na jego działanie i przez to musi zostać wzięta pod uwagę.

Inaczej niż w przypadku **mechaniki newtonowskiej** (ang. **Newtonian mechanics**), która opisuje ruch ciał, czy **równań Maxwella** (ang. **Maxwell's equations**), określających zachowanie fal elektromagnetycznych, szczególna teoria względności nie ogranicza się do konkretnego typu zjawiska fizycznego. Jej założenia dotyczące czasoprzestrzeni mają wpływ na wszystkie podstawowe teorie fizyczne.

Poprawki do mechaniki newtonowskiej wprowadzone przez szczególną teorię względności nie są istotne dla obiektów o prędkościach małych w porównaniu z prędkością światła. Nie podważają one klasycznych praw Newtona w tym zakresie. Równania mechaniki relatywistycznej odchodzą znacząco od klasycznej mechaniki Newtona jedynie dla obiektów poruszających się z prędkością relatywistyczną (mniejszą od prędkości światła, ale zbliżoną do niej). W makroskopowym świecie, którego doświadczamy na co dzień, prawa fizyki można uprościć do klasycznej mechaniki Newtona, z pominięciem poprawek wynikających z fizyki relatywistycznej.

5.1 | Niezmienność praw fizyki

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać zagadnienia teoretyczne i eksperymentalne, do których odnosi się szczególna teoria względności Einsteina;
- określać dwa postulaty szczególnej teorii względności.

Załóżmy, że chcemy obliczyć długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego, znając wartości kątów przy podstawie i długości pozostałych boków. Niezależnie od tego, czy zdecydujemy się obliczyć tę długość, korzystając z definicji funkcji trygonometrycznych, czy też z twierdzenia Pitagorasa, wyniki powinny być takie same. Przewidywania oparte na różnych zasadach fizyki, czy to prawach mechaniki, czy zasadach związanych z falami elektromagnetycznymi, także muszą dawać ten sam wynik.

Albert Einstein natrafił na pewne niezgodności między rozumowaniem opartym na zasadach elektromagnetyzmu a założeniami mechaniki klasycznej. Rozważmy przypadek dwóch obserwatorów, z których każdy mierzy prędkość światła we własnym **układzie odniesienia** (ang. **rest frame**), czyli w takim, względem którego pozostają oni w spoczynku. Według założeń mechaniki klasycznej, które uznajemy za oczywiste, jeżeli obserwator zmierzy prędkość impulsu świetlnego jako $\vec{v}$ w jednym układzie odniesienia, przy czym układ ten porusza się z prędkością $\vec{u}$ względem innego układu odniesienia, to obserwator znajdujący się w drugim układzie zmierzy tę prędkość jako $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{u}$. Tę sumę prędkości nazywamy też **zasadą względności prędkości Galileusza** (ang. **Galilean relativity**). Jeżeli zasada ta byłaby prawdziwa, to prędkość światła, którą pierwszy obserwator zmierzył jako c, dla drugiego obserwatora wynosiłaby $c + u$. Jeżeli rozsądnie założymy, że prawa elektrodynamiki są takie same w obu układach odniesienia, to przewidywana prędkość światła (w próżni) w obu tych układach powinna wynosić $c = 1 \big/ \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ (o przenikalności elektrycznej próżni wspomniano w rozdziale Ładunki elektryczne i pola (https://cnx.org/content/m67159/latest/) , natomiast więcej o przenikalności magnetycznej próżni znajduje się w rozdziale Źródła pola magnetycznego (https://cnx.org/content/m67207/latest/)). Każdy z obserwatorów powinien otrzymać taką samą wartość prędkości światła względem własnego układu odniesienia. Aby usunąć takie rozbieżności, Einstein zaproponował swoją **szczególną teorię względności** (ang. **special theory of relativity**), która wprowadziła zupełnie nowy sposób pojmowania czasu i przestrzeni i została potwierdzona eksperymentalnie.

Inercjalne układy odniesienia

Każda prędkość mierzona jest względem jakiegoś układu odniesienia. Na przykład prędkość samochodu mierzona jest względem punktu startowego na drodze, po której się przemieszcza, ruch pocisku – względem powierzchni, z której został wystrzelony, a ruch planety po orbicie – względem gwiazdy, wokół której orbituje. Układy odniesienia, w których zasady mechaniki mają najprostszą formę, to te o zerowym przyspieszeniu. Właśnie w takich układach spełniona jest pierwsza zasada dynamiki Newtona – zasada bezwładności.

Inercjalny układ odniesienia

Inercjalny układ odniesienia (ang. **inertial frame of reference**) jest takim układem odniesienia, gdzie ciało spoczywające pozostaje w spoczynku, a ciało będące w ruchu porusza się ze stałą prędkością po linii prostej, jeżeli nie działają na nie siły zewnętrzne.

Przykładowo na pasażera samolotu lecącego ze stałą prędkością na stałej wysokości prawa fizyki działają tak samo jak na pasażera stojącego na powierzchni Ziemi. Sytuacja komplikuje się w momencie startu samolotu. W takim przypadku pasażer znajdujący się w stanie spoczynku wewnątrz samolotu zauważy, że siła wypadkowa nie jest równa iloczynowi masy i przyspieszenia ma . Zamiast tego F jest równa ma powiększonemu o pozorną siłę/siłę bezwładności. Ta sytuacja nie jest tak prosta, jak w przypadku inercjalnego układu odniesienia. Słowo „szczególna” w „szczególnej teorii względności” odnosi się jedynie do przypadków z inercjalnymi układami odniesienia. Późniejsza ogólna teoria względności Einsteina bierze pod uwagę wszystkie rodzaje układów odniesienia, w tym także przyspieszające, a co za tym idzie nieinercjalne układy odniesienia.

Pierwszy postulat Einsteina

W inercjalnych układach odniesienia prawa mechaniki klasycznej nie tylko są najprostsze w opisie, ale też jednobrzmiące dla wszystkich układów inercjalnych. Einstein oparł **pierwszy postulat** (ang. **first postulate of special relativity**) swojej teorii na założeniu, że zasada ta jest adekwatna dla wszystkich praw fizyki, nie tylko dla praw mechaniki.

Pierwszy postulat szczególnej teorii względności

Prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach odniesienia.

Ten postulat nie pozwala na istnienie szczególnych czy preferowanych układów inercjalnych. Prawa natury nie dają nam możliwości wyróżnienia jednego układu przez nadanie mu szczególnych właściwości. Na przykład nie jesteśmy w stanie określić danego układu jako pozostającego w bezwzględnym spoczynku. Możemy jedynie określić ruch układów względem siebie.

To jednak nie wszystkie konsekwencje tego postulatu. Prawami fizyki nazwiemy jedynie te, które go spełniają. Zobaczymy też, że definicje energii i pędu muszą ulec zmianie, żeby się do niego dostosować. Kolejnym następstwem sformułowania tego postulatu jest słynne równanie $E = mc^2$, które wiąże ze sobą masę i energię.

Drugi postulat Einsteina

Drugi postulat, na którym Einstein oparł szczególną teorię względności, odnosi się do **prędkości światła** (ang. **speed of light**). Pod koniec XIX wieku główne dogmaty klasycznej fizyki były już dobrze znane. Za dwa najważniejsze prawa można było wtedy uznać reguły odnoszące się do fal elektromagnetycznych i zasady mechaniki Newtona. Badania takie jak eksperyment z podwójną szczeliną Younga, przeprowadzony w pierwszych latach latach XIX wieku, utwierdziły naukowców w przekonaniu, że światło jest falą. Z równań Maxwella zaś wynikało, że fala elektromagnetyczna w próżni przemieszcza się z prędkością $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$, ale nie precyzowały one układu odniesienia, w którym światło miałoby posiadać taką prędkość. W tym czasie znanych było wiele typów fal i wszystkie przemieszczały się w jakimś ośrodku. Naukowcy uznali więc, że musi istnieć jakiś ośrodek (choćby próżnia), w którym porusza się światło, i właśnie względem niego (często zwanego „eterem”) światło przemieszcza się z prędkością c .

W połowie lat 80. XIX wieku amerykański fizyk **A. A. Michelson (1852–1931)** we współpracy z **E. W. Morleyem (1838–1923)** dokonał serii bezpośrednich pomiarów prędkości światła. Początkowo celem tego eksperymentu było określenie prędkości v, z jaką Ziemia porusza się w tajemniczym ośrodku, w którym rozchodzi się światło – eterze. Sam eter musiałby pozostać nieruchomy, co potwierdziły wcześniej obserwacje aberracji światła (zmiany położenia gwiazd na niebie w wyniku ruchu Ziemi wokół Słońca) wykonane w 1871 roku przez **G. B. Airy'ego (1801–1892)**. Prędkość światła na Ziemi powinna wynosić $c + v$, gdy kierunek ruchu Ziemi, zgodny z kierunkiem ruchu ośrodka, byłby przeciwny do strumienia ośrodka o prędkości u, i $c - v$, gdyby był zgodny z kierunkiem strumienia. Wyniki pomiarów okazały się zaskakujące.

Doświadczenie Michelsona-Morleya

Doświadczenie Michelsona-Morleya (ang. **Michelson-Morley experiment**) dowiodło, że prędkość światła w próżni nie zależy od ruchu Ziemi wokół Słońca.

Ostatecznym wnioskiem z tego eksperymentu jest stwierdzenie, że światło w przeciwieństwie do fal mechanicznych nie potrzebuje ośrodka do rozchodzenia się. Co więcej, Michelson i Morley dowiedli, że prędkość światła c jest niezależna od ruchu źródła fal względem obserwatora. Oznacza to, że każdy obserwator, niezależnie od tego, w jaki sposób porusza się względem fal elektromagnetycznych, zaobserwuje prędkość światła równą c. Przez wiele lat naukowcy bezskutecznie starali się wyjaśnić wyniki tego eksperymentu za pomocą praw mechaniki Newtona.

Ponadto istniała sprzeczność między zasadami elektromagnetyzmu a założeniami mechaniki newtonowskiej w ujęciu prędkości względnej. W podejściu klasycznym prędkości w różnych układach odniesienia powinny podlegać tym samym zasadom dodawania, jak zwykłe wektory, dając wypadkową prędkość względną. Jeżeli to założenie byłoby prawdziwe, dwóch obserwatorów poruszających się z różną prędkością zaobserwowałoby dwie różne prędkości światła. Wyobraźmy sobie, jak wtedy wyglądałaby fala świetlna dla kogoś poruszającego się wzdłuż niej z prędkością c. Jeżeli taki ruch byłby możliwy, to fala wydawałaby się pozostawać w spoczynku względem obserwatora. Pola elektryczne i magnetyczne byłyby zróżnicowane w przestrzeni, ale stałe w czasie. Sytuacji takiej nie dopuszczają równania Maxwella. Możliwe są dwa wyjaśnienia tej sprzeczności: albo równania Maxwella mają inną formę w różnych układach odniesienia, albo przedmiot posiadający masę nie może poruszać się z prędkością c. Einstein wywnioskował, że druga teza musi być prawdziwa. Równania Maxwella są poprawne, ale dodawanie prędkości zgodnie z regułami mechaniki Newtona nie obejmuje światła.

Wnioski te zostały uznane dopiero w 1905 roku, gdy Einstein opublikował swoją pierwszą pracę na temat szczególnej teorii względności. Opierając się przede wszystkim na swoim rozumowaniu, że teorie elektryczności i magnetyzmu nie pozwoliłyby na istnienie innej prędkości światła w próżni, i niewiele wiedząc o eksperymencie Michelsona-Morleya, Einstein sformułował **drugi postulat szczególnej teorii względności** (ang. **second postulate of special relativity**).

Drugi postulat szczególnej teorii względności

Światło w próżni rozchodzi się z tą samą prędkością c we wszystkich kierunkach w każdym inercjalnym układzie odniesienia.

Innymi słowy, prędkość światła ma taką samą, określoną wartość dla każdego obserwatora, niezależnie od prędkości względnej źródła promieniowania elektromagnetycznego (źródła fali elektromagnetycznej, czyli światła). Ten złudnie prosty i nieintuicyjny postulat razem z pierwszym postulatem spowodował serię zmian w fizyce. Pośród nich znalazła się poprawka dotycząca jednoczesności zdarzeń i skrócenia długości przy prędkościach zbliżonych do prędkości światła, a także powiązanie ze sobą masy i energii w taki sposób, że można je było wzajemnie w siebie przekształcać. Pojęcia te zostaną szerzej opisane w dalszej części rozdziału.

Warto podkreślić, że prędkość światła nie jest maksymalną prędkością obserwowaną w przyrodzie (np. świecąc ruchomym laserem na Księżycu, możemy spowodować, że plamka lasera będzie poruszać się szybciej od światła), ale żaden fizyczny układ odniesienia nie może jej przekroczyć.

5.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyjaśnij, w jaki sposób szczególna teoria względności różni się od ogólnej teorii względności.

5.2 | Względność jednoczesności zdarzeń

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- na podstawie postulatów Einsteina dowodzić, że dwa zdarzenia zachodzące jednocześnie w jednym układzie odniesienia nie muszą być jednoczesne w innym;
- opisywać, w jaki sposób na jednoczesność zdarzeń może wpływać ruch względny dwóch obserwatorów.

Czy czas płynie inaczej dla różnych obserwatorów? Intuicja podpowiada nam, że czas, w jakim wykonana jest dana czynność, np. czas jednego okrążenia w biegu (Rysunek 5.2), powinien być taki sam dla każdego obserwatora. Na co dzień niezgodności dotyczące upływającego czasu związane są zazwyczaj z dokładnością, z jaką dokonuje się pomiaru. Nikt nie będzie się kłócił, że czas biegnie inaczej dla sprintera, a inaczej dla zegara trzymanego przez pozostającego w spoczynku obserwatora. Jednak gdy dokładniej przyjrzymy się temu, jak mierzony jest czas, zrozumiemy, że jego upływ zależy od względnego ruchu obserwatora i mierzonego zdarzenia.



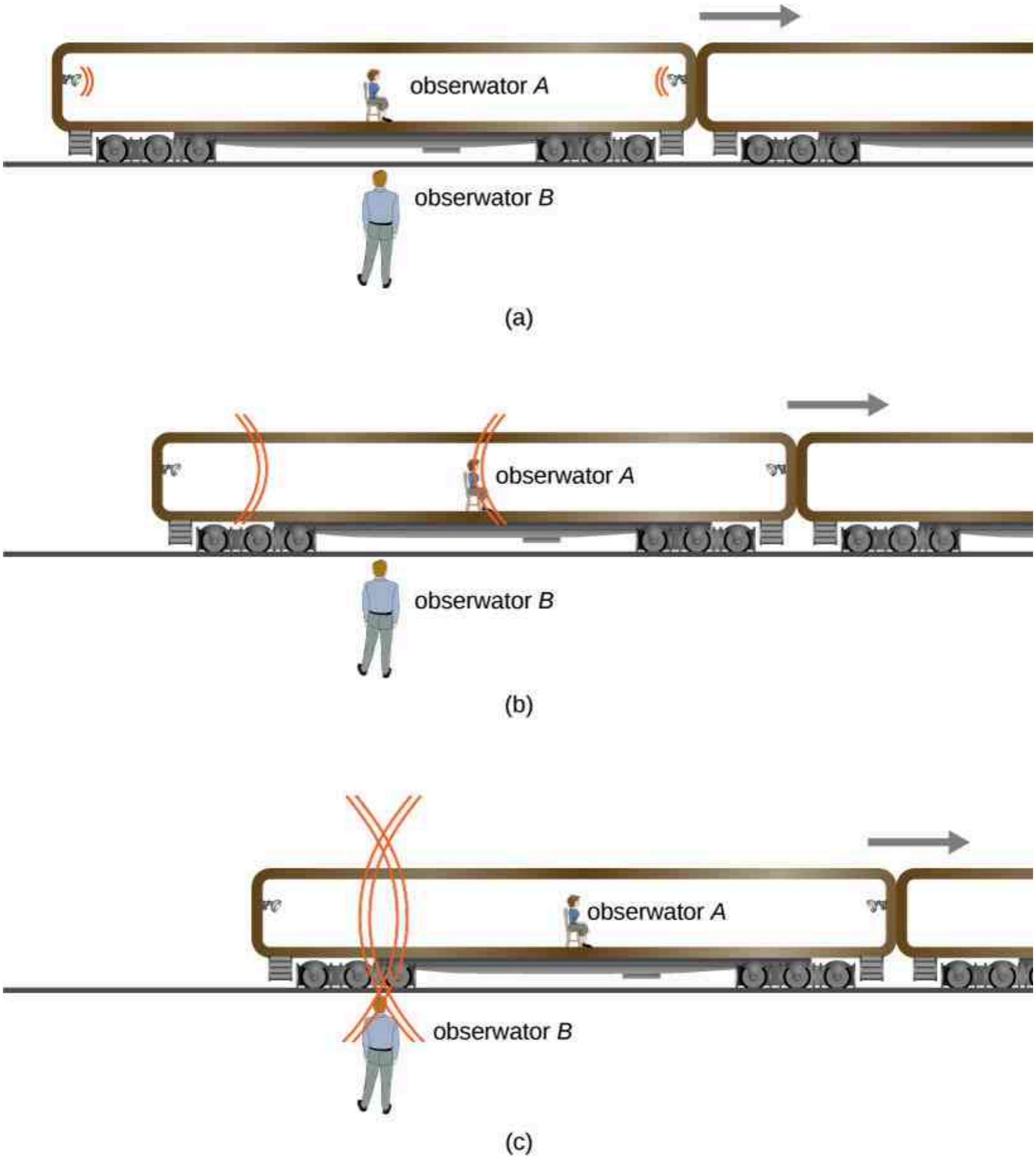
Rysunek 5.2 Czas pokonania jednego okrążenia jest taki sam dla wszystkich obserwatorów, ale w przypadku prędkości relatywistycznych upływ czasu zależy od ruchu obserwatora względem miejsca zdarzenia. Źródło: „Jason Edward Scott Bain”/Flickr

Rozważmy, w jaki sposób mierzony jest upływ czasu. Jeżeli zdecydujemy się na użycie stopera, skąd będziemy wiedzieć, kiedy dokładnie należy go włączyć i wyłączyć? Jedną z metod jest obserwacja światła związanego ze zdarzeniem. Najprostszym przykładem jest zaobserwowanie zmiany światła docierającego z sygnalizacji świetlnej, np. z zielonego na czerwone w trakcie jazdy samochodem i spowodowane tym naciśnięcie pedału hamulca. Zbieżność w czasie jest jeszcze lepsza, gdy wykluczymy czynnik ludzki oraz inne czynniki opóźniające i skorzystamy z elektronicznego detektora.

Teraz załóżmy, że dwóch obserwatorów używa stopera, żeby zmierzyć długość interwałów czasowych pomiędzy kolejnymi błyskami światła, którego źródła znajdują się w pewnej odległości od siebie (Rysunek 5.3). Obserwator A siedzi pośrodku wagonu kolejowego, na którego przeciwległych ścianach zamocowano dwie lampy błyskowe w taki sposób, że znajdują się one w równej odległości od obserwatora. Impuls świetlny emitowany jest równocześnie z obu lamp i porusza się w kierunku obserwatora A – sytuacja ta przedstawiona jest w części (a) omawianej ilustracji. Wagon porusza się z dużą prędkością w kierunku wyznaczonym przez wektor prędkości widoczny na rysunku. Stojący na peronie obserwator B widzi przejeżdżający wagon i obserwuje oba impulsy świetlne w tym samym czasie, jak pokazano w części (c). Obserwator B mierzy odległości od źródła każdego z impulsów, stwierdza, że są sobie równe, i z tego wnioskuje, że zostały wyemitowane w tym samym czasie.

W przypadku obserwatora A ze względu na ruch wagonu impulsy rejestrowane są w innym czasie (pierwszy będzie impuls z prawego źródła, czyli tego położonego bliżej pierwszego wagonu pociągu), co przedstawione jest w części (b). Podobnie jak drugi obserwator, A mierzy odległości od źródła światła w swoim układzie odniesienia, stwierdza, że są sobie równe, i na tej podstawie uznaje, że impulsy nie były równocześnie emitowane.

Dwaj obserwatorzy dochodzą do sprzecznych wniosków co do jednoczesności emisji obu impulsów. Oba układy odniesienia są słuszne, podobnie jak wyciągnięte wnioski. To, czy zdarzenia zachodzą w tym samym czasie, zależy od ruchu obserwatora względem źródła zdarzenia.



Rysunek 5.3 (a) Dwa impulsy świetlne emitowane w tym samym czasie względem obserwatora B. (b) Ze względu na ruch wagonu obserwatora A jako pierwszy obserwuje on impuls wyemitowany przez prawą lampę, z czego wnioskuje, że emisja nie była jednoczesna. (c) Impulsy docierają równocześnie do obserwatora B.

Za pomocą tego przykładu pokazaliśmy, że względna prędkość między obserwatorami wpływa na postrzeganie dwóch zdarzeń zachodzących w punktach oddalonych od siebie jako jednoczesnych lub nie.

Taki **eksperyment myślowy** (z niemieckiego **Gedankenexperiment**) pokazuje, jak teoria względności wymusza zmianę pozornie oczywistych wniosków. Słuszność eksperymentów myślowych może zostać udowodniona jedynie obserwacjami, a wnioski z teorii względności Einsteina zostały wielokrotnie potwierdzone różnymi doświadczeniami.

5.3 | Dylatacja czasu

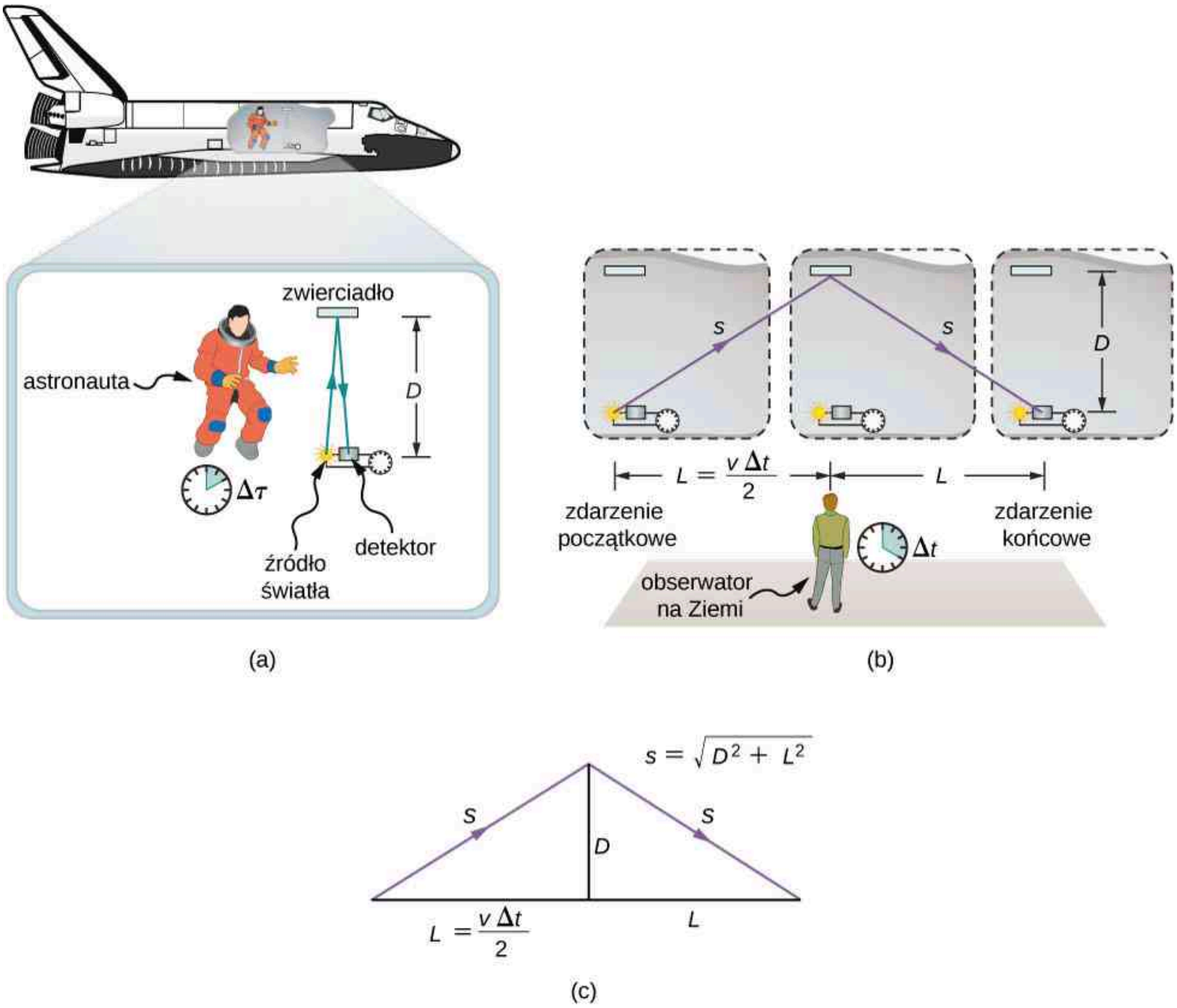
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- dlaczego mierzony upływ czasu może być inny w różnych układach odniesienia;
- w jaki sposób odróżnić czas własny od czasu innego obserwatora;
- opisywać znaczenie eksperymentu Rossiego-Halla;
- dlaczego paradoks bliźniąt nie jest sprzecznością;
- obliczać dylatację czasu, znając prędkość ciała w danym układzie.

Przeprowadzona w poprzednim podrozdziale analiza jednoczesności zdarzeń zwraca uwagę na pewien wniosek płynący z postulatów Einsteina: odcinki czasu mają różne wartości w różnych układach odniesienia. Dla przykładu załóżmy, że astronauta mierzy czas, jakiego potrzebuje impuls światła do pokonania odległości między zwierciadłem a źródłem, biegnąc tam i z powrotem (Rysunek 5.4), poruszając się prostopadle do ruchu promu (względem obserwatora na Ziemi). Jak ma się wartość zmierzona przez astronautę do czasu trwania zdarzenia dla obserwatora znajdującego się na powierzchni Ziemi?

Wyniki tego eksperymentu dostarczają ciekawych wniosków. Czas zajścia danego zdarzenia zależy od obserwatora. W przypadku pomiaru dokonanego przez astronautę (który znajduje się w środku promu kosmicznego, względem którego jest w spoczynku) wartość jest mniejsza niż ta zmierzona przez obserwatora znajdującego się na Ziemi, w stronę którego porusza się astronauta. Różnica ta wynika z różnicy dróg światła dla obu układów odniesienia. Jak widać na Rysunku 5.4, światło musi przebyć krótszą drogę w układzie astronauty niż w układzie obserwatora na Ziemi. Jako że światło ma stałą prędkość we wszystkich układach odniesienia, potrzebuje więcej czasu na pokonanie większej odległości względem obserwatora na Ziemi.



Rysunek 5.4 (a) Astronauta mierzy czas $\Delta\tau$ potrzebny światłu na przebycie odległości $2D$ w jego układzie odniesienia. (b) Naukowiec ESA (ang. **European Space Agency**) rejestruje dłuższą drogę światła $2s$ i dłuższy czas Δt. (c) Zależność między drogami D a s.

Dylatacja czasu

Dylatacja czasu (ang. **time dilation**) to wydłużenie badanego odcinka czasu związane z różnicą w pomiarze dokonywanym jednocześnie w dwóch różnych układach odniesienia, z których jeden porusza się względem drugiego.

Aby porównać wartości obydwu pomiarów czasu, możemy porównać drogi, które musi pokonać światło pokazane na Rysunku 5.4, a następnie przedstawić je w odniesieniu do czasu podróży (odpowiednio $\Delta\tau$ lub Δt) impulsu światła w odpowiadającym im układzie odniesienia. Otrzymane równanie może być rozwiązane dla Δt w funkcji $\Delta\tau$.

Długości D i L na Rysunku 5.4 są bokami trójkąta prostokątnego o przeciwprostokątnej s. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że

$$s^2 = D^2 + L^2.$$

Długości $2s$ i $2L$ są odpowiednio odległościami, które pokonują światło i prom kosmiczny w czasie Δt w układzie odniesienia ziemskiego obserwatora. Długość $2D$ to odległość, jaką przebywa światło w czasie $\Delta\tau$ w układzie astronauty. To daje nam trzy równania

$$2s = c\Delta t,\ \ 2L = v\Delta t,\ \ 2D = c\Delta\tau.$$

Zauważmy, że opisując prędkość światła jako c w obu układach odniesienia, wykorzystaliśmy drugi postulat Einsteina. Podstawiając te wartości do poprzedniego równania, wykorzystującego twierdzenie Pitagorasa, otrzymujemy

$$s^2 = D^2 + L^2,$$
$$\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2 = \left(c\frac{\Delta \tau}{2}\right)^2 + \left(v\frac{\Delta t}{2}\right)^2.$$

Następnie porządkujemy równanie

$$(c\Delta t)^2 - (v\Delta t)^2 = (c\Delta \tau)^2.$$

Ostatecznie, rozwiązując to równanie dla Δt w funkcji $\Delta \tau$, otrzymujemy

$$\Delta t = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - (v / c)^2}}, \tag{5.1}$$

co można również zapisać jako

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau, \tag{5.2}$$

gdzie γ to czynnik relatywistyczny (nazywany też **czynnikiem Lorentza** (ang. **Lorentz factor**)) wyrażany wzorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v / c)^2}},$$

przy czym v i c to odpowiednio prędkości poruszającego się obserwatora i światła.

Warto zauważyć asymetrię tych pomiarów. Tylko jeden z nich jest pomiarem czasu między dwoma zdarzeniami – emisją a powrotem impulsu światła – zachodzącymi w tym samym miejscu. Mowa oczywiście o pomiarze w układzie odniesienia astronauty. Pomiar w układzie odniesienia obserwatora na Ziemi obejmuje porównanie upływu czasu między dwoma zdarzeniami, które zachodzą w dwóch różnych położeniach. Czas między zdarzeniami następującymi w tym samym miejscu ma własną nazwę, pozwalającą na odróżnienie go od czasu mierzonego przez obserwatora na Ziemi, i w tym rozdziale oznaczany jest jako $\Delta \tau$.

Czas własny

Czas własny (ang. **proper time**) $\Delta \tau$ to czas mierzony w układzie, w którym zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu.

Zależność wiążąca czasy Δt i $\Delta \tau$ jest niezwykle istotna dla zrozumienia fizyki relatywistycznej. Przede wszystkim pokazuje ona fakt, że czas może biec inaczej w dwóch układach odniesienia w zależności od ich ruchu względem siebie. Chcąc zmierzyć najkrótszy możliwy czas między dwoma zdarzeniami (np. emisją i powrotem impulsu światła), musimy dokonać pomiaru w układzie inercjalnym, w którym oba te zdarzenia mają takie samo położenie, czyli w układzie spoczynkowym. Dla przykładu z astronautą oznacza to, że z punktu widzenia obserwatora na Ziemi czas na promie kosmicznym biegnie wolniej niż na Ziemi. Oglądając tę samą sytuację z perspektywy astronauty, zaobserwujemy przyspieszenie upływu czasu na Ziemi względem poruszającego się promu.

Ten efekt, choć brzmi jak wyjęty z opowiadania science-fiction, jest jak najbardziej rzeczywisty. Nie powodują go też błędy pomiarowe związane z niedokładnymi zegarami czy niepoprawnymi założeniami. Potwierdza to fakt, że każdy zegar poruszający się względem obserwatora (nawet biologiczny, jak tętno czy proces starzenia się) zwalnia w porównaniu z zegarem będącym w spoczynku względem tego obserwatora.

Warto jednak zauważyć, że jeśli prędkość względna jest dużo mniejsza od prędkości światła ($v \ll c$), to iloraz v^2 / c^2 jest bardzo mały, a czasy Δt i $\Delta \tau$ mają prawie tę samą wartość. Przy niskich prędkościach prawa fizyki oparte na teorii względności zbliżają się do teorii klasycznej. Dlatego też w życiu codziennym zazwyczaj nie zauważamy efektów relatywistycznych. Jednak dla prędkości bliskich prędkości światła wartość v^2 / c^2 zbliżona jest do 1, a więc $\sqrt{1 - v^2 / c^2}$ przyjmuje bardzo małe wartości i Δt może być dużo większe niż $\Delta \tau$.

Okres połowicznego rozpadu mionu

Równanie $\Delta t = \gamma \Delta \tau$ zostało wielokrotnie potwierdzone doświadczalnie. Eksperyment Rossiego-Halla związany jest z cząsteczkami promieniowania kosmicznego, które cały czas padają na Ziemię. Produktem zderzeń tych cząsteczek z jądrami atomów w górnych partiach atmosfery są nietrwałe cząstki nazywane **mionami** (ang. **muons**) o tym samym

ładunku co elektron, ale większej masie. Okres połowicznego rozpadu (czas, w którym połowa danego materiału uległa rozpadowi) mionu wynosi $1{,}52\,\mu s$, gdy jest mierzony przez obserwatora znajdującego się w spoczynku względem cząstki. Ten czas nazwiemy czasem własnym $\Delta\tau$. Jeżeli założenia Newtona na temat czasu byłyby prawdziwe, w tak krótkim okresie jedynie niewielka ilość mionów zdążyłaby dotrzeć na powierzchnię Ziemi i zostać zarejestrowana. Jednak miony mogą mieć różne prędkości, nie wykluczając też tych bliskich prędkości światła. Okres rozpadu mionu obserwowany z powierzchni Ziemi (Δt) zmienia się w zależności od jego prędkości zgodnie z równaniem $\Delta t = \gamma\Delta\tau$, gdzie $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$. Im szybciej porusza się mion, tym dłużej istnieje. Obserwując mion z powierzchni Ziemi, zmierzymy dłuższy czas życia tej cząstki, niż przewiduje jego czas połowicznego rozpadu, w rezultacie czego detektory rejestrują dużo większą część populacji mionów.

Zanim podejmiemy się rozwiązania pierwszego zagadnienia związanego z fizyką relatywistyczną, przedstawimy algorytm, który będziesz mógł wykorzystać w swoich obliczeniach.

Strategia rozwiązywania zadań: teoria względności

1. Sporządź listę informacji podanych w treści zagadnienia (określ dane). W szczególności szukaj informacji o prędkości relatywistycznej v (prędkości bliskiej prędkości światła).
2. Zdecyduj, co musi zostać wyliczone według treści zadania (określ wielkości szukane).
3. Przed wykonaniem obliczeń upewnij się, że dobrze zrozumiałeś założenia zadania (wyraź rozwiązanie w formie równania). Na przykład określ, który z obserwatorów zauważy efekty relatywistyczne (dylatację czasu lub skrócenie długości), zanim zaczniesz przekształcać równania czy podstawiać dane pod zmienne. Jeżeli przeanalizujesz wszystkie aspekty zagadnienia, kto i gdzie znajduje się w układzie spoczynkowym obserwowanego zdarzenia oraz kto mierzy czas własny, lepiej zrozumiesz zagadnienie, które próbujesz rozwiązać.
4. Zdecyduj, jakie obliczenia należy wykonać, aby określić wartości wszystkich szukanych (wykonaj obliczenia). W razie problemów zapoznaj się z podsumowaniem rozdziału, gdzie pokrótce opisane są najważniejsze pojęcia.

Wstrzymaj się z zaokrąglaniem wyników. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, do otrzymania pożądanego wyniku często niezbędne będą bardzo dokładne obliczenia (do wielu cyfr znaczących). Możesz zaokrąglić ostateczny wynik, ale nie podstawiaj zaokrąglonych wyników wcześniejszych działań do kolejnych równań. Upewnij się też, że twoja odpowiedź ma sens. W przypadku fizyki relatywistycznej niewiele jest przykładów z codziennego życia, z którymi mógłbyś porównać swój rezultat. Powinieneś uważać na oczywiste błędy, jeśli uzyskasz np. prędkość większą od c, czy efekty relatywistyczne zachodzące w złym kierunku – choćby skrócenie czasu tam, gdzie powinniśmy obserwować jego dylatację.

Przykład 5.1

Dylatacja czasu w pojeździe o dużej prędkości

Amerykański bezzałogowy statek powietrzny HTV-2 (ang. **Hypersonic Technology Vehicle 2**) może się poruszać lotem szybującym z prędkością $21\,000\,\text{km} / \text{h}$ $(5830\,\text{m} / \text{s})$. Jeżeli zegar elektroniczny znajdujący się na pokładzie HTV-2 zmierzy upływ dokładnie $1\,\text{s}$, to jaki czas przelotu zmierzą naukowcy w laboratorium na Ziemi?

Strategia rozwiązania

Zastosujemy wzór na dylatację czasu, aby porównać czas własny zdarzenia na pokładzie HTV-2 z odpowiadającym mu czasem zmierzonym w laboratorium.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $\Delta\tau = 1\,\text{s}$, $v = 5830\,\text{m} / \text{s}$.
- Określamy szukane: Δt.
- Wyrażamy rozwiązanie w formie równania

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - (v / c)^2}}.$$

- Wykonujemy obliczenia. Wykorzystamy wzór na γ do obliczenia Δt, znając $\Delta \tau$

$$\Delta t = \frac{1\,\mathrm{s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{5830\,\mathrm{m/s}}{3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}}\right)^2}} = 1{,}000\,000\,000\,189\,\mathrm{s}$$
$$= 1\,\mathrm{s} + 1{,}89 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}.$$

Znaczenie

Nawet hipersoniczna prędkość HTV-2 jest tylko $1 / 100\,000$ częścią prędkości światła. W przypadku HTV-2 efekty relatywistyczne będzie można pominąć, choć nie są one równe zero.

Przykład 5.2

Jakie prędkości są relatywistyczne?

Z jaką prędkością musi się przemieszczać pojazd, aby w czasie jednej sekundy mierzonej na zegarku jego pasażera pomiar ten różnił się od pomiaru obserwatora znajdującego się poza pojazdem o $1\,\%$?

Strategia rozwiązania

Wykorzystamy wzór na dylatację czasu, aby obliczyć stosunek v / c dla danej różnicy czasu.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $\Delta \tau / \Delta t = 1\,\mathrm{s} / 1{,}01\,\mathrm{s}$.
- Określamy szukane: v / c.
- Wyrażamy rozwiązanie w formie równania

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$
$$\frac{\Delta \tau}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$
$$\left(\frac{\Delta \tau}{\Delta t}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2},$$
$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - (\Delta \tau / \Delta t)^2}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{1\,\mathrm{s}}{1{,}01\,\mathrm{s}}\right)^2} = 0{,}14.$$

Znaczenie

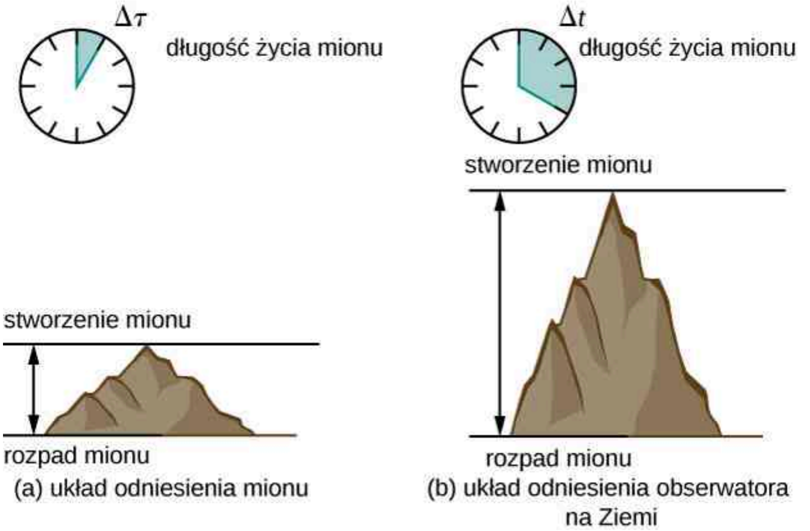
Wynik tego zadania pokazuje, że aby otrzymać znaczące efekty relatywistyczne, ciało musi poruszać się z prędkością równą około $10\,\%$ prędkości światła.

Przykład 5.3

Obliczanie Δt zdarzenia relatywistycznego

Załóżmy, że wiązka promieniowania kosmicznego zderza się z jądrem atomowym w górnej partii atmosfery

ziemskiej i produkuje mion o prędkości $v = 0{,}95c$. Mion porusza się ze stałą prędkością i rozpada się po $2{,}2\,\mu s$, mierzonych w układzie odniesienia mionu. Możemy to sobie wyobrazić jako zegar wewnętrzny mionu. Jak długi jest czas życia mionu mierzony przez obserwatora na Ziemi (Rysunek 5.5)?



Rysunek 5.5 Czas istnienia mionu mierzony przez obserwatora na powierzchni Ziemi jest dłuższy niż mierzony przez zegar związany z tym mionem.

Strategia rozwiązania

Zegar poruszający się razem z mionem mierzy czas własny procesu rozpadu mionu, tak więc czas dany w treści zadania to $\Delta\tau = 2{,}2\,\mu s$. Obserwator na Ziemi mierzy czas Δt dany równaniem $\Delta t = \gamma\Delta\tau$. Ponieważ prędkość mionu jest dana, możemy obliczyć czas zmierzony w układzie odniesienia obserwatora na Ziemi.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $v = 0{,}95c$, $\Delta\tau = 2{,}2\,\mu s$.
- Określamy szukane: Δt.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania. Wykorzystamy $\Delta t = \gamma\Delta\tau$, gdzie $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.
- Wykonujemy obliczenia. Wykorzystamy wzór na γ, aby wyznaczyć Δt, znając $\Delta\tau$

$$\Delta t = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{2{,}2\,\mu s}{\sqrt{1 - (0{,}95)^2}} = 7{,}05\,\mu s.$$

Znaczenie

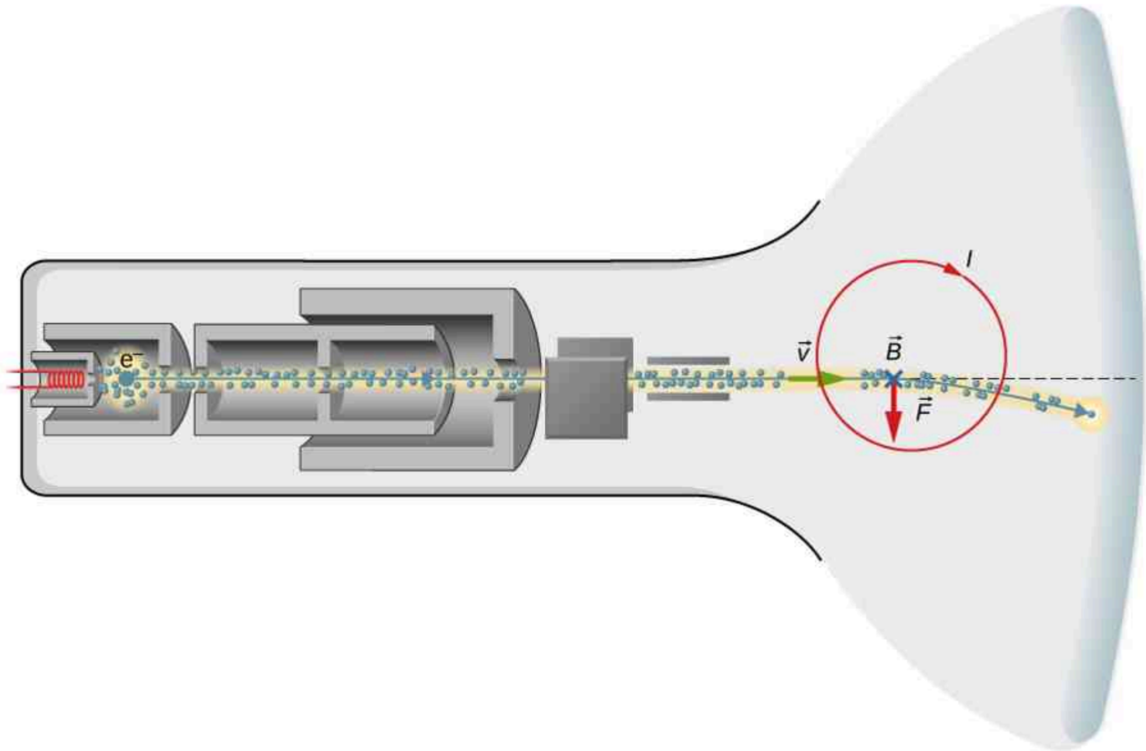
Ponieważ $\gamma = 3{,}2$ dla $95\,\%$ prędkości światła ($v = 0{,}95c$), efekty relatywistyczne będą znaczące. Z punktu widzenia teorii klasycznej, oba czasy powinny być takie same, ale w przypadku tak relatywistycznych prędkości czas Δt jest ponad $3{,}2$ razy dłuższy od czasu własnego mionu.

Przykład 5.4

„Relatywistyczna” telewizja

Telewizory starego typu – kineskopowe (Rysunek 5.6) – działają na zasadzie przyspieszania elektronów do prędkości relatywistycznych na krótkich odległościach i kontrolowania miejsca ich uderzenia we fluorescencyjny ekran za pomocą pola elektromagnetycznego. Załóżmy, że elektron porusza się z prędkością $6 \cdot 10^7\ \mathrm{m / s}$ na drodze $0{,}2\,\mathrm{m}$ (od początku wiązki elektronów do ekranu).

a. Jaki jest czas przelotu elektronu w układzie spoczynkowym telewizora?
b. Jaki jest czas przelotu w jego własnym układzie spoczynkowym?



Rysunek 5.6 Bieg wiązki elektronów w telewizorze kineskopowym (nazywanym też CRT, ang. **Cathode-Ray Tube**).

Strategia rozwiązania dla części (a)

Obliczamy czas przelotu, wykorzystując wzór $v\Delta t = d$. Chociaż prędkość jest relatywistyczna, obliczenia będziemy wykonywać tylko dla jednego układu odniesienia, a więc nie zauważymy efektów relatywistycznych.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $v = 6 \cdot 10^7 \text{ m / s}$, $d = 0{,}2 \text{ m}$.
- Określamy szukane: czas przelotu Δt.
- Wyrażamy rozwiązanie w formie równania

$$\Delta t = \frac{d}{v}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\Delta t = \frac{0{,}2 \text{ m}}{6 \cdot 10^7 \text{ m / s}} = 3{,}33 \cdot 10^{-9} \text{ s}.$$

Znaczenie

Tak jak się spodziewaliśmy, czas przelotu jest niezwykle krótki. Ponieważ ruch obserwowany jest w jednym układzie odniesienia, nie bierzemy pod uwagę efektów relatywistycznych, nawet w przypadku prędkości bliskich c.

Strategia rozwiązania dla części (b)

W układzie odniesienia elektronu komora próżniowa telewizora się porusza, a elektron pozostaje w spo-

czynku. Katoda emitująca elektrony oddala się od elektronu, ekran porusza się w jego kierunku, gdy sam elektron pozostaje w spoczynku. W takim przypadku wykorzystujemy wzór na dylatację czasu, aby powiązać ze sobą czas własny elektronu w jego spoczynkowym układzie odniesienia i czas w układzie odniesienia telewizora.

Rozwiązanie

- Określamy dane, korzystając z podpunktu (a): $\Delta t = 3{,}33 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}$, $v = 6 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m} / \mathrm{s}$, $d = 0{,}2\,\mathrm{m}$.
- Określamy szukane: τ.
- Wyrażamy rozwiązanie w formie równania

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau = \frac{\Delta \tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\Delta \tau = 3{,}33 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{6 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m} / \mathrm{s}}{3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m} / \mathrm{s}}\right)^2}$$

$$= 3{,}26 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{s}.$$

Znaczenie

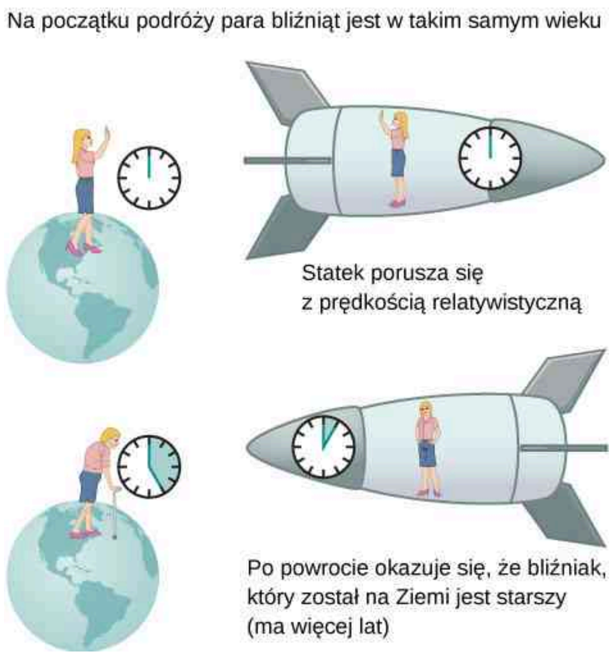
Czas przelotu jest krótszy w układzie odniesienia elektronu. Ponieważ rozwiązanie tego zagadnienia wymaga obliczenia czasu zajścia tego samego zdarzenia w dwóch różnych układach odniesienia, musimy wziąć pod uwagę efekty relatywistyczne. Jeżeli chcielibyśmy obliczyć czas przelotu elektronu w jego układzie spoczynkowym, dzieląc odległość d przez prędkość v, nasz wynik odbiegałby od poprawnego z powodu pominięcia efektów relatywistycznych.

5.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Ile wynosi γ, gdy $v = 0{,}65c$?

Paradoks bliźniąt

Ciekawą konsekwencją dylatacji czasu jest przypadek bliźniąt, z których jedno żyje na Ziemi, a drugie zostaje wysłane w przestrzeń kosmiczną na statku osiągającym bardzo duże prędkości. Bliźniak astronauta powinien w takim przypadku starzeć się wolniej od swojego brata czy siostry na Ziemi. Zagadnienie to jest nazywane **paradoksem bliźniąt** (ang. **twin paradox**). Wyobraźmy sobie sytuację przedstawioną na Rysunku 5.7: astronautka porusza się z prędkością odpowiadającą $\gamma = 30$. Okres dwóch lat w układzie odniesienia związanym z astronautką odpowiada okresowi 60 lat na Ziemi. Załóżmy, że podróżując z taką prędkością, astronautka przez rok odkrywa sąsiednie układy planetarne, a następnie wraca opowiedzieć, co widziała. Astronautka, która wyruszyła w kosmos w wieku 40 lat, po powrocie będzie miała 42 lata. Jej siostra, podobnie jak wszystko na Ziemi, zestarzała się o 60 lat i jeśli nadal żyje, będzie miała 100 lat w momencie powrotu astronautki.

Sytuacja wygląda odmiennie z perspektywy astronautki. Ponieważ ruch jest względny, statek kosmiczny pozostaje w spoczynku względem układu odniesienia związanego z astronautką, a Ziemia się przemieszcza. Analogiczną sytuację zaobserwuje pasażer podczas lotu samolotem. Spoglądając przez okno na statku, astronautka zauważyłaby spowolnienie czasu na Ziemi o czynnik $\gamma = 30$. Względem statku siostra, która została na Ziemi, zestarzałaby się jedynie o $2 / 30$, czyli $0{,}07$ roku w trakcie dwuletniej podróży astronautki.



Rysunek 5.7 Paradoks bliźniąt to eksperyment myślowy, którego sprzeczność tkwi w różnym tempie starzenia się rodzeństwa, z którego jedno odbywa podróż kosmiczną z prędkością zbliżoną do prędkości światła.

W tej historii wnioski obu bliźniąt są sprzeczne – jeden wyklucza drugi. Ta sprzeczność jest istotą paradoksu bliźniąt. Jednak jak w przypadku paradoksów, sprzeczność ta jest wynikiem fałszywych założeń. Ruch astronautki nie jest tak prosty, jak przedstawiliśmy go na początku podrozdziału, i znacznie różni się od ruchu jej siostry na Ziemi. Astronautka przyspiesza, wyruszając w podróż, i zwalnia, zbliżając się do celu. Analogicznie – wracając na Ziemię, najpierw przyspiesza, a potem zwalnia, przygotowując się do lądowania. W takim przypadku statek kosmiczny nie jest układem inercjalnym, do którego moglibyśmy bezpośrednio zastosować wzór na dylatację czasu. Bliźniak znajdujący się na Ziemi nie doświadcza opisanych przyspieszeń i pozostaje w tym samym układzie inercjalnym. Jak widać, sytuacja nie jest symetryczna i nie można powiedzieć, że astronauta obserwuje te same efekty, co jego bliźniak. Ten brak symetrii będzie dobrze widoczny w dalszej części rozdziału, gdzie będziemy analizować drogę, którą poruszał się astronauta w czterowymiarowej czasoprzestrzeni.

W 1971 roku amerykańscy fizycy Joseph Hafele i Richard Keating potwierdzili istnienie efektu dylatacji czasu za pomocą niezwykle dokładnych zegarów atomowych, które mierzyły czas z dokładnością do nanosekund. Część z tych zegarów została umieszczona na pokładach samolotów okrążających Ziemię i ich pomiary porównano z wynikami grupy testowej pozostawionej na powierzchni Ziemi. Wyniki Hafelego i Keatinga zgadzały się z przewidywaniami teoretycznymi w granicach błędu statystycznego. Do obliczeń teoretycznych wykorzystano założenia szczególnej i ogólnej teorii względności z uwagi na udział grawitacji, przyspieszeń i ruchu względnego.

5.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.**

a. Cząstka porusza się z prędkością $1{,}9 \cdot 10^8 \text{ m / s}$ przez $2{,}1 \cdot 10^{-8}$ s, a następnie rozpada się (czas mierzony w układzie spoczynkowym cząstki). Jaki jest czas życia cząstki obserwowany z poziomu laboratorium?

b. Dwa statki kosmiczne A i B mijają się z prędkością względną $4 \cdot 10^7 \text{ m / s}$. Wewnętrzny zegar w statku A wyzwala emisję sygnału radiowego przez 1 s. Komputer pokładowy statku B bierze poprawkę na przemieszczający się sygnał, aby zmierzyć czas jego emisji. Jaki czas trwania emisji obliczy komputer pokładowy?

5.4 | Skrócenie długości w szczególnej teorii względności

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać, z czego wynika skrócenie długości;
- opisywać zależność między skróceniem długości a dylatacją czasu.

Długość wagonu pociągu na Rysunku 5.8 jest taka sama dla wszystkich pasażerów. Każdy z nich potwierdziłby jednoczesne położenie końców przedziału i wszyscy otrzymaliby takie same odległości między nimi. Jednak zdarzenia jednoczesne w jednym układzie inercjalnym nie muszą być jednoczesne w innym układzie inercjalnym. Jeżeli wspomniany pociąg mógłby się poruszać z prędkością zbliżoną do prędkości światła, dla obserwatora znajdującego się na peronie w trakcie przejazdu pociągu końce wagonu znajdowałyby się w innej odległości od siebie, niż zmierzyli ją pasażerowie. W przypadku prędkości relatywistycznych odległości mierzone przez dwóch różnych obserwatorów nie są jednakowe.



Rysunek 5.8 Pociąg FLIRT3. Długości wagonów zmierzonych przez pasażerów pociągu pędzącego z prędkością bliską prędkości światła są inne niż te, które widzą obserwatorzy stojący na peronie. Źródło: Szymon Sieciński/Flickr

Długość własna i czas własny w różnych układach inercjalnych

Dwójka obserwatorów, mijając się, zawsze zaobserwuje tę samą prędkość względną. Mimo że z powodu dylatacji czasu pasażer pociągu i obserwator znajdujący się na peronie inaczej postrzegają czas przejazdu pociągu, to prędkość względna, która określana jest jako iloraz drogi i czasu, jest taka sama w obu przypadkach. Jeżeli nasi obserwatorzy nie zgadzają się co do czasu przejazdu pociągu, ale podają tę samą prędkość względną, oznacza to, że nie mogą się też zgadzać co do mierzonej odległości.

Mion opisany w Przykładzie 5.3 dobrze opisuje zagadnienie z Rysunku 5.9. Dla obserwatora znajdującego się na Ziemi mion porusza się z prędkością $0{,}95c$ przez $7{,}05\,\mu\text{s}$ od momentu powstania do rozpadu. Tak więc mion pokonuje odległość względem Ziemi równą

$$L_0 = v\Delta t = 0{,}95 \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m} / \text{s} \cdot 7{,}05 \cdot 10^{-6}\,\text{s} = 2{,}01\,\text{km}\,.$$

W układzie odniesienia mionu czas jego życia wynosi 2,2 μs. W tym układzie Ziemia ma czas na przebycie jedynie

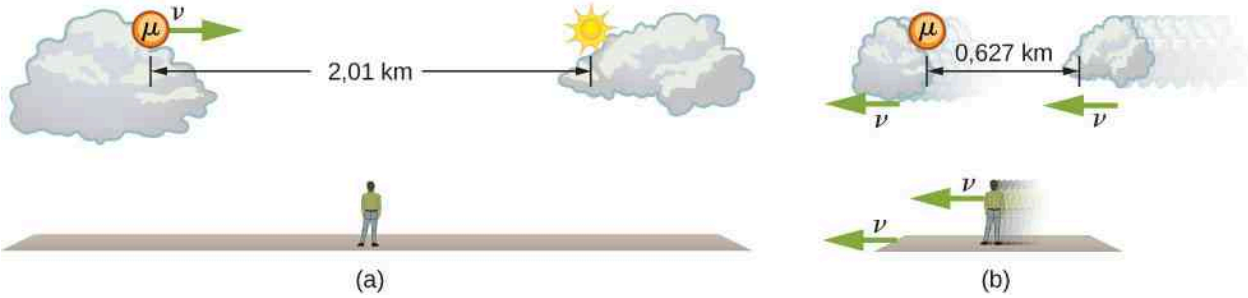
$$L_0 = v\Delta\tau = 0{,}95 \cdot 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\ /\ s} \cdot 2{,}2 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s} = 0{,}627\,\mathrm{km}.$$

Odległość pomiędzy tą samą parą zdarzeń (w tym przypadku produkcją mionu i jego rozpadem) zależy od tego, w którym układzie dokonywany jest pomiar i czy układ porusza się względem zdarzenia.

Długość własna

Długość własna (ang. **proper length**) L_0 to odległość między dwoma punktami mierzona przez obserwatora będącego w spoczynku względem obu tych punktów.

Obserwator znajdujący się na Ziemi dokonuje pomiaru długości własnej L_0, ponieważ punkty, w których mion jest produkowany i się rozpada, są nieruchome względem Ziemi. Z perspektywy mionu Ziemia, powietrze i chmury się przemieszczają, a więc odległość L, która zostaje zmierzona w układzie odniesienia związanym z mionem, nie jest długością własną tego zdarzenia.



Rysunek 5.9 (a) Obserwator znajdujący się na Ziemi rejestruje przemieszczenie się mionu równe odległości 2,01 km. (b) Ta sama droga ma długość 0,627 km, gdy jest obserwowana z układu odniesienia mionu. Otoczenie (Ziemia, powietrze i chmury) porusza się względem mionu i ulega skróceniu w kierunku przemieszczenia.

Skrócenie długości

Aby powiązać ze sobą odległości mierzone przez różnych obserwatorów, przyjrzyjmy się prędkości względnej mionu z perspektywy obserwatora na Ziemi. Jest ona dana wzorem

$$v = \frac{L_0}{\Delta t}.$$

Ta sama prędkość odnotowana z perspektywy przemieszczającego się mionu wynosi

$$v = \frac{L}{\Delta\tau}.$$

Obie te prędkości muszą być sobie równe, a więc

$$v = \frac{L_0}{\Delta t} = \frac{L}{\Delta\tau}.$$

Z Równania 5.1 i Równania 5.2 wiemy, że $\Delta t = \gamma\Delta\tau$. Podstawiając to wyrażenie do poprzedniego równania, otrzymamy

$$L = \frac{L_0}{\gamma}. \tag{5.3}$$

Wprowadzając do wzoru wyrażenie na γ, otrzymamy zależność wiążącą ze sobą odległości mierzone przez różnych obserwatorów.

Skrócenie długości

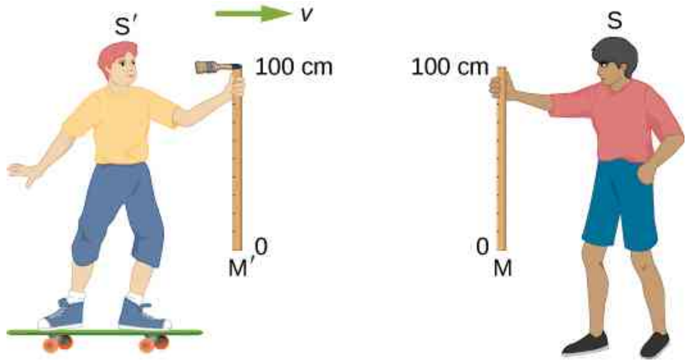
Skrócenie długości (ang. **length contraction**) to zmniejszenie wymiarów mierzonego ciała w stosunku do jego długości własnej, obserwowane w układzie odniesienia poruszającym się względem tego ciała

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}, \tag{5.4}$$

gdzie L_0 jest długością własną ciała, a L to długość zmierzona w układzie poruszającym się z prędkością v względem tego ciała.

Każde ciało poruszające się z pewną prędkością względną w stosunku do naszego układu odniesienia będzie miało zmierzoną długość L o mniejszej wartości w stosunku do długości L_0, obserwowanej, gdy ciało to jest w spoczynku. Wracając do przykładu mionu, dystans, jaki w trakcie jego istnienia pokonuje Ziemia względem cząstki, jest mniejszy niż obserwowany w laboratorium przez naukowca, dla którego miejsca powstania i rozpadu mionu są nieruchome. Chmury i inne ciała mijane przez mion w trakcie jego przemieszczania także ulegają skróceniu z perspektywy układu spoczynkowego cząstki.

Wiemy już, że długość może ulec skróceniu dla obserwatora poruszającego się w kierunku obserwowanego zdarzenia. Jednak co się dzieje z długościami mierzonymi w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu? Wyobraźmy sobie dwóch chłopców (obserwatorów) poruszających się wzdłuż osi x, którzy mijają się, mając w rękach miarki metrowe skierowane pionowo – wzdłuż osi y. Rysunek 5.10 przedstawia dwóch chłopców S i S' trzymających metrowe miarki M i M'; miarki te pozostają w spoczynku w układach odniesienia trzymających je obserwatorów. Do jednego końca miarki M' przyczepiono mały pędzel (jak na Rysunku 5.10). Załóżmy, że chłopiec S' porusza się z bardzo dużą prędkością v względem chłopca S, a ich miarki są skierowane prostopadle do kierunku wektora prędkości względnej. Miarki trzymane są w taki sposób, że w momencie mijania ich dolne końce (miejsca, gdzie miarki wskazują $0\,\text{cm}$) się pokrywają. Po minięciu kolegi S zauważa, że linia pozostawiona przez pędzel leży odrobinę poniżej wierzchołka miarki M. Wiedząc, że pędzel był przyczepiony do górnego końca miarki M', S dochodzi do wniosku, że miarka kolegi musi być mniejsza od jego własnej, a zatem krótsza niż $1\,\text{m}$.



Rysunek 5.10 Miarki metrowe M i M' pozostają w spoczynku w układach odniesienia odpowiednio obserwatorów S i S'. Gdy miarki się mijają, mały pędzel przytwierdzony do wierzchołka miarki (na wysokości dokładnie $100\,\text{cm}$) M' maluje linię na miarce M.

Gdy chłopcy zbliżają się do siebie, obserwator S' podobnie jak S widzi miarkę zbliżającą się do niego z prędkością względną równą v. Ponieważ sytuacja jest symetryczna, chłopiec S' powinien zauważyć efekty relatywistyczne analogiczne do odnotowanych przez chłopca S. Oznacza to, że w układzie odniesienia obserwatora S' to miarka M ulega skróceniu, a co za tym idzie pędzel, przyczepiony do miarki M' przechodzi nad nią, nie malując linii. Innymi słowy, w wyniku tego samego zdarzenia jeden z chłopców widziałby miarkę M z namalowaną linią, a drugi czystą.

Pierwszy postulat Einsteina wymaga, aby prawa fizyki obowiązywały we wszystkich układach inercjalnych, co oznacza, że chłopcy S i S' znajdujący się w takich układach odniesienia powinni dojść do zbieżnych wniosków. W obu układach miarka powinna być czysta lub pomalowana. Przy takich założeniach musimy przyjąć, że nasze pierwotne założenia były mylne i chłopcy nie obserwują skrócenia miarek będących w stosunku do nich w ruchu. W takim przypadku obaj zauważą namalowaną linię dokładnie na wierzchołku miarki M i ich wnioski będą spójne. Możemy więc wyciągnąć wniosek, że długości prostopadłe do kierunku ruchu muszą być takie same we wszystkich układach inercjalnych.

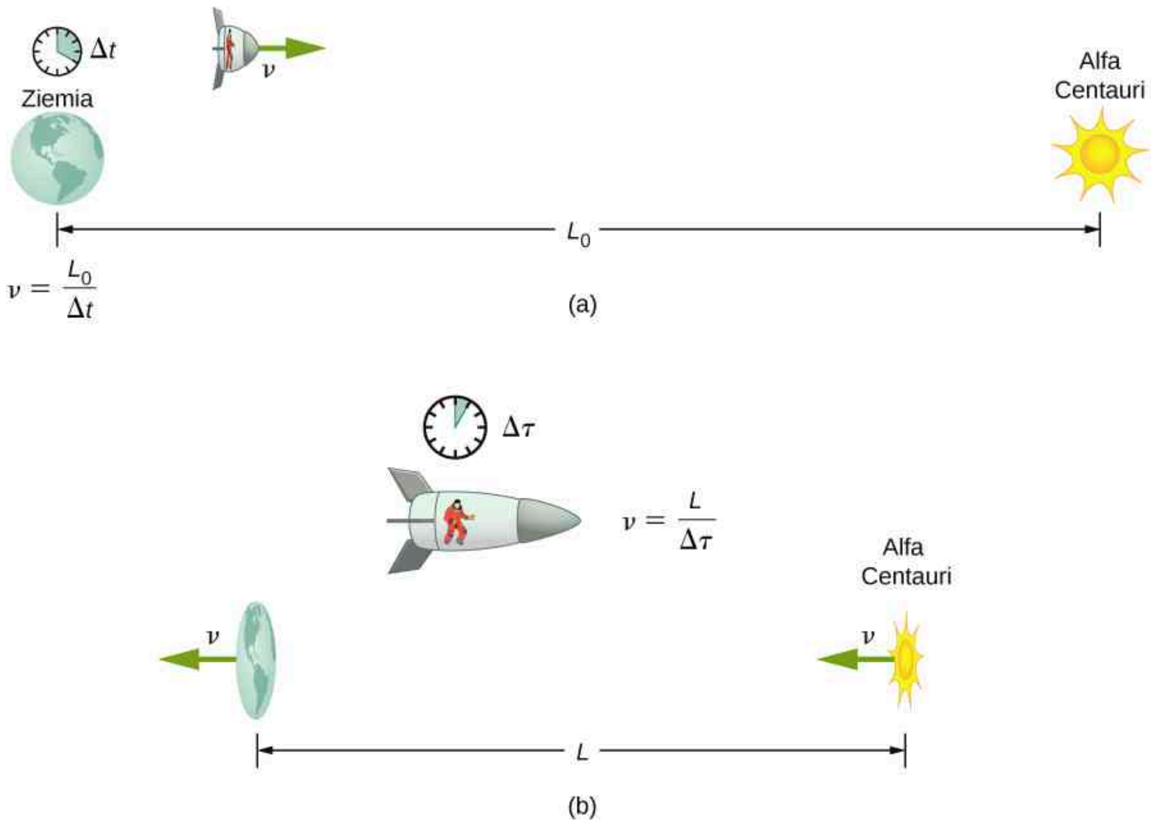
Przykład 5.5

Obliczanie skrócenia długości

Załóżmy, że astronauta porusza się z taką prędkością, że $\gamma = 30$.

a. Astronauta podróżuje z Ziemi do najbliższego układu planetarnego – Alfa Centauri, który jest odległy o $4{,}3$ roku świetlnego (mierzone przez obserwatora na Ziemi). Jak daleko są od siebie Alfa Centauri i Ziemia względem układu odniesienia związanego z astronautą?

b. Jaka jest prędkość astronauty względem Ziemi? Wynik podajmy w jednostkach c. Pomińmy ruch Ziemi wokół Słońca (Rysunek 5.11).



Rysunek 5.11 (a) Obserwator na Ziemi mierzy długość własną między Ziemią a Alfą Centauri. (b) Astronauta obserwuje skrócenie długości wszystkich obiektów poruszających się względem niego – Ziemia, Alfa Centauri i odległość między nimi ulegają „skurczeniu” w kierunku zgodnym z wektorem prędkości względnej. Dzięki temu może pokonać tę odległość w krótszym czasie (czasie własnym w jego układzie odniesienia) bez przekraczania prędkości światła.

Strategia rozwiązania

Na początku zauważmy, jak ciekawą jednostką jest rok świetlny – opisuje on, jaką odległość przebędzie światło w ciągu jednego roku. W podpunkcie (a) widzimy, że odległość między Alfą Centauri a Ziemią, równa $4{,}3$ roku świetlnego, to odległość własna L_0, ponieważ jest mierzona przez obserwatora znajdującego się na Ziemi, dla którego oba ciała niebieskie są (w przybliżeniu) nieruchome. Z punktu widzenia astronauty Ziemia i Alfa Centauri poruszają się ze stałą prędkością, a więc odległość między nimi ulega skróceniu. Oznaczymy ją jako L. W podpunkcie (b) dzięki znajomości wartości γ możemy obliczyć v, uzależniając je od c.

Rozwiązanie części (a)

- Określamy dane: $L_0 = 4{,}3\,\text{ly}$, $\gamma = 30$.
- Określamy szukane: L.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = \frac{4{,}3\,\text{ly}}{30} = 0{,}1433\,\text{ly}\,.$$

Rozwiązanie części (b)

- Określamy dane: $\gamma = 30$.
- Określamy szukane: v wyrażone w jednostkach c.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$L = \frac{L_0}{\gamma}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{30^2}} = 0{,}999\,44$$

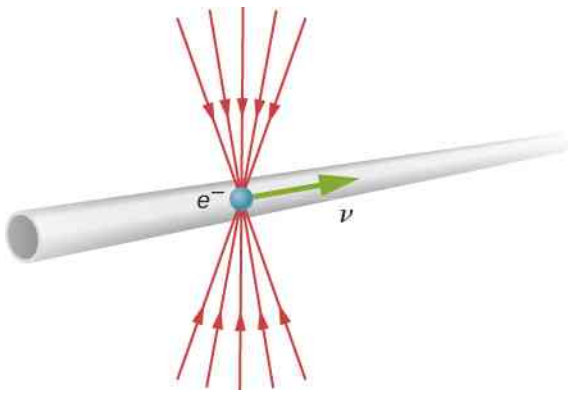
$$v = 0{,}999\,44c.$$

Znaczenie

Pamiętajmy, aby nie zaokrąglać wyników aż do końca obliczeń, inaczej nasze rozwiązania mogą być błędne. Ta zasada jest szczególnie istotna w zagadnieniach fizyki relatywistycznej, gdzie różnice mogą występować na odległym miejscu po przecinku. Przy $\gamma = 30$ i prędkości v bliskiej (ale nie równej) prędkości światła obserwowane efekty relatywistyczne powinny być wyraźne. Ponieważ odległość między ciałami niebieskimi mierzona przez astronautę jest dużo mniejsza, może on ją pokonać w krótszym czasie.

Podróżując z wystarczająco dużą prędkością, ludzie mogliby przebywać ogromne odległości (nawet tysiące czy miliony lat świetlnych), starzejąc się jedynie o kilka lat. Jednak decyzja o takiej podróży byłaby równoznaczna z pożegnaniem świata takiego, jaki znali. Nawet gdyby ktoś zdecydował się na powrót na Ziemię, byłaby to zupełnie inna planeta, starsza o wiele tysięcy lat. Oprócz tego istnieje też niezwykle istotna przeszkoda – osiągnięcie prędkości bliskich c wymagałoby nakładów energii większych, niż uważane w fizyce klasycznej za możliwe. Ten temat szerzej omówimy w dalszej części rozdziału.

Dlaczego nie zauważamy skrócenia długości na co dzień? Droga do sklepu spożywczego nie wydaje się zależeć od tego, czy się poruszamy, czy nie. Analizując równanie $L = L_0\sqrt{1 - v^2 / c^2}$, łatwo zauważyć, że przy małych prędkościach ($v \ll c$) długości L i L_0 są praktycznie takie same, co zgadza się z założeniami fizyki klasycznej. Choć niezauważalne w codziennym życiu, skrócenie długości jest powszechnym zjawiskiem na poziomie atomowym. Jako przykład rozważmy elektron poruszający się z prędkością bliską prędkości światła. Podczas ruchu elektronu linie pola elektrycznego ulegają skróceniu w kierunku przemieszczania się cząstki, z perspektywy zewnętrznego obserwatora (Rysunek 5.12). W momencie przelotu przez detektor (np. zwój drutu) jego pole oddziałuje z detektorem krócej, niż powinno. Efekt ten jest możliwy do zaobserwowania w akceleratorze cząstek, takim jak w **Centrum Liniowego Akceleratora Stanforda** (ang. **Stanford Linear Accelerator Center**, SLAC). Chociaż tunel akceleratora ma $3\,\text{km}$, to dla elektronu poruszającego się w tunelu SLAC zarówno akcelerator, jak i Ziemia przemieszczają się z prędkością względną v. Efekty relatywistyczne są tak znaczące, że powoduje to skrócenie drogi elektronu do $0{,}5\,\text{km}$. Jest to kolejne eksperymentalne potwierdzenie szczególnej teorii względności.



Rysunek 5.12 Linie pola elektrycznego elektronu poruszającego się z dużą prędkością są skrócone wzdłuż kierunku ruchu cząstki, przez co skróceniu ulega także sygnał po przejściu cząstki przez detektor.

5.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Cząstka przemieszcza się w atmosferze ziemskiej z prędkością $0{,}75c$. Według naukowca znajdującego się w laboratorium cząstka przemieszcza się o $2{,}5\,\text{km}$. Jakie jest przemieszczenie cząstki obserwowane z jej układu odniesienia?

5.5 | Transformacja Lorentza

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać transformację Galileusza w odniesieniu do położenia, czasu, prędkości i przyspieszeń mierzonych w różnych układach odniesienia;
- wyprowadzać transformację Lorentza, która jest uogólnieniem transformacji Galileusza i zawiera założenia szczególnej teorii względności;
- wyjaśniać transformację Lorentza i inne pojęcia związane z teorią względności w czterowymiarowej czasoprzestrzeni.

Do tej pory wykorzystywaliśmy postulaty Einsteina do opisu sposobu, w jaki obserwatorzy w różnych układach odniesienia mierzą czas lub odległości zdarzeń, i wynikających z tego różnic. Chcemy jednak fundamentalnego zrozumienia transformacji Lorentza i wynikającej z niej szczególnej teorii względności. Dlatego najpierw przyjrzymy się temu, w jaki sposób przekształcane są współrzędne czasu i przestrzeni między różnymi układami inercjalnymi w przypadku klasycznej fizyki Newtona i transformacji Galileusza. Następnie zbadamy, jak będą musiały się zmienić te przekształcenia, aby zgodzić się z postulatami Einsteina. Ostatnim krokiem będzie analiza transformacji Lorentza, będącej wynikiem uwzględnienia tych postulatów. Wprowadzimy przy tym czterowymiarową czasoprzestrzeń i diagramy. Dzięki temu zrozumiemy, że efekty relatywistyczne wynikają z natury czasoprzestrzeni, a nie są związane z fizyką fal elektromagnetycznych.

Transformacja Galileusza

Zdarzenie (ang. **event**) opisane jest za pomocą trzech współrzędnych przestrzennych i jednej współrzędnej czasowej (x, y, z, t) odpowiadających pewnemu układowi inercjalnemu S. Współrzędne te mogłyby np. opisywać położenie pewnej cząstki w czasie t, którą moglibyśmy następnie obserwować w różnych momentach i której ruch moglibyśmy określić. Załóżmy, że drugi układ odniesienia S' porusza się z prędkością v względem pierwszego. Dla uproszczenia przyjmijmy, że kierunek tej prędkości pokrywa się z osią x. Zależność współrzędnych przestrzennych w obu tych układach będzie wyglądała następująco

$$x = x' + vt, \;\; y = y', \;\; z = z'.$$

Zakładamy, że czas mierzony w obu układach jest taki sam, a więc

$$t = t'.$$

Te cztery równania znane są jako **transformacja Galileusza** (ang. **Galilean transformation**).

Możemy teraz otrzymać wzory na transformacje prędkości i przyspieszenia przez zróżniczkowanie tych równań po czasie. Prędkość cząstki w tym rozdziale będziemy oznaczać jako u, aby można ją było odróżnić od prędkości względnej układu odniesienia v. Zauważmy, że w transformacji Galileusza przyrost czasu wykorzystywany podczas różniczkowania w celu obliczenia prędkości cząstki jest taki sam w obu układach odniesienia, czyli $\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$. Różniczkując po czasie, otrzymujemy równania prędkości

$$u_x = u'_x + v, \; u_y = u'_y, \; u_z = u'_z \tag{5.5}$$

i następnie przyspieszenia

$$a_x = a'_x, \; a_y = a'_y, \; a_z = a'_z. \tag{5.6}$$

Prędkość w obu układach różni się o wartość prędkości względnej v. Obserwatorzy w obu układach odniesienia mierzą to samo przyspieszenie. Ponieważ transformacja nie wpływa na masę i odległość między poszczególnymi punktami, to siły $F = ma$ działające w tych układach pozostaną niezmienione, podobnie jak zachowane zostają druga i trzecia zasada mechaniki Newtona we wszystkich układach inercjalnych. Prawa mechaniki pozostają zgodne z pierwszym postulatem szczególnej teorii względności.

Transformacja Lorentza

Jednak transformacja Galileusza nie zgadza się w pełni z postulatami Einsteina. Według tych równań impuls świetlny poruszający się z prędkością c wzdłuż osi x w innym układzie współrzędnych miałby prędkość równą $c - v$. Impuls ten rozchodzi się sferycznie i ma promień $r = ct$ w czasie t w nieprimowanym układzie odniesienia, a promień $r' = ct'$ w czasie t' w układzie primowanym. Wyrażając te zależności we współrzędnych kartezjańskich, otrzymujemy

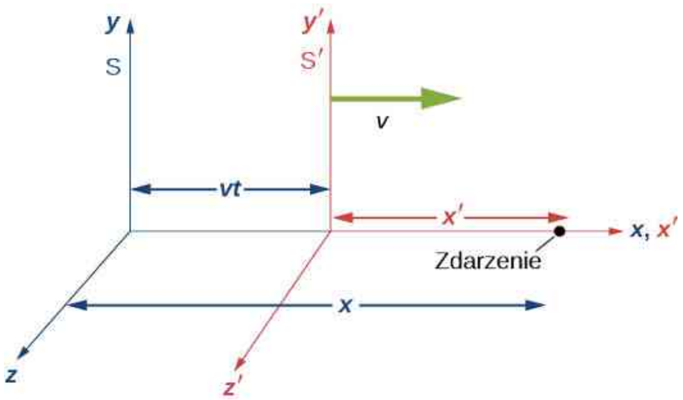
$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0,$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Możemy przyrównać lewe strony obu równań, ponieważ każda z nich wynosi zero. Jako że $y = y'$, a $z = z'$, otrzymujemy

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2. \tag{5.7}$$

Ta zależność nie może być spełniona dla niezerowej prędkości v, jeżeli założymy zgodnie z transformacją Galileusza, że $t = t'$ i $x = x' + vt'$.

Aby określić odpowiednie przekształcenia, zgodne z postulatami Einsteina, rozważmy dwa układy współrzędnych S i S' przedstawione na Rysunku 5.13. Najpierw załóżmy, że zachodzi zdarzenie o współrzędnych $(x, 0, 0, t)$ w układzie S i $(x', 0, 0, t')$ w układzie S', jak na rysunku.



Rysunek 5.13 Zachodzi zdarzenie o współrzędnych $(x, 0, 0, t)$ w układzie S i $(x', 0, 0, t')$ w układzie S'. Transformacja Lorentza wiąże zdarzenia w obu układach.

Przypuśćmy, że w chwili, gdy początki obu układów współrzędnych się zbiegają, lampa błyskowa emituje rozszerza-

jący się sferycznie impuls świetlny. W momencie t obserwator w układzie S zauważa, że początek układu S' znajduje się w $x = vt$. Z pomocą obserwatora w układzie S obserwatorowi S' udało się zmierzyć odległość od zdarzenia do punktu początkowego, równą $x'\sqrt{1 - v^2 / c^2}$. Odległość ta zgadza się z wyprowadzonymi wcześniej zależnościami na skrócenie długości. Zdarzenie w układzie S ma współrzędne

$$x = vt + x'\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

oraz

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Według postulatów Einsteina zależność między położeniem a czasem fali sferycznej

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0$$

musi mieć zastosowanie zarówno w przypadku współrzędnych primowanych, jak i nieprimowanych, co, jak zostało pokazane, prowadzi do Równania 5.7

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2.$$

Zatem równania wiążące czas i położenie zdarzeń widzianych w układzie S to

$$t = \frac{t' + vx' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$
$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$
$$y = y',$$
$$z = z'.$$

Ten zestaw równań wiążący czas i położenie w dwóch układach inercjalnych jest znany jako **transformacja Lorentza** (ang. **Lorentz transformation**). Ich nazwa pochodzi od **H. A. Lorentza (1853–1928)**, który zaproponował je jako pierwszy. Pełniły dla niego funkcję pomocniczą, bo sam wierzył w eter. Poprawny sens nadała im oczywiście szczególna teoria względności Einsteina.

Odwrotna transformacja przedstawia współrzędne układu S w zmiennych układu S'. Zamieniając miejscami primowane i nieprimowane współrzędne, otrzymujemy

$$t' = \frac{t - vx / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$
$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}},$$
$$y' = y,$$
$$z' = z.$$

Przykład 5.6

Wykorzystanie transformacji Lorentza dla czasu

Statek kosmiczny S leci w stronę Alfy Centauri, gdy inny statek S' mija go z prędkością względną $c / 2$. Kapitan statku S' wysyła sygnał radiowy trwający 1,2 s według zegara pokładowego. Skorzystajmy z transformacji Lorentza, aby obliczyć długość sygnału otrzymanego przez oficera łączności na statku S.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = 1{,}2\,\text{s}$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = 0\,\text{m}$.
- Określamy szukane: $\Delta t = t_2 - t_1$.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania. Sygnał zaczyna się w (x', t'_1) i kończy w (x', t'_2). Zauważmy, że współrzędna x' w obu zdarzeniach jest taka sama. Dzieje się tak, ponieważ w układzie S' zegar jest w spoczynku. Zapisujemy pierwsze przekształcenia według transformacji Lorentza, wykorzystując zależności: $\Delta t = t_2 - t_1$ i $\Delta x = x_2 - x_1$ i analogicznie dla zmiennych primowanych

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v \Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

Ponieważ położenie zegara w układzie S' jest stałe, to $\Delta x' = 0\,\text{m}$. W takim przypadku Δt możemy zapisać jako

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

- Wykonujemy obliczenia. Wiemy, że $\Delta t' = 1{,}2\,\text{s}$, otrzymamy zatem

$$\Delta t = \frac{1{,}2\,\text{s}}{\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 1{,}6\,\text{s}.$$

Przykład 5.7

Wykorzystanie transformacji Lorentza dla przestrzeni

Geodeta zmierzył długość ulicy i otrzymał wynik $L = 100\,\text{m}$. Przyjmujemy, że znajduje się on w ziemskim układzie odniesienia S. Użyjmy transformacji Lorentza do obliczenia długości tej ulicy zmierzonej przez astronautę znajdującego się na statku kosmicznym S' poruszającym się z prędkością $0{,}2c$. Zakładamy, że współrzędne x obu układów pokrywają się w chwili $t = 0\,\text{s}$.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $L = 100\,\text{m}$, $v = 0{,}2c$, $\Delta\tau = 0\,\text{s}$.
- Określamy szukane: L'.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania. Geodeta w układzie odniesienia S zmierzył oba końce ulicy (x_1, x_2) w tym samym czasie i stwierdził, że znajdują się w spoczynku, oddalone od siebie o $L = x_2 - x_1 = 100\,\text{m}$. Astronauta także mierzy położenie obu końców ulicy w tym samym czasie, we własnym układzie odniesienia. Aby określić zależność między odległościami zmierzonymi w układach S i S', musimy zapisać drugie z czterech równań transformacji Lorentza w następujący sposób

$$L' = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \frac{L}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

- Wykonujemy obliczenia

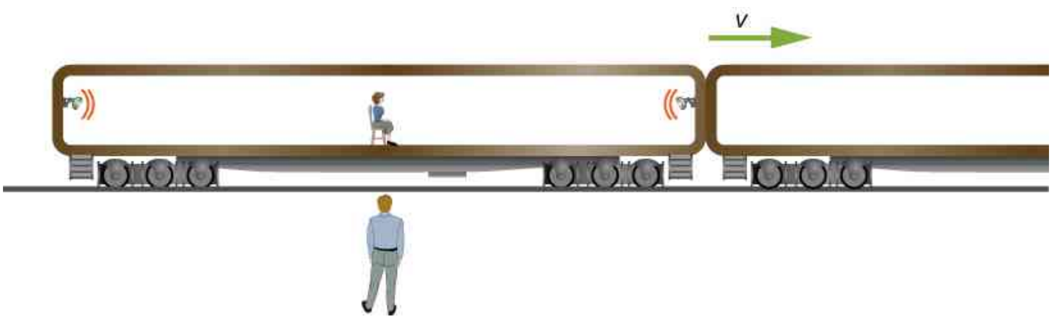
$$L' = 100\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 100\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{1 - (0{,}2)^2} = 98\,\mathrm{m}.$$

Zastosowanie transformacji Lorentza dało skrócenie długości ulicy.

Przykład 5.8

Transformacja Lorentza a jednoczesność zdarzeń

Obserwator stojący na peronie (Rysunek 5.14) widzi dwie lampy błyskowe zawieszone na końcach 26-metrowego wagonu, jednocześnie emitujące impuls świetlny. Zdarzenie zachodzi, gdy pociąg poruszający się z prędkością $c / 2$ mija obserwatora widzącego dokładnie środek wagonu z lampami. Obliczmy rozbieżność czasu między emisjami impulsów świetlnych widzianych przez pasażera jadącego tym pociągiem.



Rysunek 5.14 Obserwator na peronie stwierdza jednoczesną emisję impulsów światła z obu lamp błyskowych znajdujących się na końcach wagonu pociągu. Pasażer siedzący pośrodku tego wagonu obserwuje te same błyski, ale z innej perspektywy.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $\Delta t = 0\,\mathrm{s}$. Zauważmy, że rozdzielenie przestrzenne obu zdarzeń dotyczy odległości między dwiema lampami, a nie lampy i pasażera.
- Określamy szukane: $\Delta t' = t'_2 - t'_1$. Znowu różnica czasu występuje między błyskami lamp, a nie między momentami, w których sygnały te docierają do obserwatora.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$0\,\text{s} = \frac{\Delta t' + \frac{c}{2} \cdot \frac{26\,\text{m}}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$\Delta t' = -\frac{26\,\text{m / s}}{2c} = -\frac{26\,\text{m / s}}{2 \cdot 3 \cdot 10^8\,\text{m / s}},$$

$$\Delta t' = -4{,}33 \cdot 10^{-8}\,\text{s}.$$

Znaczenie

Znak wyniku pokazuje, że zdarzenie, któremu nadaliśmy indeks 2, czyli błysk prawej lampy, pojawia się wcześniej w układzie S', a więc $t_2 < t_1$.

Czasoprzestrzeń

Zjawiska relatywistyczne mogą być analizowane w czterowymiarowej **czasoprzestrzeni** (ang. **space-time**). Jeżeli spojrzymy na zjawiska fizyczne związane z efektami relatywistycznymi (jak paradoks bliźniąt, dylatacja czasu, skrócenie długości czy zależność jednoczesności zdarzeń od ruchu względnego układów) w taki sposób, to zauważymy, że są one naturalną konsekwencją istnienia czasoprzestrzeni, a nie skomplikowanych teorii fizycznych.

W trójwymiarowej przestrzeni położenie określają trzy współrzędne opisane w układzie kartezjańskim, a przemieszczenie z jednego punktu do drugiego dane jest wzorem

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

Odległość Δr między tymi punktami wynosi

$$\Delta r^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

Odległość Δr jest niezmienna w trakcie obrotu osi. Jeżeli nowy układ kartezjański zostanie obrócony względem układu początkowego, każdy punkt przestrzeni otrzyma nowe współrzędne względem nowych osi, ale odległość $\Delta r'$ dana wzorem

$$\Delta r'^2 = \left(\Delta x'\right)^2 + \left(\Delta y'\right)^2 + \left(\Delta z'\right)^2$$

będzie miała taką samą wartość jak Δr. Podobnie dzieje się w przypadku transformacji Lorentza w czasie i przestrzeni.

Określmy dwa oddzielne zdarzenia, każde dane zestawem współrzędnych x, y, z i ct w czterowymiarowym układzie kartezjańskim jako

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, c\Delta t) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1, c\,(t_2 - t_1)).$$

Zdefiniujmy też interwał czasoprzestrzenny Δs jako

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2.$$

Zauważmy, że dla impulsu świetlnego ten interwał wynosi zero w każdym układzie odniesienia. Jeżeli oba zdarzenia będą się charakteryzowały tą samą wartością ct w rozważanym układzie odniesienia, to Δs będzie odpowiadało odległości Δr między punktami w przestrzeni.

Ścieżka cząstki poruszającej się w czasoprzestrzeni zawiera kolejne zdarzenia (x, y, z, ct) określające jej położenie w kolejnych momentach czasu. Ta ścieżka bywa też nazywana **linią świata** (ang. **world line**) danej cząstki. Ścieżka cząstki, która pozostaje w spoczynku w przestrzeni, jest linią prostą, równoległą do osi czasu. Jeśli cząstka porusza się ze stałą prędkością v równoległą do osi x, jej linia świata będzie krzywą $x = vt$, zgodną ze znanym nam już wykresem zależności przemieszczenia od czasu. Jeżeli cząstka przyspiesza, ścieżka jest zakrzywiona. Kolejne wartości s dane są w formie różniczkowej jako

$$\text{d}s^2 = (\text{d}x)^2 + (\text{d}y)^2 + (\text{d}z)^2 - c^2(\text{d}t)^2.$$

Tak jak odległość Δr jest niezmienna podczas obrotu układu, tak interwał czasoprzestrzenny

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

jest niezmiennikiem transformacji Lorentza. Wynika to z postulatów Einsteina i można to wyprowadzić, podstawiając przekształcenia Lorentza do wzoru na interwał czasoprzestrzenny

$$\begin{aligned}\Delta s^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2 \\ &= \left(\frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)^2 + \left(\Delta y'\right)^2 + \left(\Delta z'\right)^2 - \left(c\frac{\Delta t' + v\Delta x' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}\right)^2 \\ &= \left(\Delta x'\right)^2 + \left(\Delta y'\right)^2 + \left(\Delta z'\right)^2 - \left(c\Delta t'\right)^2 \\ &= \Delta s'^2.\end{aligned}$$

Co więcej, transformacja Lorentza przekształca współrzędne zdarzenia w czasie i przestrzeni, podobnie jak zmieniają się współrzędne podczas obrotu w układzie trójwymiarowym

$$\begin{array}{cc}\text{Transformacja Lorentza} & \text{Obrót wokół osi } z \\ (\text{współrzędne } (x, t)): & (\text{współrzędne } (x, y)): \\ x' = \gamma x - \beta\gamma ct & x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ ct' = -\beta\gamma x + \gamma ct & y' = -x\sin\theta + y\cos\theta\end{array}$$

gdzie $\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}$, $\beta = v / c$.

Transformacje Lorentza mogą być postrzegane jako rozszerzenie obrotów przestrzennych na czasoprzestrzeń. Istnieją jednak rozbieżności między trójwymiarowym obrotem a transformacją Lorentza obejmującą także oś czasu, ze względu na różnice w sposobie pomiaru przemieszczenia Δr i Δs. Chociaż Δr i Δs są niezmiennikami, odpowiednio obrotów wokół osi i transformacji Lorentza, to w przypadku tego drugiego nie są zachowane wszystkie własności, takie jak prostopadłość osi do siebie nawzajem czy skala danej osi.

Zwróćmy uwagę, że Δs^2 może przyjmować wartości zarówno dodatnie, jak i ujemne, w zależności od współrzędnych badanych zdarzeń. W przypadku par zdarzeń, dla których wyrażenie to przyjmuje wartości ujemne, dobrze jest oznaczyć $\Delta\tau^2$ jako $-\Delta s^2$. Zauważmy, że w układzie odniesienia, w którym zachodzą dwa zdarzenia o tym samym położeniu, otrzymujemy $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0\,\mathrm{m}$, a z tego wynika, że

$$\Delta\tau^2 = -\Delta s^2 = (\Delta t)^2.$$

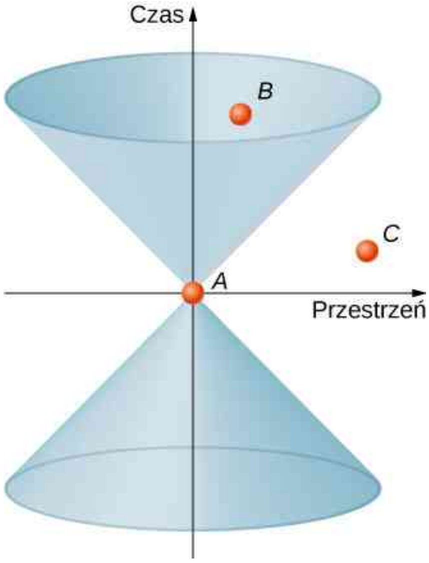
Odcinek czasu $\Delta\tau$ odpowiada więc Δt w układzie odniesienia, w którym dwa zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu. Nazwiemy go też wspomnianym wcześniej czasem własnym. Jako że w transformacjach Lorentza Δs jest niezmienne, także czas własny będzie niezmiennikiem. Obserwatorzy we wszystkich układach inercjalnych muszą się zgodzić co do wartości czasu własnego pomiędzy tymi samymi zdarzeniami.

5.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Udowodnij, że jeśli dla pewnego obserwatora badającego cząstkę poruszającą się z prędkością v upłynie czas $\mathrm{d}t$, to czas własny tej cząstki będzie wynosił $\mathrm{d}\tau = \gamma\,\mathrm{d}t$.

Stożek świetlny

Możemy poradzić sobie z przedstawieniem czterowymiarowej czasoprzestrzeni na kartce zeszytu przez wyobrażenie sobie trójwymiarowej przestrzeni jako poziomej płaszczyzny (rezygnujemy z trzeciego wymiaru) i pionowej osi czasu. Zaczynamy nasz wykres od pewnego zdarzenia w czasoprzestrzeni. Jeżeli cząstka uczestnicząca w tym zdarzeniu nie zmieniała położenia, to jej linia świata utworzy oś czasu. Każda płaszczyzna przechodząca przez oś czasu, równoległa do osi przestrzeni zawiera wszystkie możliwe zdarzenia zachodzące w danej chwili, widziane z układu spoczynkowego zdarzenia początkowego.

Możemy sobie wyobrazić stożek utworzony przez linie świata wszystkich wiązek światła przechodzących przez punkt początkowy A, co pokazano na Rysunku 5.15. Ściany **stożka świetlnego** (ang. **light cone**) (lub czasoprzestrzennego) są zgodnie z postulatami Einsteina pochylone pod kątem $45°$ do osi przestrzeni, jeśli czas mierzymy w jednostkach ct. Co więcej, taki stożek opisuje maksymalne rozchodzenie się prędkości światła. Każde zdarzenie w czasoprzestrzeni jest wierzchołkiem takiego stożka.



Rysunek 5.15 Stożek świetlny zawiera wszystkie linie świata, po jakich przemieszcza się światło, a których źródłem jest zdarzenie A – wierzchołek stożka.

Zastanówmy się nad możliwymi ścieżkami cząstki w czasoprzestrzeni. Aby dotrzeć od zdarzenia A do zdarzenia mającego miejsce poza stożkiem świetlnym (np. C), niezbędna jest prędkość przekraczająca c, co jest niemożliwe do osiągnięcia. Interwał czasoprzestrzenny związany z takim zdarzeniem nazywamy **interwałem przestrzennym** (ang. **space-like separation**) i opiszemy zależnością

$$\Delta s_{AC}^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 - (c\Delta t)^2 > 0.$$

Zdarzenie leżące w górnej części stożka, jak zdarzenie B, może zostać osiągnięte bez przekraczania prędkości światła w próżni i możemy je opisać jako

$$\Delta s_{AB}^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - (c\Delta t)^2 < 0.$$

Odcinek łączący takie zdarzenie ze zdarzeniem początkowym nazwiemy **interwałem czasowym** (ang. **time-like separation**). Zdarzenia zachodzące w stożku możemy też podzielić ze względu na położenie w jego górnej (dodatni fragment osi czasu) lub dolnej (ujemny fragment osi czasu) części i odpowiednio będą to zdarzenia dziejące się w przyszłości lub przeszłości względem zdarzenia A. Zdarzenia w czasoprzestrzeni poza stożkiem są niezwiązane w sposób przyczynowo-skutkowy ze zdarzeniem początkowym i nie mogą na nie wpływać.

Oczywiście w przypadku zdarzeń oddzielonych interwałem przestrzennym istnieje możliwość znalezienia odpowiedniej osi czasu, dla której oba te zdarzenia zachodzą równocześnie. Podobnie możemy znaleźć układ odniesienia, w którym zdarzenia oddzielone interwałem czasowym będą miały takie samo położenie. Jednak natura tego interwału pozostaje identyczna we wszystkich układach inercjalnych.

Paradoks bliźniąt widziany w czasoprzestrzeni

Omawiany wcześniej **paradoks bliźniąt** (ang. **twin paradox**) opisuje sytuację, w której bliźnięta zostają rozdzielone, a jedno z rodzeństwa zostaje astronautą i podróżuje z prędkością bliską c. Po powrocie na Ziemię okazuje się, że na skutek dylatacji czasu astronautka zestarzała się mniej niż jej siostra na Ziemi. Naturę tego paradoksu opisaliśmy dokładniej we wcześniejszej części rozdziału.

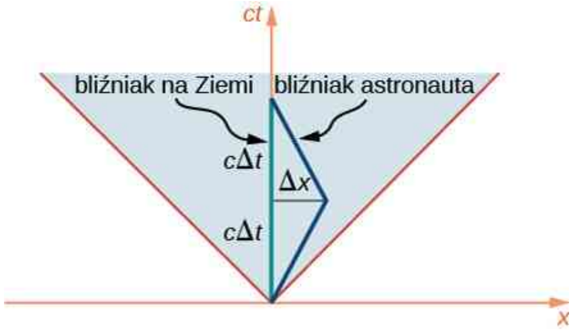
Podchodząc do tego zagadnienia od strony czasoprzestrzeni, punkt początkowy zaczepiamy na powierzchni Ziemi. Ścieżka bliźniaczki na Ziemi będzie się więc pokrywała z osią czasu. Natomiast ścieżka astronautki, która podróżuje do pobliskiego układu planetarnego, będzie bardziej skomplikowana – najpierw będzie odbiegać od osi czasu w trakcie podróży, a następnie wracać do punktu wyjścia. Jak widać na Rysunku 5.16, sytuacja bliźniąt nie jest wcale symetryczna, jak zakładaliśmy na początku. Ich ścieżki w czasoprzestrzeni mają zdecydowanie inną długość. W szczególności linia świata siostry pozostającej na Ziemi to $2c\Delta t$, co oznacza, że jej czas własny wynosi $2\Delta t$. Odległość od pobliskiego układu słonecznego wynosi $\Delta x = v\Delta t$. Czas własny w układzie astronautki wyrazimy więc jako $2\Delta\tau$, gdzie

$$c^2\Delta\tau^2 = -\Delta s^2 = (c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2.$$

Czas własny astronautki jest znacznie krótszy w porównaniu z czasem jej bliźniaczki, a ich stosunek wynosi

$$\frac{c\Delta\tau}{c\Delta t} = \sqrt{\frac{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2}{(c\Delta t)^2}} = \sqrt{\frac{(c\Delta t)^2 - (v\Delta t)^2}{(c\Delta t)^2}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma}.$$

Zgadza się to ze wzorem na dylatację czasu. Tak więc paradoks bliźniąt okazał się pozorny, a sytuacja bliźniaczek nie jest symetryczna, jeżeli spojrzymy na nią z perspektywy czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Jedynym zaskoczeniem może być krótszy czas podróży astronautki, mimo że to ona pokonała większą odległość. Dzieje się tak ze względu na wzajemną relację zmiennych $\Delta\tau$, Δs, Δx i Δt.



Rysunek 5.16 W przypadku paradoksu bliźniąt każde z nich porusza się po innej ścieżce w czasie i przestrzeni.

Transformacja Lorentza w czasoprzestrzeni

Wiemy już, że wyrażenie

$$\Delta s^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$$

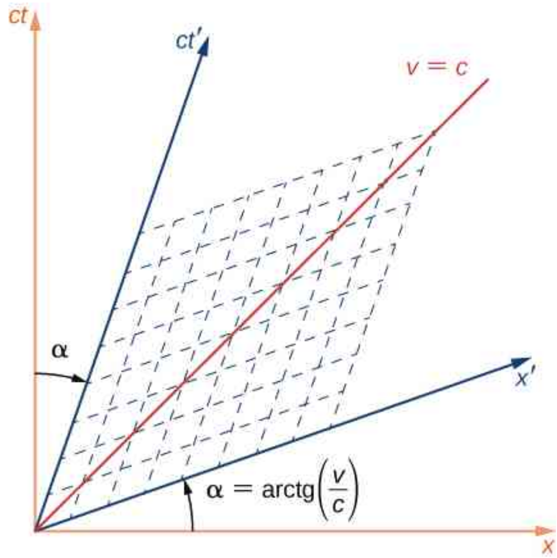
jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, natomiast sama transformacja odpowiada poniekąd obrotowi osi w czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Niech S i S' będą układami odniesienia poruszającymi się wzdłuż wspólnej osi x, a osie układu S' będą obrócone o kąt α, jak przedstawiono na Rysunku 5.17, gdzie

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v}{c} = \beta.$$

Transformacja ta różni się od obrotu w trzech wymiarach. Dwie osie czasoprzestrzeni obracają się symetrycznie do siebie, jak nożyce. Obroty osi czasu i osi przestrzennej mają ten sam kąt. Przerywane linie, równoległe do osi x' oraz ct', wskazują, jak powinny być odczytywane współrzędne w układzie primowanym. Może to się odbywać poprzez śledzenie tych linii. Skale obu osi zmieniają się w następujący sposób

$$ct' = ct\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}, \quad x' = x\sqrt{\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}}.$$

Linia oznaczona jako „$v = c$”, ustawiona pod kątem 45° do osi x, odpowiada brzegowi stożka świetlnego i nie ulega zmianie podczas transformacji Lorentza, zgodnie z drugim postulatem Einsteina. Linia „$v = c$” i stożek świetlny są takie same w obu układach: S i S'.

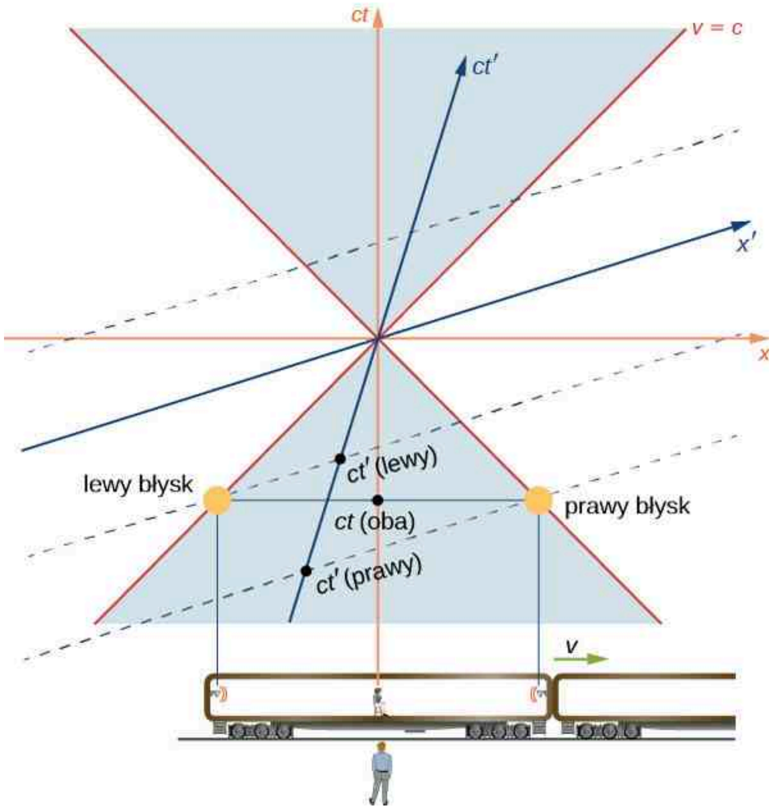


Rysunek 5.17 Wynikiem transformacji Lorentza są nowe osie x' i ct', obrócone do siebie niczym nożyce.

Jednoczesność

Jednoczesność (ang. **simultaneity**) zdarzeń rozdzielonych przestrzennie zależy od wybranego do opisu układu odniesienia, jak pokazano na Rysunku 5.17. Jeżeli dwa zdarzenia mają taką samą współrzędną czasową t w nieprimowanym układzie odniesienia, nie oznacza to, że mają te same wartości na osi ct, a przez to nie będą jednoczesne w układzie primowanym.

Jako przykład rozważmy pociąg poruszający się z prędkością bliską prędkości światła, w którym ponownie umieścimy dwie lampy błyskowe na przeciwległych ścianach jednego z wagonów. Niech lampy wyemitują impuls świetlny w tym samym czasie, tak jak widzi to obserwator znajdujący się na peronie. Wykres czasoprzestrzenny przedstawiający tę sytuację widoczny jest na Rysunku 5.18. Błyski lamp oznaczono na nim jako punkty leżące na stożku świetlnym w przeszłości i opisano: „lewy błysk” oraz „prawy błysk”. Impulsy poruszają się po brzegu stożka i docierają do obserwatora jednocześnie. Dochodzą one do obserwatora w punkcie początkowym stożka, co oznacza, że musiały zostać wyemitowane w tym samym czasie w przeszłości w nieprimowanym układzie odniesienia. Jednak jeżeli czas mierzono w układzie odniesienia pasażera pociągu (oś ct'), to zdarzenia nie były jednoczesne.



Rysunek 5.18 Poprawiony przykład z pociągiem. Emisja światła następuje w tym samym czasie *t* (oba błyski jednocześnie) mierzonym na osi czasu obserwatora na peronie, a w różnym na osi czasu pasażera.

Z wykresu przedstawionego na Rysunku 5.18 (nazywanego diagramem czasoprzestrzennym) wynika, że obserwatorzy znajdujący się w różnych układach inercjalnych korzystają z różnych osi czasu. Wnioski, do których dochodzą, są inne, ale równie prawdziwe. Po zwięzłej analizie diagramów czasoprzestrzennych jesteśmy w stanie twierdzić, że postrzeganie jednoczesności zdarzeń zależy od przyjętego przez nas układu odniesienia i jako takie wynika wprost z natury czasoprzestrzeni.

5.6 | Względność prędkości w szczególnej teorii względności

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyprowadzać zgodne ze szczególną teorią względności równania na przekształcenie prędkości z jednego układu odniesienia w drugi;
- stosować transformację prędkości do ciał poruszających się z prędkością relatywistyczną;
- porównywać wyniki otrzymane dzięki transformacji prędkości w ujęciu szczególnej teorii względności z przewidywanymi przez fizykę klasyczną.

Utrzymanie się w jednym miejscu w kajaku pośrodku rwącej rzeki nie jest prostym zadaniem. Prąd rzeki ciągnie ze sobą nasz kajak. Wiosłowanie pozwala przeciwstawić się nurtowi rzeki i jeżeli włożymy w nie dużo siły, to może udać nam się przemieścić w górę rzeki względem jej brzegu. Ruch naszego kajaka doskonale oddaje dodawanie wektorowe prędkości, stosowane w mechanice newtonowskiej. Prędkość wypadkowa kajaka jest sumą wektorową prędkości kajaka względem nurtu wody i wody względem brzegu rzeki. Jednak w fizyce relatywistycznej dodawanie prędkości wygląda inaczej.

Transformacja prędkości

Wyobraźmy sobie samochód poruszający się po prostej drodze, jak pokazano na Rysunku 5.19.



Rysunek 5.19 Zgodnie z wynikami doświadczeń i drugim postulatem szczególnej teorii względności światło opuszcza reflektor z prędkością c i z taką samą prędkością dociera do przechodnia.

Kierowca widzi światło reflektorów poruszające się z prędkością c w układzie odniesienia samochodu. Jeżeli zastosowalibyśmy w tej sytuacji transformację Galileusza, to światło wychodzące z reflektorów dotarłoby do przechodnia z prędkością $u = c + v$, co byłoby sprzeczne z postulatami Einsteina. Zarówno odległość przebyta przez światło, jak i czas przemieszczenia są różne w układach odniesienia samochodu i przechodnia. Co więcej, muszą się od siebie różnić w taki sposób, by światło miało jednakową prędkość w obu układach. Sposób przeliczania prędkości określa transformacja Lorentza.

Relatywistyczna transformacja prędkości

Załóżmy, że ciało P porusza się ze stałą prędkością $u = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right)$ w układzie odniesienia S'. Układ ten przemieszcza się z prędkością v wzdłuż osi x'. W czasie $\mathrm{d}t'$ cząstka przemieszcza się o odległość $\mathrm{d}x'$ wzdłuż osi x'. Stosując transformację Lorentza, możemy wyprowadzić odpowiednie wartości w układzie nieprimowanym

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}t &= \gamma\left(\mathrm{d}t' + v\mathrm{d}x' / c^2\right), \\
\mathrm{d}x &= \gamma\left(\mathrm{d}x' + v\mathrm{d}t'\right), \\
\mathrm{d}y &= \mathrm{d}y', \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}z'.
\end{aligned}$$

Składowe prędkości ciała w układzie nieprimowanym wyglądają więc następująco

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma\left(\mathrm{d}x' + v\,\mathrm{d}t'\right)}{\gamma\left(\mathrm{d}t' + v\,\mathrm{d}x' / c^2\right)} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}},$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\gamma\left(\mathrm{d}t' + v\,\mathrm{d}x' / c^2\right)} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'}{\gamma\left(\mathrm{d}t' + v\,\mathrm{d}x' / c^2\right)} = \frac{\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right)}.$$

W ten sposób otrzymaliśmy wzory na prędkości składowe

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x / c^2},\quad u_y = \frac{u'_y / \gamma}{1 + vu'_x / c^2},\quad u_z = \frac{u'_z / \gamma}{1 + vu'_x / c^2}.$$

Przy czym gdybyśmy chcieli otrzymać te same składowe, korzystając z klasycznego podejścia, czyli transformacji Galileusza (wówczas c dąży do $+\infty$), musielibyśmy jedynie dodać te prędkości wektorowo

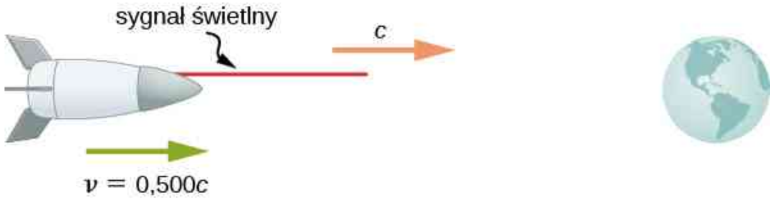
$$u_x = u'_x + v,\ u_y = u'_y,\ u_z = u'_z.$$

Jeżeli prędkość względna układów poruszających się względem siebie jest mała ($v \ll c$), efekty relatywistyczne są tak nieznaczne, że śmiało możemy przybliżyć wynik, stosując transformację Galileusza. Jednak gdy v zbliża się do prędkości światła, korzystanie z transformacji relatywistycznej (transformacji Lorentza) daje inne wyniki niż klasyczne podejście.

Przykład 5.9

Transformacja prędkości dla światła

Załóżmy, że statek kosmiczny porusza się prosto w stronę Ziemi z prędkością $c / 2$. Statek wysyła sygnał do ziemskiego laboratorium za pomocą wiązki laserowej, jak na Rysunku 5.20. Wiedząc, że widziane z perspektywy statku światło opuszcza go z prędkością c, obliczmy prędkość, z jaką dotrze do laboratorium.



Rysunek 5.20 Z jaką prędkością sygnał świetlny wysłany ze statku kosmicznego poruszającego się z prędkością $c / 2$ dotrze na Ziemię?

Strategia rozwiązania

Ponieważ statek i światło poruszają się z prędkościami relatywistycznymi, nie możemy skorzystać z klasycznego dodawania wektorów. Zamiast tego wykorzystamy relatywistyczne przekształcenia prędkości.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $v = c / 2$, $u' = c$.
- Określamy szukane: u.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$u = \frac{v + u'}{1 + vu' / c^2}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$u = \frac{v + u'}{1 + vu' / c^2} = \frac{\frac{c}{2} + c}{1 + \frac{c}{2} \cdot c / c^2}$$

$$= \frac{1{,}5c}{1{,}5c^2 / c^2} = c.$$

Znaczenie

Dodawanie prędkości w sposób relatywistyczny daje poprawny wynik. Światło opuszcza statek i dociera do laboratorium z taką samą prędkością c. Prędkość światła jest niezależna od względnego ruchu źródła i obserwatora bez względu na to, czy obserwator znajduje się na statku kosmicznym, czy w ziemskim laboratorium.

Dodawanie prędkości nie może dać wyniku większego niż prędkość światła, zakładając, że ani v, ani u' nie przekraczają c. Następny przykład pokazuje, że relatywistyczne dodawanie prędkości nie jest tak symetryczne, jak klasyczne dodawanie wektorów.

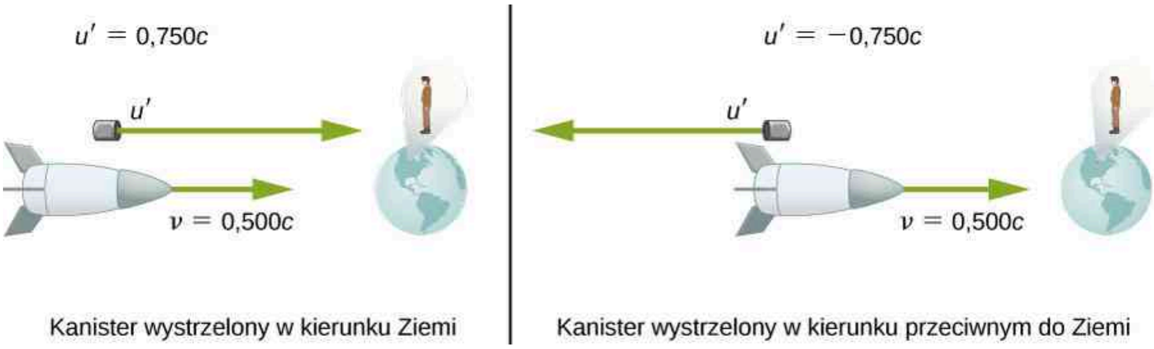
Przykład 5.10

Relatywistyczne dostarczanie przesyłek

Załóżmy, że statek kosmiczny z poprzedniego przykładu zbliża się do Ziemi z prędkością równą połowie prędkości światła i wystrzeliwuje kanister z prędkością $0{,}75c$ (Rysunek 5.21). Jaką prędkość kanistra zaobserwuje naukowiec znajdujący się w laboratorium na Ziemi, jeżeli kanister zostanie wystrzelony

a. w kierunku Ziemi;

b. w kierunku przeciwnym do Ziemi?



Rysunek 5.21 Kanister zostaje wystrzelony z prędkością $0{,}75c$ w kierunku Ziemi i przeciwnym.

Strategia rozwiązania

Podobnie jak w Przykładzie 5.9 nie możemy skorzystać z klasycznego dodawania wektorów, ale zastosujemy przekształcenie relatywistyczne.

Rozwiązanie części (a)

- Określamy dane: $v = 0{,}5c$, $u' = 0{,}75c$.
- Określamy szukane: u.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$u = \frac{v + u'}{1 + vu' / c^2}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\begin{aligned} u &= \frac{v + u'}{1 + vu' / c^2} \\ &= \frac{0{,}5c + 0{,}75c}{1 + 0{,}5c \cdot 0{,}75c / c^2} \\ &= 0{,}909c. \end{aligned}$$

Rozwiązanie części (b)

- Określamy dane: $v = 0{,}5c$, $u' = -0{,}75c$.
- Określamy szukane: u.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$u = \frac{v + u'}{1 + vu' / c^2}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\begin{aligned} u &= \frac{v + u'}{1 + vu' / c^2} \\ &= \frac{0{,}5c + (-0{,}75c)}{1 + 0{,}5c \cdot (-0{,}75c) / c^2} \\ &= -0{,}4c. \end{aligned}$$

Znaczenie

Znak minus oznacza, że prędkość jest skierowana w kierunku przeciwnym do Ziemi (w przeciwnym kierunku do v). Jednak prędkości relatywistyczne nie dodają się w tak prosty sposób, jak w przypadku fizyki klasycznej. W części (a) kanister faktycznie porusza się szybciej w stronę Ziemi, ale nie tak szybko, jak wynikałoby to z dodania obu wektorów prędkości, które dałoby wartość równą $1{,}25c$. W podpunkcie (b) kanister oddala się od Ziemi z prędkością $-0{,}4c$, czyli szybciej, niż przewidywałaby fizyka klasyczna ($-0{,}25c$). Co więcej, różnice w prędkościach nie są nawet symetryczne: w części (a) naukowiec zauważy kanister oddalający się od statku z prędkością $0{,}409c$, a w (b) różnica wyniesie $0{,}9c$.

5.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Odległości prostopadłe do kierunku ruchu względnego dwóch układów inercjalnych są takie same w obu układach. Dlaczego w takim razie składowe prędkości prostopadłe do osi x nie są takie same w tych układach?

5.7 | Relatywistyczny efekt Dopplera

Cel dydaktyczny

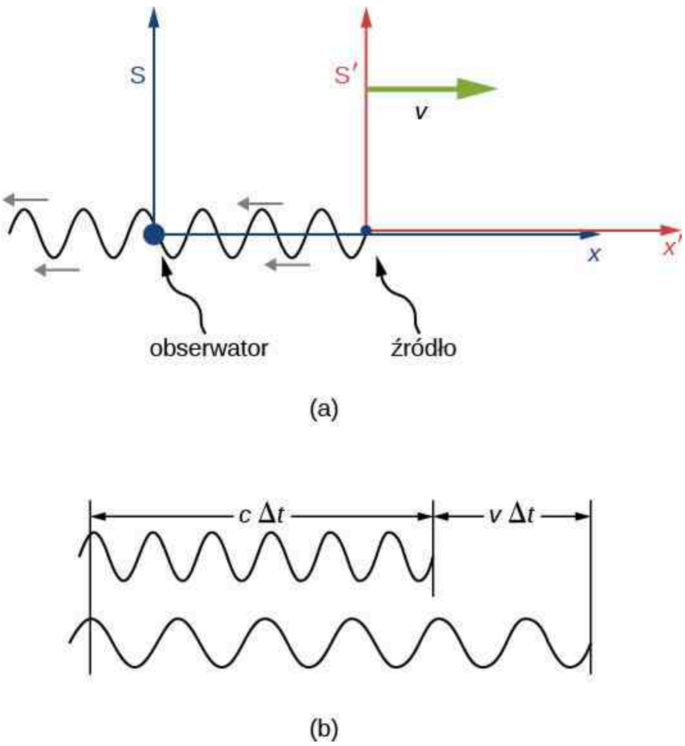
W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać pochodzenie przesunięcia częstotliwości i długości fali świetlnej, gdy obserwator i źródło przemieszczają się względem siebie;
- wyprowadzać wzór na relatywistyczny efekt Dopplera;
- stosować równania na przesunięcie dopplerowskie.

Jak powiedzieliśmy już w podrozdziale Fale dźwiękowe (https://cnx.org/content/m65841/latest/) , jeżeli źródło dźwięku oddala się od obserwatora, ten zarejestruje mniej okresów fali dźwiękowej, a co za tym idzie dźwięk o niższej częstotliwości. Za sprawą tego samego efektu obserwator usłyszy dźwięk o wyższej częstotliwości, jeżeli źródło dźwięku przemieszcza się w jego stronę. Powstałe w ten sposób **przesunięcie Dopplera** (ang. **Doppler shift**) można zaobserwować dla dowolnego typu fali. W przypadku fal dźwiękowych efekt ten jest zależny od tego, czy porusza się źródło, obserwator, czy powietrze, w którym rozchodzi się fala. Jako że światło nie potrzebuje ośrodka, w którym się rozchodzi, **relatywistyczny efekt Dopplera** (ang. **relativistic Doppler effect**) zależy jedynie od prędkości względnej źródła i obserwatora.

Relatywistyczny efekt Dopplera

Załóżmy, że obserwator w układzie odniesienia S widzi światło ze źródła (układ S') oddalającego się z prędkością v (Rysunek 5.22). Światło jest wysyłane impulsami. Okres fali to czas pomiędzy kolejnymi impulsami w tym samym miejscu, a jej długość to odległość między impulsami w tym samym czasie. Długość fali w każdym układzie jest równa iloczynowi jej okresu oraz prędkości światła. Czas mierzony w układzie obserwatora S pomiędzy kolejnymi impulsami fali jest większy o czynnik γ od okresu w układzie spoczynkowym źródła S'.



Rysunek 5.22 (a) Obserwator w układzie S mierzy czas, o wartości powiększonej o czynnik γ, pomiędzy impulsami światła pochodzącymi ze źródła związanego z poruszającym się układem S'. (b) Ze względu na ruch źródła odległość pomiędzy impulsami wynosi $c\Delta t + v\Delta t$.

Jednak z powodu przemieszczania się źródła względem układu S obserwator widzi światło zniekształcone dodatkowo o czynnik

$$\frac{c\Delta t_{\text{okresu}} + v\Delta t_{\text{okresu}}}{c\Delta t_{\text{okresu}}} = 1 + \frac{v}{c}, \tag{5.8}$$

jak przedstawiono na Rysunku 5.22. Sumaryczny wpływ obu efektów daje

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{źr}}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \lambda_{\text{źr}}\left(1 + \frac{v}{c}\right)\sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{v}{c}\right)\left(1 - \frac{v}{c}\right)}} = \lambda_{\text{źr}}\sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}, \tag{5.9}$$

gdzie $\lambda_{\text{źr}}$ jest długością fali światła mierzonej w układzie odniesienia źródła S', λ_{obs} to długość fali, którą rejestruje obserwator w układzie S, a v to prędkość względna układów S i S'.

Przesunięcie ku czerwieni i fioletowi

W zależności od wzajemnego ruchu źródła i obserwatora λ_{obs} przyjmie większą lub mniejszą wartość. Gdy źródło się oddala, doświadczamy wydłużenia fali obserwowanej, nazywanego też, ze względu na barwy odpowiadające długościom fali, przesunięciem ku czerwieni. Analogicznie, gdy źródło światła przemieszcza się w stronę obserwatora, długość fali ulega skróceniu, czyli następuje przesunięcie ku fioletowi. To, jak duże będzie to przesunięcie, opisuje zależność

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{źr}} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \tag{5.10}$$

Prędkość v będzie miała znak dodatni w miarę oddalania się źródła od obserwatora, a ujemny, gdy będzie się ono poruszać w jego kierunku. Tę zależność możemy też zapisać, wykorzystując częstotliwość źródła ($f_{\text{źr}}$) i obserwatora (f_{obs})

$$f_{\text{obs}} = f_{\text{źr}} \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}. \tag{5.11}$$

Należy zauważyć, że zmieniły się znaki w wyrażeniach pod pierwiastkiem.

Przykład 5.11

Obliczanie przesunięcia Dopplera

Załóżmy, że galaktyka oddala się od Ziemi z prędkością $0{,}825c$. Galaktyka emituje fale radiowe o długości $0{,}525\,\text{m}$. Jaką długość fali zaobserwujemy na Ziemi?

Strategia rozwiązania

Ponieważ galaktyka porusza się z prędkością relatywistyczną, musimy określić przesunięcie długości fali za pomocą wzorów opisujących relatywistyczny efekt Dopplera.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $u = 0{,}825c$, $\lambda_{\text{źr}} = 0{,}525\,\text{m}$.
- Określamy szukane: λ_{obs}.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{źr}} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}. \tag{5.12}$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{obs}} &= \lambda_{\text{źr}} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} \\ &= 0{,}525\,\text{m} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{0{,}825c}{c}}{1 - \frac{0{,}825c}{c}}} \\ &= 1{,}7\,\text{m}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Znaczenie

Ponieważ galaktyka oddala się od Ziemi, spodziewamy się, że długość fali emitowanej przesunie się w stronę dłuższych fal (przesunięcie ku czerwieni). Otrzymana wartość $1{,}7\,\mathrm{m}$ jest faktycznie większa od $\lambda_{\text{źr}}$. W rozdziale Fizyka cząstek elementarnych i kosmologia opisano, jak relatywistyczny efekt Dopplera wpłynął na dzisiejsze postrzeganie początku i ewolucji Wszechświata.

5.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóż, że sonda kosmiczna oddala się od Ziemi z prędkością $0{,}35c$. W pewnym momencie wysyła w stronę naszej planety wiadomość w formie sygnału radiowego, o częstotliwości $1{,}5\,\mathrm{GHz}$. Jaką częstotliwość zaobserwuje naukowiec w laboratorium, do którego zaadresowana była wiadomość?

Relatywistyczny efekt Dopplera znajduje zastosowanie zarówno w radarowej obserwacji burz, jak i w badaniach nad ruchem i odległością gwiazd względem Ziemi. Część z tych zastosowań opisaliśmy w przykładach na końcu rozdziału.

5.8 | Pęd relatywistyczny

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać pęd relatywistyczny w zależności od prędkości i masy danego ciała;
- pokazywać, w jaki sposób powiązane są relatywistyczny i klasyczny pęd;
- wykazywać, jak zachowanie relatywistycznego pędu uniemożliwia ciałom posiadającym masę osiągnięcie prędkości światła.

Pęd jest niezwykle ważnym pojęciem w fizyce, a zwłaszcza w mechanice klasycznej (druga zasada dynamiki Newtona). Pęd jest zachowany w każdym układzie, na który działa siła wypadkowa równa zero. Zasada zachowania pędu jest podstawowym narzędziem do opisu zderzeń (Rysunek 5.23). Większość naszej wiedzy na temat struktury cząstek elementarnych pochodzi z analizy zderzeń w różnego rodzaju akceleratorach cząstek, gdzie zachowanie relatywistycznego pędu jest istotne.



Rysunek 5.23 Pęd jest niezwykle ważny dla graczy w rugby (na zdjęciu zawodnicy reprezentacji Czech i Polski). Spośród dwóch zawodników, którzy biegną z tą samą prędkością i zderzają się z takim samym przeciwnikiem, większą siłę uderzenia będzie miał cięższy gracz, ponieważ jego pęd ma większą wartość. Efekt ten jest jeszcze bardziej widoczny dla cząstek poruszających się z prędkościami relatywistycznymi. Źródło: modyfikacja zdjęcia autorstwa Konrada Kostępskiego, Wikimedia Commons/Flickr: Rugby Polska–Czechy (25.10.2009)

Pierwszy postulat szczególnej teorii względności mówi, że prawa fizyki są jednakowe we wszystkich układach inercjalnych. Zastanówmy się, jak zmienia się zasada zachowania pędu w przypadku prędkości bliskich prędkości światła. Wiemy, że pęd ciała wyraża się wzorem $\vec{p} = m\mathrm{d}\vec{x} / \mathrm{d}t$, jednak pęd zachowany w jednym układzie odniesienia nie musi być zachowany w innym, gdy zastosujemy transformację Lorentza do przemiany prędkości. Poprawny wzór na pęd relatywistyczny danego ciała będzie klasycznym wyrażeniem na pęd, ale w odniesieniu do czasu własnego $\mathrm{d}\tau$, obserwowanego w układzie spoczynkowym tego ciała

$$\begin{aligned}\vec{p} &= m\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}\tau} = m\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\\ &= m\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\\ &= \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \gamma m\vec{u}.\end{aligned} \tag{5.14}$$

Pęd relatywistyczny

Pęd relatywistyczny $\vec{p}$ (ang. **relativistic momentum**) jest klasycznym momentem pędu pomnożonym przez relatywistyczny czynnik γ

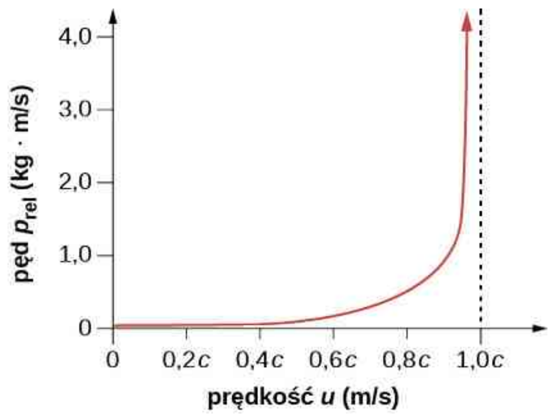
$$\vec{p} = \gamma m\vec{u}, \tag{5.15}$$

gdzie m jest **masą spoczynkową** (ang. **rest mass**) ciała, $\vec{u}$ to prędkość ciała względem obserwatora, a γ wyraża się wzorem

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}. \quad (5.16)$$

Warto zauważyć, że prędkość oznaczamy jako u w celu odróżnienia jej od prędkości względnej v w dwóch układach odniesienia. Czynnik relatywistyczny γ ma taką samą formę jak w poprzednich przypadkach, ale zastępujemy oznaczenie prędkości v przez u.

Przy tak zdefiniowanym pędzie pęd całkowity $p_{\text{cał}}$ jest zachowany, jeżeli na układ działa zewnętrzna siła wypadkowa wynosząca zero, jak w przypadku fizyki klasycznej. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach przy małych prędkościach ($u \ll c$) czynnik γ jest niemal równy 1, więc efekty relatywistyczne są tak małe, że z dużą dokładnością można stosować wzory znane z mechaniki klasycznej. Relatywistyczny pęd ma zatem wartość bardzo zbliżoną do klasycznego pędu. Wartość pędu rośnie wraz z prędkością i masą danego ciała, jednak ze względu na czynnik γ pęd relatywistyczny dąży do nieskończoności dla prędkości dążących do c (Rysunek 5.24). Jeżeli ciało posiadające masę osiągnęłoby prędkość światła, jego pęd byłby nieskończony.



Rysunek 5.24 Pęd relatywistyczny dąży do nieskończoności, gdy prędkość dąży do prędkości światła.

Relatywistyczne wyrażenie opisujące pęd $p = \gamma m u$ wykorzystywane było w starszych podręcznikach w twierdzeniu, że masa jest zależna od prędkości: $m_{\text{zm}} = \gamma m$. Należy jednak zauważyć, że jako m przyjmujemy masę ciała mierzoną przez obserwatora znajdującego się w układzie spoczynkowym tego ciała. Tak więc m jest masą spoczynkową, której wartość może być wyznaczona za pomocą teorii grawitacji. Gdy ciało porusza się względem obserwatora, jego masę można określić jedynie poprzez zderzenia lub inne metody wykorzystujące pęd. Ponieważ masa ciała w ruchu może być zmierzona jedynie poprzez pęd, do obliczeń wykorzystywana jest masa spoczynkowa. Zatem jeżeli w dalszej części rozdziału spotkasz się z terminem „masa”, załóż, że jest to masa spoczynkowa.

Relatywistyczny pęd jest zdefiniowany w taki sposób, że zasada zachowania pędu obowiązuje we wszystkich układach inercjalnych, w których zewnętrzna siła wypadkowa wynosi zero. Zostało to udowodnione eksperymentalnie.

5.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaki jest pęd elektronu poruszającego się z prędkością $0{,}985c$? Masa spoczynkowa elektronu wynosi $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

5.9 | Energia relatywistyczna

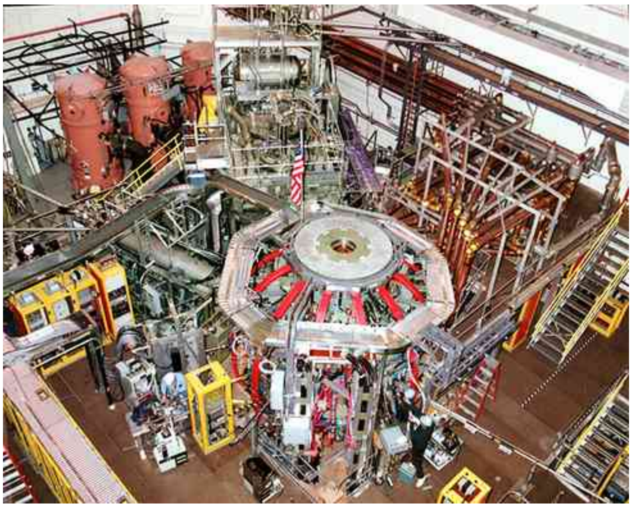
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać, jak zależność między energią i pracą prowadzi do wyrażenia na relatywistyczną energię kinetyczną danego ciała;
- pokazywać, jakie są podobieństwa i różnice między energią określoną w sposób relatywistyczny a określoną klasycznie i w jaki sposób energia nakłada ograniczenie na prędkość ciała o niezerowej masie;
- opisywać, w jaki sposób energia cząstki jest powiązana z jej masą i prędkością;
- opisywać równoważność masy i energii oraz jej praktyczne konsekwencje.

Tokamak (ros. **тороидальная камера с магнитными катушками**, czyt. Toroidalnaja Kamiera s Magnitnymi Katuszkami – toroidalna komora z cewką magnetyczną) przedstawiony na Rysunku 5.25 jest pewnym rodzajem eksperymentalnego reaktora syntezy termojądrowej, który może pozyskiwać energię z masy. Reaktory jądrowe są dowodem na zależność między energią a materią.

Zasada zachowania energii jest jedną z najważniejszych zasad w fizyce. Energia nie tylko posiada wiele ciekawych form, ale też może być zamieniana z jednej formy w drugą. Wiemy, że w podejściu klasycznym energia całkowita w danym układzie pozostaje niezmienna. W ujęciu relatywistycznym energia jest zachowana, ale równoważność masy i energii musi zostać wzięta pod uwagę, zwłaszcza w takich przypadkach jak procesy zachodzące w reaktorze jądrowym. Energia relatywistyczna jest określona w taki sposób, aby możliwe było jej zachowanie we wszystkich inercjalnych układach, podobnie jak w przypadku pędu. Konsekwencją tego jest powiązanie wielu podstawowych wielkości fizycznych, których to relacji nie opisuje fizyka klasyczna. Wszystkie te zależności zostały potwierdzone eksperymentalnie i są niezwykle istotne w dzisiejszej fizyce. Tak zmieniona definicja energii pozwoliła na wiele przełomowych dokonań w dziedzinie fizyki i umożliwiła istnienie nauki takiej, jaką znamy dziś.



Rysunek 5.25 NSTX (ang. **National Spherical Torus Experiment**) to reaktor termojądrowy, w którym izotopy wodoru poddaje się syntezie jądrowej, w wyniku której powstaje hel. W tym układzie stosunkowo mała masa zostaje zamieniona w dużą ilość energii.

Energia kinetyczna i ostateczne ograniczenie prędkości

Zgodnie z pierwszym postulatem szczególnej teorii względności prawa fizyki są zachowane we wszystkich inercjalnych układach. Einstein wykazał, że prawo zachowania energii obowiązuje także w przypadkach relatywistycznych, ale dla energii wyrażonej za pomocą masy i prędkości zgodnych ze szczególną teorią względności.

Rozważmy najpierw wyrażenie na relatywistyczną energię kinetyczną. Ponownie prędkość oznaczymy jako u, dla odróżnienia od prędkości v w dwóch układach odniesienia. W fizyce klasycznej energia kinetyczna jest związana z masą i prędkością za pomocą równania $E_k = 1 / 2 \cdot mu^2$. Wyrażenie na energię kinetyczną z perspektywy relatywistycznej możemy otrzymać z zależności między energią a pracą. Według tej zależności wypadkowa praca w

danym układzie zamienia się w energię kinetyczną. Klasyczne prawo Newtona $\vec{F} = \mathrm{d}\vec{p} \,/\, \mathrm{d}t$ musi pozostać prawdziwe także w teorii względności (ale z pędem relatywistycznym) ze względu na zasadę zachowania pędu oraz zasadę akcji i reakcji. Jeżeli wyrazimy siłę przyspieszającą cząstkę do pewnej prędkości ze stanu spoczynku jako $\vec{F} = m\,\mathrm{d}\left(\gamma \vec{u}\right) \Big/ \mathrm{d}t$, to praca wykonana nad tą cząstką powinna być równa jej energii kinetycznej. W przypadku ruchu jednowymiarowego zapiszemy to jako

$$\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= \int F\,\mathrm{d}x = \int m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\gamma u)\,\mathrm{d}x \\ &= m \int \frac{\mathrm{d}(\gamma u)}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= m \int u \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Całkując to wyrażenie przez części, otrzymujemy

$$\begin{aligned} E_\mathrm{k} &= \left.\frac{mu^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}\right|_0^u - m \int \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{mu^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} - m \int \frac{u}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{mu^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} - mc^2 \left.\sqrt{1 - u^2 / c^2}\right|_0^u \\ &= \frac{mu^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} - mc^2 \\ &= mc^2 \left[\frac{u^2 / c^2 + 1 - u^2 / c^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}\right] - mc^2, \\ E_\mathrm{k} &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} - mc^2. \end{aligned}$$

Wzór na energię można również otrzymać, analizując tylko zderzenia elastyczne z wykorzystaniem zasady zachowania w różnych układach odniesienia i porównując z wynikiem klasycznym dla małych prędkości.

Relatywistyczna energia kinetyczna

Relatywistyczna energia kinetyczna (ang. **relativistic kinetic energy**) każdego ciała o niezerowej masie wynosi

$$E_\mathrm{k\,rel} = (\gamma - 1)mc^2. \tag{5.17}$$

Gdy ciało znajduje się w spoczynku, czyli jego prędkość $u = 0\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$ i

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = 1,$$

także jego $E_\mathrm{k\,rel}$ jest równa zero, jak zakładaliśmy. Jednak wyrażenie na relatywistyczną energię kinetyczną nie przy-

pomina klasycznej zależności $E_\mathrm{k} = 1 / 2 \cdot mu^2$. Aby pokazać, że dla małych prędkości relatywistyczny wzór uprości się do klasycznego, wykorzystamy dwumian Newtona, by otrzymać przybliżenie dla $(1 + \varepsilon)^n$, prawdziwe dla małych ε

$$(1 + \varepsilon)^n = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\varepsilon^3 + \ldots \cong 1 + n\varepsilon.$$

Podstawiając $\varepsilon = -u^2 / c^2$ i $n = -1 / 2$, otrzymujemy, że γ dla niewielkich prędkości jest małe i spełnia równanie

$$\gamma = \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2}.$$

Dwumian Newtona pozwala na rozwinięcie danej wielkości w nieskończony szereg. W niektórych przypadkach, jak przy niewielkich prędkościach, większość wyrazów szeregu jest bardzo mała. Tak więc wyprowadzone wyrażenie może nie jest idealne, ale stanowi bardzo dokładne przybliżenie. W związku z tym dla małych prędkości

$$\gamma - 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2}.$$

Podstawienie tego wyrażenia do wzoru na relatywistyczną energię kinetyczną daje

$$E_{\mathrm{k\ rel}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{u^2}{c^2} mc^2 = \frac{1}{2} mu^2 = E_\mathrm{k},$$

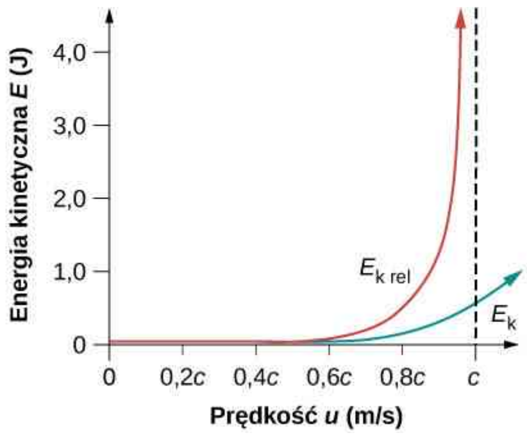
co dowodzi słuszności naszego założenia.

Dużo ciekawsze jest jednak to, co dzieje się z energią kinetyczną, gdy prędkość ciała zbliża się do prędkości światła. Wiemy, że γ dąży do nieskończoności dla u dążącego do c , więc E_k także dąży wtedy do nieskończoności (Rysunek 5.26). Wzrost energii relatywistycznej jest znacznie większy niż w przypadku energii klasycznej, gdy u zbliża się do c . Oznacza to, że do przyspieszenia ciała do takich prędkości potrzebna jest nieskończona ilość pracy.

Prędkość światła

Żadne ciało o niezerowej masie nie może osiągnąć **prędkości światła** (ang. **speed of light**).

Prędkość światła jest więc ostatecznym ograniczeniem prędkości cząsteczki o niezerowej masie. Wniosek ten jest zgodny z otrzymywanymi przez nas wynikami, z których wynika, że prędkości mniejsze od prędkości światła zawsze dodają się do wartości mniejszej od c . Zarówno relatywistyczna forma energii kinetycznej, jak i ograniczenie prędkości zostały wielokrotnie udowodnione doświadczalnie. Nieważne, jak dużo energii wkłada się w przyspieszenie danej masy, jej prędkość może być jedynie zbliżona do prędkości światła, ale nigdy jej nie osiągnie.



Rysunek 5.26 Wykres przedstawia zależność energii kinetycznej (relatywistycznej i klasycznej) od prędkości dla wartości bliskich prędkości światła.

Przykład 5.12

Porównywanie energii kinetycznej

Elektron porusza się z prędkością $v = 0{,}99c$.

a. Obliczmy energię kinetyczną elektronu w megaelektronowoltach.

b. Porównajmy otrzymaną wartość z energią kinetyczną obliczoną w sposób klasyczny.

Strategia rozwiązania

Wyrażenie na relatywistyczną energię kinetyczną jest zawsze prawdziwe, zwłaszcza w przypadku (a), gdzie prędkość cząstki jest bardzo bliska prędkości światła. Najpierw należy wyliczyć czynnik relatywistyczny γ, a następnie za jego pomocą określić wartość energii kinetycznej. W części (b) obliczamy klasyczną energię kinetyczną (której wartość powinna być zbliżona do wartości energii relatywistycznej, jeśli u wynosiłoby mniej niż kilka procent c) i porównujemy ją z wynikiem z części (a).

Rozwiązanie części (a)

- Określamy dane: $u = 0{,}99c$, $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$.
- Określamy szukane: $E_{\text{k rel}}$.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$E_{\text{k rel}} = (\gamma - 1)mc^2 \quad \text{dla} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}.$$

- Wykonujemy obliczenia. Najpierw obliczymy γ. Pamiętajmy, aby zachować wszystkie liczby po przecinku (to nie jest ostateczny wynik)

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0{,}99c)^2}{c^2}}} = 7{,}0888.$$

Teraz wykorzystamy otrzymaną wartość do obliczenia energii kinetycznej

$$\begin{aligned} E_{\text{k rel}} &= (\gamma - 1)mc^2 \\ &= (7{,}0888 - 1) \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \text{m} / \text{s}\right)^2 \\ &= 4{,}9922 \cdot 10^{-13}\ \text{J}. \end{aligned}$$

Zamieniamy jednostki

$$E_{\text{k rel}} = 4{,}9922 \cdot 10^{-13}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{MeV}}{1{,}6 \cdot 10^{-13}\ \text{J}} = 3{,}12\ \text{MeV}.$$

Rozwiązanie części (b)

- Określamy dane: $u = 0{,}99c$, $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}$.
- Określamy szukane: E_{k}.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$E_{\text{k}} = \frac{1}{2}mu^2.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$
\begin{aligned}
E_{\mathrm{k}} &= \frac{1}{2} m u^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot (0{,}99)^2 \cdot \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}\right)^2 \\
&= 4{,}0179 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{J} \cdot \frac{1\,\mathrm{MeV}}{1{,}6 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}} \\
&= 0{,}251\,\mathrm{MeV}\,.
\end{aligned}
$$

Znaczenie

Ponieważ prędkość cząstki wynosiła $99\,\%$ prędkości światła, energie kinetyczne klasyczna i relatywistyczna różnią się od siebie znacząco, przy czym energia klasyczna jest dużo mniejsza od energii relatywistycznej. A dokładnie: $E_{\mathrm{k\,rel}}\ /\ E_{\mathrm{k}} = 12{,}4$. To pokazuje, jak trudno jest przyspieszyć cząstkę do prędkości bliskich c. Im bardziej zbliżamy się do c, tym więcej energii musimy włożyć w zwiększenie prędkości. Energia rzędu $3\,\mathrm{MeV}$ na elektron jest stosunkowo mała i może zostać osiągnięta w istniejących akceleratorach cząstek.

Czy istnieje powód, aby przyspieszać cząstki do prędkości równych $99\,\%$ czy $99{,}9\,\%$ prędkości światła i wyższych? Odpowiedź brzmi: tak. Tego typu eksperymenty dostarczają ogromnych ilości informacji. Energia związana z cząstkami o dużych prędkościach może zostać zmieniona w inną, a nawet spowodować powstanie zupełnie nowych cząstek. W Wielkim Zderzaczu Hadronów (Rysunek 5.27) naładowane cząstki są przyspieszane przed wprowadzeniem ich do tunelu o kształcie pierścienia. Tam dwie wiązki cząstek są rozpędzane do właściwej prędkości ($99{,}7\,\%$ prędkości światła) w przeciwnych kierunkach i zderzane, co prowadzi do powstania nowych rodzajów cząstek. Większość naszej wiedzy na temat struktury materii i egzotycznych cząstek pochodzi właśnie ze zderzeń w akceleratorach. Obecnie najbardziej oczekiwanym wynikiem tych eksperymentów jest potwierdzenie teorii wielkiej unifikacji. Do tematu cząstek egzotycznych i ich właściwości wrócimy w dalszej części podręcznika.



Rysunek 5.27 Europejska Organizacja Badań Jądrowych CERN (od pierwotnej nazwy francuskiej **Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire**) posiada największy zderzacz cząstek na świecie, który znajduje się na granicy Francji i Szwajcarii.

Całkowita energia relatywistyczna

Wzór na energię kinetyczną może być przekształcony do

$$E = \frac{mu^2}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = E_k + mc^2.$$

W artykule opublikowanym w 1905 roku Einstein dowiódł, że jeśli energia cząstki zmieni się o ΔE, to jej masa zmieni się o $\Delta m = \Delta E / c^2$. Od tego czasu zostało wielokrotnie potwierdzone doświadczalnie, że mc^2 odpowiada energii cząstki o masie m będącej w spoczynku. Za przykład weźmy neutralny pion o masie spoczynkowej m: w momencie jego rozpadu powstają dwa fotony, które mają zerową masę, ale zawierają w sobie energię mc^2 pionu. Podobnie gdy cząstka o masie m rozpadnie się na co najmniej dwie cząstki o mniejszej masie całkowitej, ich energia kinetyczna będzie odpowiadała spadkowi masy. Tak więc E jest całkowitą energią relatywistyczną cząstki, a mc^2 jest jej energią spoczynkową.

Energia całkowita

Energię całkowitą (ang. **total energy**) E cząstki wyrażamy wzorem

$$E = \gamma mc^2, \tag{5.18}$$

gdzie m jest masą, c to prędkość światła, $\gamma = 1 / \sqrt{1 - u^2 / c^2}$, a u jest prędkością ciała względem obserwatora.

Energia spoczynkowa

Energię spoczynkową (ang. **rest energy**) danego ciała zapiszemy jako

$$E_0 = mc^2. \tag{5.19}$$

Tak wygląda słynne równanie Einsteina, które jako pierwsze pokazało związek między masą a energią ciała. Konsekwencją tej zależności jest wzrost masy spoczynkowej ciała, w którym magazynowana jest energia. Co więcej, masa spoczynkowa może zostać zniszczona w celu uwolnienia energii w niej związanej. Równania opisujące energię relatywistyczną, będące następstwem tych zależności, podobnie jak dowodzące je eksperymenty są tak przełomowe, że przez wiele lat nie wchodziły do kanonu fizyki. Warto zauważyć, że Einstein doskonale rozumiał swą teorię i opisał jej znaczenie i konsekwencje.

Przykład 5.13

Obliczanie energii spoczynkowej

Obliczmy energię spoczynkową ciała o masie 1 g.

Strategia rozwiązania

Jeden gram to mała masa – mniej niż jeden grosz. Możemy pomnożyć tę wartość, wyrażoną w jednostkach układu SI, przez prędkość światła podniesioną do kwadratu i określić odpowiadającą jej energię spoczynkową.

Rozwiązanie

- Określamy dane: $m = 10^{-3}$ kg, $c = 3 \cdot 10^8$ m / s.
- Określamy szukane: E_0.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$E_0 = mc^2.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$E_0 = mc^2 = 10^{-3}\,\mathrm{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}\right)^2$$
$$= 9 \cdot 10^{13}\,\mathrm{kg\,m^2}\,/\,\mathrm{s^2}.$$

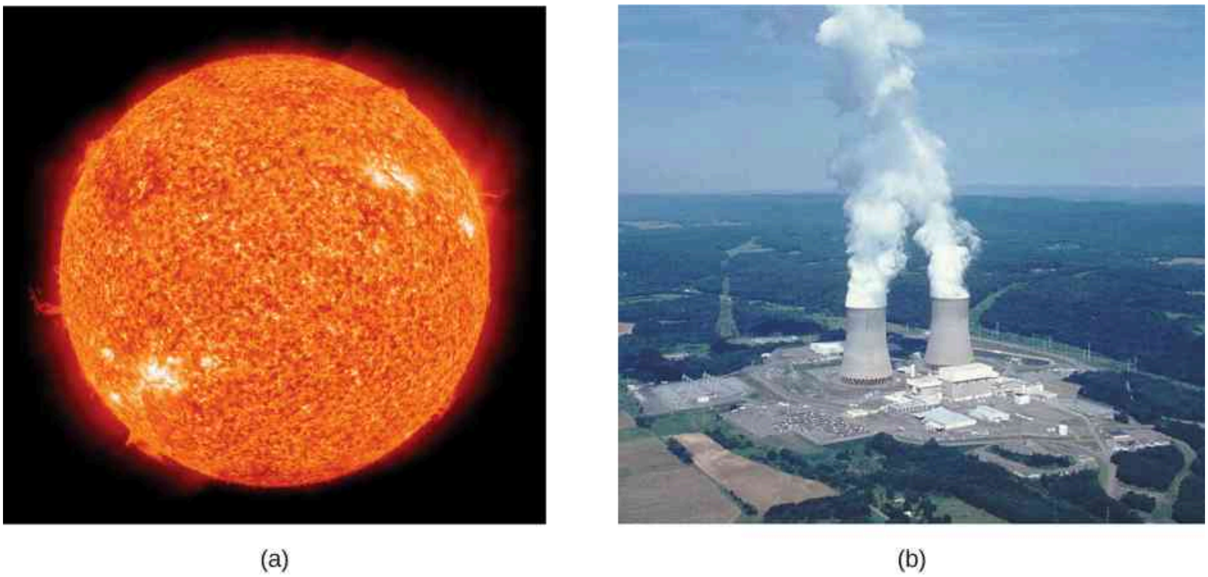
Zamieniamy jednostki. Zauważmy, że $1\,\mathrm{kg\,m^2}\,/\,\mathrm{s^2} = 1\,\mathrm{J}$. Energia spoczynkowa wynosi więc

$$E_0 = 9 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J}.$$

Znaczenie

Okazuje się, że nawet tak małej masie, jaką jest $1\,\mathrm{g}$, odpowiada ogromna energia. Dzieje się tak, ponieważ energia liczona jest jako iloczyn prędkości światła podniesionej do kwadratu i masy badanego ciała. Jako że c^2 ma bardzo dużą wartość, także energia będzie duża dla każdej masy. Energia $9 \cdot 10^{13}\,\mathrm{J}$ jest dwa razy większa niż energia uwolniona podczas wybuchu bomby atomowej w Hiroszimie i około $10\,000$ razy większa od energii kinetycznej lotniskowca.

Praktyczne zastosowania zamiany masy w energię, takie jak broń jądrowa i energetyka jądrowa, są nam dobrze znane. Gdy Einstein ogłaszał swoją teorię na temat poprawnej formy energii relatywistycznej, istniały już podobne zastosowania i niektóre z nich zostały przez niego opisane. Promieniowanie jądrowe odkryto dekadę wcześniej, a pochodzenie jego energii było tajemnicą. Dzieje się tak, ponieważ podczas procesów jądrowych część masy ulega zniszczeniu i zostaje uwolniona energia przenoszona przez promieniowanie jądrowe. Jednak zredukowana masa jest tak mała, że trudno jest zauważyć jej ubytek. Einstein zasugerował, że ten proces może służyć jako źródło energii w promieniotwórczych związkach chemicznych badanych w tym okresie. Działo się to na wiele lat przed wykorzystaniem tego zjawiska do produkcji energii (Rysunek 5.28).



Rysunek 5.28 Zarówno (a) Słońce, jak i (b) elektrownia jądrowa wykorzystują redukcję masy do produkcji energii – Słońce poprzez reakcje termojądrowe, a elektrownia dzięki rozszczepianiu cięższych jąder atomowych na lżejsze jądra atomowe.

Ze względu na związek między energią spoczynkową a masą, bardziej niż jako oddzielną wielkość, rozważamy masę jako formę energii. Przed pracą Einsteina nic nie wskazywało na to, że równoważność masy i energii jest podstawą procesów zachodzących w Słońcu, podobnie jak procesów towarzyszących rozpadowi jądrowemu i procesów zachodzących w jądrze Ziemi.

Energia magazynowana i potencjalna

Co dzieje się z energią magazynowaną w ciele znajdującym się w spoczynku, jak w przypadku ładowania baterii czy energii związanej w ściśniętej sprężynie zabawkowego pistoletu? Energia ta jest częścią energii całkowitej, a przez to

wpływa na masę spoczynkową danego ciała. Cała energia związana w ciele i potencjalna staje się masą w układzie. Pozornie sprzeczna zasada zachowania masy (a więc zakładająca, że masa całkowita jest stała) była jednym z praw zweryfikowanych przez dziewiętnastowieczną naukę. Dlaczego wcześniej nie zauważono jej błędności? Następujący przykład pozwoli na lepsze zrozumienie tego zagadnienia.

Przykład 5.14

Obliczanie masy spoczynkowej

Bateria samochodowa ma pojemność $600\,\mathrm{A\,h}$ (amperogodzin) przy napięciu $12\,\mathrm{V}$.

a. Obliczmy zwiększenie masy spoczynkowej baterii podczas ładowania (od pełnego rozładowania do pełnego naładowania) przy założeniu, że żaden związek chemiczny ani nie opuszcza baterii, ani nie jest do niej wprowadzany.
b. Jaki stanowi to procent masy baterii przy założeniu, że wynosi ona $20\,\mathrm{kg}$?

Strategia rozwiązania

W części (a) musimy obliczyć wartość energii E_{bat} pochodzącej z procesów chemicznych, zmagazynowanej w baterii, równą energii wykorzystanej na zasilanie samochodu. Jako że $E_{\mathrm{bat}} = qU$, musimy najpierw obliczyć ładunek q nagromadzony w $600\,\mathrm{A\,h}$, będący iloczynem natężenia prądu I i czasu t. Następnie pomnożymy ładunek przez $12\,\mathrm{V}$. Wtedy możemy obliczyć wzrost masy baterii, wykorzystując równanie $E_{\mathrm{bat}} = \Delta mc^2$. Część (b) polega na obliczeniu stosunku mas i zamianie wyniku na wartość procentową.

Rozwiązanie części (a)

- Określamy dane: $It = 600\,\mathrm{A\,h}$, $U = 12\,\mathrm{V}$, $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.
- Określamy szukane: Δm.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$E_{\mathrm{bat}} = \Delta mc^2,$$
$$\Delta m = \frac{E_{\mathrm{bat}}}{c^2} = \frac{qU}{c^2} = \frac{ItU}{c^2}.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\Delta m = \frac{600\,\mathrm{A\,h} \cdot 12\,\mathrm{V}}{\left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2}.$$

Zapiszmy A jako kulomb na sekundę ($\mathrm{C/s}$) i zamieńmy godziny na sekundy

$$\Delta m = \frac{(600\,\mathrm{C/s \cdot h}) \cdot \frac{3600\,\mathrm{s}}{1\,\mathrm{h}} \cdot 12\,\mathrm{J/C}}{\left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2} = 2{,}88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}.$$

Zastosowaliśmy też przekształcenie $1\,\mathrm{kg\,m^2/s^2} = 1\,\mathrm{J}$.

Rozwiązanie części (b)

- Określamy dane: $\Delta m = 2{,}88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}$, $m = 20\,\mathrm{kg}$.
- Określamy szukane: zmiana procentowa.
- Wyrażamy rozwiązanie za pomocą równania

$$\text{przyrost masy} = \frac{\Delta m}{m} \cdot 100\%.$$

- Wykonujemy obliczenia

$$\text{przyrost masy} = \frac{\Delta m}{m} \cdot 100\% = \frac{2{,}88 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{kg}}{20\,\mathrm{kg}} \cdot 100\% = 1{,}44 \cdot 10^{-9}\,\%.$$

Znaczenie

Przyrost masy jest bardzo mały, ponieważ dzielimy energię przez c^2, a więc bardzo dużą wartość. Aby zauważyć różnicę w masie, musielibyśmy dysponować wagą o dokładności pomiaru do miliardowej części procenta. Nic więc dziwnego, że zmianę masy spoczynkowej tak trudno jest zaobserwować. Co więcej, zmiana masy jest tak mała, że łatwo podać w wątpliwość fakt, że ktoś mógłby udowodnić jej istnienie. Okazała się jednak zauważalna w procesach jądrowych, w których ubytek masy jest na tyle duży, że można go dokładnie zmierzyć. Masa paliwa w reaktorach jądrowych ulega znacznemu zmniejszeniu w miarę produkcji energii. W tym przypadku energia zmagazynowana w paliwie jest uwalniana (głównie w formie energii termicznej wykorzystywanej do napędzania generatorów prądu), a masa spoczynkowa maleje. Podobnie dzieje się w bateriach, jednak energia wydzielana w elektrowniach jądrowych jest dużo większa, a więc i ubytek masy jest bardziej znaczący.

Relatywistyczne powiązanie energii i pędu

Wiemy, że klasycznie zdefiniowana energia kinetyczna i pęd są ze sobą powiązane w następujący sposób

$$E_\text{k} = \frac{p^2}{2m} = \frac{(mu)^2}{2m} = \frac{1}{2}mu^2.$$

W podejściu relatywistycznym zależność między energią a pędem otrzymujemy poprzez algebraiczne przekształcenia opisujących je wzorów

$$E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2, \tag{5.20}$$

gdzie E jest całkowitą energią relatywistyczną opisaną wzorem $E = mc^2 \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2}$, a p to pęd relatywistyczny. Ta zależność jest bardziej skomplikowana niż jej klasyczne ujęcie, ale jej analiza przynosi ciekawe wnioski. Po pierwsze, energia całkowita jest związana z pędem i masą spoczynkową. Gdy ciało pozostaje w spoczynku, jego pęd wynosi zero, a energia całkowita opisywana jest jedynie przez człon związany z masą: mc^2, co pokrywa się ze wzorem na opisywaną wcześniej energię spoczynkową (potencjalną). W trakcie przyspieszania pęd ciała rośnie, a razem z nim energia całkowita. Przy dużych prędkościach człon dotyczący masy $\left(mc^2\right)^2$ jest tak mały w porównaniu z członem zawierającym pęd $(pc)^2$, że można go pominąć, a więc $E = pc$ w przypadku prędkości relatywistycznych.

Jeżeli założymy rozdzielność pędu i masy, możemy określić następstwa równania $E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2$ dla cząstki o zerowej masie. Jeżeli przyjmiemy $m = 0\,\text{kg}$, to $E = pc$ lub $p = E / c$. W naturze występuje wiele cząstek o takiej własności i jednymi z nich są fotony, które możemy opisać jako paczki promieniowania elektromagnetycznego. Kolejną konsekwencją takiej formy równania energii jest warunek przemieszczania się cząstki z prędkością światła. Dokładna analiza równania $E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2$ prowadzi między innymi do pojęcia antycząstki (ujemna energia $E \longrightarrow -E$). Wykracza ono poza zakres tego podręcznika, jednak należy pamiętać, jak duży wpływ ma na szczególną teorię względności.

5.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaka jest energia kinetyczna elektronu o prędkości $0{,}992c$?

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 5

KLUCZOWE POJĘCIA

czas własny $\Delta\tau$ (ang. proper time) czas trwania zdarzenia mierzony przez obserwatora, dla którego początek i koniec zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu

doświadczenie Michelsona-Morleya (ang. Michelson-Morley experiment) eksperyment wykonany w 1887 roku, który udowodnił, że prędkość światła w próżni nie zależy od ruchu Ziemi wokół Słońca

drugi postulat szczególnej teorii względności (ang. second postulate of special relativity) niezależnie od układu odniesienia światło porusza się z prędkością c we wszystkich kierunkach

dylatacja czasu (ang. time dilation) wydłużenie czasu pomiędzy dwoma zdarzeniami, obserwowane z poruszającego się układu odniesienia w stosunku do układu spoczynkowego (układu, w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu)

długość własna L_0 (ang. proper length) odległość między dwoma punktami mierzona przez obserwatorów będących w spoczynku względem obu punktów (czyli w ich układzie spoczynkowym); na przykład długość ogona myszy laboratoryjnej mierzona przez biologów

energia całkowita (ang. total energy) suma wszystkich form energii danej cząstki, w tym energii spoczynkowej i kinetycznej, dana wzorem $E = \gamma mc^2$, dla cząstki o masie m i poruszającej się z prędkością u, gdzie $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2}$

energia spoczynkowa (ang. rest energy) energia zmagazynowana w ciele pozostającym w spoczynku: $E_0 = mc^2$

klasyczne dodawanie prędkości (transformacja Galileusza) (ang. classical (Galilean) velocity addition) dodawanie prędkości w przypadku $v \ll c$, a więc gdy ich wartość jest dużo mniejsza od wartości prędkości światła; wówczas prędkości dodajemy do siebie jak zwyczajne liczby przy przemieszczeniu w jednym wymiarze: $u = v + u'$, gdzie v jest prędkością względną między dwoma obserwatorami, u to prędkość ciała względem jednego z obserwatorów, a u' odpowiada prędkości tego ciała względem drugiego obserwatora

linia świata (ang. world line) ścieżka przez czasoprzestrzeń

masa spoczynkowa (ang. rest mass) masa obiektu mierzona przez obserwatora pozostającego w spoczynku w stosunku do danego obiektu (dla odróżnienia od masy relatywistycznej, określenia używanego w starszych podręcznikach; obecnie niekonieczny jest tu przymiotnik „spoczynkowa”)

pierwszy postulat szczególnej teorii względności (ang. first postulate of special relativity) prawa fizyki są takie same we wszystkich inercjalnych układach

prędkość światła (ang. speed of light) stała prędkość niezależna od układu odniesienia w teorii względności; maksymalna prędkość, z jaką mogą poruszać się cząstki lub jakiekolwiek sygnały

pęd relatywistyczny $\vec{p}$ (ang. relativistic momentum) pęd ciała poruszającego się z prędkością relatywistyczną; $\vec{p} = \gamma m \vec{u}$

relatywistyczna energia kinetyczna (ang. relativistic kinetic energy) energia kinetyczna ciała poruszającego się z prędkością relatywistyczną

relatywistyczne dodawanie prędkości (ang. relativistic velocity addition) dodawanie prędkości bliskich prędkości światła

skrócenie długości (ang. length contraction) zmniejszenie obserwowanej długości L zdarzenia w stosunku do jego długości własnej L_0, gdy długość ta mierzona jest w układzie odniesienia poruszającym się z prędkością względną v

szczególna teoria względności (ang. special theory of relativity) teoria zaproponowana w 1905 roku przez Alberta Einsteina, która zakłada, że prawa fizyki i prędkość światła są takie same dla każdego obserwatora

transformacja Galileusza (ang. Galilean transformation) przekształcenie współrzędnych przestrzennych i czasowych pewnego zdarzenia z jednego układu odniesienia na drugi, zgodne z mechaniką klasyczną

transformacja Lorentza (ang. Lorentz transformation) przekształcenie współrzędnych przestrzennych i czasowych pewnego zdarzenia z jednego układu odniesienia na drugi, zgodne ze szczególną teorią względności

układ inercjalny (ang. inertial frame of reference) układ odniesienia, w którym ciało będące w spoczynku pozostaje w spoczynku, a ciało w ruchu porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeżeli nie wpływa na nie żadna zewnętrzna siła

układ spoczynkowy (ang. rest frame) układ odniesienia, w którym obserwator jest w spoczynku względem danego obiektu

zasada względności Galileusza (ang. Galilean relativity) jeżeli obserwator mierzy prędkość pewnego ciała w jednym układzie odniesienia, a układ ten porusza się z pewną prędkością względem innego układu odniesienia, to obserwator znajdujący się w drugim układzie odniesienia zmierzy prędkość wspomnianego ciała jako sumę wektorową prędkości względnej między układami i ciała

zdarzenie (ang. event) zjawisko w czasie i przestrzeni opisane przez współrzędne czasowe i przestrzenne (x, y, z, t) , obserwowane względem pewnego układu odniesienia

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Dylatacja czasu	$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
Czynnik relatywistyczny (Lorentza)	$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
Skrócenie długości	$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$
Transformacja Galileusza	$x = x' + vt, y = y', z = z', t = t'$
Transformacja Lorentza	$t = \frac{t'+vx'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
	$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
	$y = y'$
	$z = z'$
Odwrotna transformacja Lorentza	$t' = \frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
	$x' = \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
	$y' = y$
	$z' = z$
Niezmienniki czasoprzestrzenne	$(\Delta s)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 - (c\Delta t)^2$
	$(\Delta\tau)^2 = -\frac{(\Delta s)^2}{c^2} = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}{c^2}$
Relatywistyczne dodawanie prędkości	$u_x = \frac{u'_x+v}{1+vu'_x/c^2}, u_y = \frac{u'_y/\gamma}{1+vu'_x/c^2}, u_z = \frac{u'_z/\gamma}{1+vu'_x/c^2}$
Relatywistyczny efekt Dopplera dla długości fali	$\lambda_{obs} = \lambda_{źr}\sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}}$
Relatywistyczny efekt Dopplera dla częstotliwości	$f_{obs} = f_{źr}\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}}$
Pęd relatywistyczny	$\vec{p} = \gamma m\vec{u} = \frac{m\vec{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$
Relatywistyczna energia całkowita	$E = \gamma mc^2$, gdzie $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$
Relatywistyczna energia kinetyczna	$E_{k\,rel} = (\gamma - 1)mc^2$, gdzie $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

PODSUMOWANIE

5.1 Niezmienność praw fizyki

- Fizyka relatywistyczna (teoria względności) opisuje, w jaki sposób obserwatorzy w dwóch różnych układach odniesienia widzą to samo zdarzenie.
- Układ inercjalny jest układem odniesienia, w którym ciało będące w spoczynku pozostaje w spoczynku, a ciało w ruchu porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym, jeżeli nie wpływa na nie żadna zewnętrzna siła.
- Współczesna teoria względności jest podzielona na dwie części. Szczególna teoria względności opisuje układy poruszające się ruchem jednostajnym (nieprzyspieszonym), natomiast ogólna teoria względności bierze pod uwagę układy nieinercjalne i występowanie grawitacji. Postulaty fizyki relatywistycznej są potwierdzone doświadczalnie, a przy założeniu niskich prędkości i słabej grawitacji z dużą dokładnością odpowiadają przewidywaniom fizyki klasycznej (względność Galileusza).
- Fizyka relatywistyczna jest oparta na dwóch postulatach Einsteina. Pierwszy z nich mówi o unifikacji praw fizyki we wszystkich układach inercjalnych. Drugi mówi, że niezależnie od układu odniesienia i kierunku światło porusza się z prędkością c.
- W 1887 roku Michelson i Morley udowodnili eksperymentalnie, że prędkość światła w próżni nie zależy od ruchu Ziemi wokół Słońca.

5.2 Względność jednoczesności zdarzeń

- Dwa zdarzenia nazwiemy jednoczesnymi, jeżeli obserwator stwierdza, że wydarzyły się w tym samym momencie.
- Dwa zdarzenia zachodzące w jakiejś odległości od siebie i zachodzące w tym samym czasie dla pewnego obserwatora w jednym układzie odniesienia nie muszą być jednoczesne w innym układzie odniesienia. Jednoczesność zdarzeń w szczególnej teorii względności nie jest bezwzględna.

5.3 Dylatacja czasu

- Dylatacją czasu nazwiemy wydłużenie czasu pomiędzy dwoma zdarzeniami, obserwowane z poruszającego się układu odniesienia w stosunku do układu spoczynkowego (układu, w którym oba zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu).
- Obserwatorzy poruszający się względem siebie z prędkością v nie rejestrują takiego samego upływu czasu pomiędzy dwoma zdarzeniami. Czas własny $\Delta\tau$ to czas trwania zdarzenia mierzony przez obserwatora, w którego układzie odniesienia początek i koniec zdarzenia zachodzą w tym samym miejscu. Czas Δt mierzony przez obserwatora, względem którego przemieszcza się układ spoczynkowy zdarzeń z prędkością v, jest powiązany z czasem własnym $\Delta\tau$ następującą zależnością

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} = \gamma\Delta\tau,$$

gdzie $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$.

- Pozorność paradoksu bliźniąt kryje się w jego błędnych założeniach. Jako że bliźniak astronauta porusza się ruchem przyspieszonym i opóźnionym, sytuacja bliźniąt nie jest symetryczna.
- Dylatacja czasu zachodzi zawsze, ale przy małych prędkościach jej wpływ można pominąć.
- Czas własny to najkrótszy odcinek czasu łączący dwa zdarzenia. Obserwator poruszający się względem zdarzenia zawsze zaobserwuje większy upływ czasu niż w przypadku czasu własnego.

5.4 Skrócenie długości w szczególnej teorii względności

- Prędkość względna jest taka sama dla wszystkich obserwatorów.
- Na zmierzoną odległość wpływa ruch obserwatora. Długość własna L_0 określa odległość między dwoma punktami mierzoną przez obserwatora będącego w spoczynku względem obu punktów.
- Skrócenie długości to inaczej zmniejszenie obserwowanej długości L zdarzenia w stosunku do jego długości własnej L_0, gdy długość ta mierzona jest w układzie odniesienia poruszającym się z prędkością względną v.

- Długość własna jest największą możliwą odległością między dwoma punktami. Obserwator poruszający się względem zdarzenia zawsze zaobserwuje mniejszą odległość od długości własnej.

5.5 Transformacja Lorentza

- Transformacja Galileusza opisuje, w jaki sposób z wykorzystaniem mechaniki klasycznej opisać współrzędne, prędkość i przyspieszenie mierzone w jednym układzie odniesienia, widziane przez obserwatora w innym układzie odniesienia. Długości pozostają niezmienione, a czas mierzony jest względem jednej uniwersalnej skali.
- Zasady mechaniki Newtona zostają zachowane we wszystkich układach inercjalnych po zastosowaniu transformacji Galileusza: $x = x' + vt$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$.
- Pojęcia czasu i odległości są takie same we wszystkich układach inercjalnych zgodnie z transformacją Galileusza. Transformacja ta jednak nie jest zgodna z postulatami szczególnej teorii względności.
- Poprawnym przekształceniem z punktu widzenia fizyki relatywistycznej jest transformacja Lorentza. Wzory opisujące ją otrzymujemy poprzez zapewnienie takiej samej formy rozchodzącemu się sferycznie sygnałowi świetlnemu w obu układach odniesienia.

$$\begin{array}{cc}
\text{Transformacja Lorentza} & \text{Obrót wokół osi } z \\
\text{(współrzędne } (x, t)\text{):} & \text{(współrzędne } (x, y)\text{):} \\
x' = \gamma x - \beta\gamma ct & x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\
ct' = -\beta\gamma x + \gamma ct & y' = -x\sin\theta + y\cos\theta
\end{array}$$

- Zjawiska relatywistyczne można wyjaśnić w odniesieniu do geometrycznych własności czterowymiarowej czasoprzestrzeni, w której transformacja Lorentza odpowiada obrotom osi. Z tą różnicą, że w przypadku transformacji Lorentza niezmiennikiem jest Δs, a nie odległość Δr, co więcej – transformacja Lorentza nie zachowuje skali osi ani ich prostopadłości względem siebie.
- Analiza zjawisk relatywistycznych w odniesieniu do czasoprzestrzeni pozwala twierdzić, że zjawiska te są naturalnym następstwem istnienia czasoprzestrzeni, a nie konsekwencją skomplikowanych procesów fizycznych.

5.6 Względność prędkości w szczególnej teorii względności

- W klasycznym podejściu prędkości dodawane są jak zwyczajne liczby; w przypadku jednowymiarowego ruchu: $u = v + u'$, gdzie v jest prędkością względną między obserwatorami, u to prędkość ciała w ruchu względem jednego z obserwatorów, a u' odpowiada prędkości tego ciała względem drugiego obserwatora.
- Dodawanie prędkości nie może dać wyniku większego od prędkości światła.
- Relatywistyczne dodawanie prędkości opisuje prędkości bliskie prędkości światła.

5.7 Relatywistyczny efekt Dopplera

- Obserwator zauważa relatywistyczny efekt Dopplera dla fal elektromagnetycznych, jeżeli źródło tych fal przemieszcza się względem niego. Obserwowana długość fali może być dłuższa od rzeczywistej, gdy źródło oddala się od obserwatora (przesunięcie ku czerwieni) lub krótsza, gdy źródło przemieszcza się w stronę obserwatora (przesunięcie ku fioletowi). Przesunięcie opisywane jest wzorem

$$\lambda_{\text{obs}} = \lambda_{\text{źr}} \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}},$$

gdzie λ_{obs} to długość fali obserwowanej, $\lambda_{\text{źr}}$ to długość fali źródła, a v to prędkość źródła względem obserwatora.

5.8 Pęd relatywistyczny

- Zasada zachowania pędu obowiązuje także w przypadku pędu relatywistycznego, gdy zewnętrzna siła wypadkowa jest równa zero. Pęd relatywistyczny danego ciała wyraża się wzorem $p = \gamma m u$, gdzie m to masa spoczynkowa, a u to prędkość ciała względem obserwatora; czynnik relatywistyczny $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2}$.
- Dla małych prędkości pęd relatywistyczny można uprościć do klasycznego.

- Pęd relatywistyczny dąży do nieskończoności, gdy u dąży do c. Oznacza to, że ciało o niezerowej masie nie może osiągnąć prędkości światła.

5.9 Energia relatywistyczna

- Zależność masy i energii w ujęciu relatywistycznym wyraża się wzorem na relatywistyczną energię kinetyczną $E_{\text{k rel}} = E - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2 = (\gamma - 1)mc^2$.
- Ciało o masie m i prędkości u posiada energię kinetyczną $E_{\text{k rel}} = (\gamma - 1)mc^2$, gdzie $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2}$.
- Dla małych prędkości relatywistyczna energia kinetyczna przyjmuje formę klasycznej energii kinetycznej.
- Żadne ciało o niezerowej masie nie może osiągnąć prędkości światła, ponieważ energia potrzebna do przyspieszenia go do takiej prędkości ma wartość nieskończoną.
- Energia relatywistyczna jest zachowana, gdy weźmiemy pod uwagę, że masa może być zamieniona w energię.
- Całkowita energia cząstki o masie m poruszającej się z prędkością u wynosi $E = \gamma mc^2$, gdzie $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2}$.
- Energia spoczynkowa ciała o masie m wynosi $E_0 = mc^2$, co oznacza, że masa jest pewną formą energii. Jeśli energia jest magazynowana w ciele, to masa tego ciała wzrasta. Masa może być zniszczona, aby uwolnić energię w niej związaną.
- Zazwyczaj nie zauważamy wzrostu lub ubytku masy, bo zmiana ta jest bardzo mała nawet dla dużych zmian energii. Równanie $E^2 = (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2$ wiąże ze sobą całkowitą energię relatywistyczną E i relatywistyczny pęd p. Przy bardzo dużych prędkościach energię spoczynkową można pominąć, wówczas $E = pc$.

PYTANIA

5.1 Niezmienność praw fizyki

1. Który postulat szczególnej teorii względności Einsteina wprowadza założenia, niepasujące do fizyki klasycznej? Wyjaśnij.

2. Czy Ziemia jest układem inercjalnym? A Słońce? Uzasadnij swoją odpowiedź.

3. Kiedy znajdujesz się na pokładzie lecącego samolotu, masz wrażenie, że Ziemia pod tobą się przemieszcza, a samolot pozostaje w spoczynku. Czy ten punkt widzenia jest słuszny? Krótko rozwiń swoją odpowiedź.

5.3 Dylatacja czasu

4. Odpowiedz na poniższe pytania.
a. Czy ruch zegara wpływa na pomiar czasu przez obserwatora poruszającego się razem z zegarem?
b. Czy ruch obserwatora względem zegara wpływa na pomiar czasu na tym zegarze?

5. Przez kogo mierzony czas wydaje się dłuższy – obserwatora poruszającego się względem zdarzenia czy obserwatora poruszającego się razem ze zdarzeniem? Który z obserwatorów zmierzy czas własny zdarzenia?

6. Odpowiedz na poniższe pytania.
a. W jaki sposób mógłbyś zobaczyć Ziemię starszą o wiele lat, sam starzejąc się dużo mniej?
b. Czy ta metoda pozwala na podróżowanie w przeszłość?

5.4 Skrócenie długości w szczególnej teorii względności

7. Według kogo ciało ma większą długość – obserwatora poruszającego się względem ciała czy obserwatora poruszającego się razem z ciałem? Który z obserwatorów zmierzy długość własną zdarzenia?

8. Efekty relatywistyczne, takie jak dylatacja czasu czy skrócenie długości, występują w przypadku samochodów i samolotów. Czemu wydają nam się tak nieoczywiste?

9. Załóż, że astronauta porusza się z prędkością bliską prędkości światła względem Ziemi.
a. Czy astronauta zaobserwuje spowolnienie upływu czasu na zegarach pokładowych?
b. Jaką zmianę zauważy w zegarach na Ziemi?
c. Czy jego statek wydaje mu się skrócony?
d. Co w przypadku odległości między dwoma gwiazdami położonymi wzdłuż toru jego ruchu?
e. Czy naukowiec znajdujący się na Ziemi zgodzi się z astronautą co do prędkości względnej statku kosmicznego i Ziemi?

5.7 Relatywistyczny efekt Dopplera

10. Wyjaśnij pojęcia „przesunięcie ku czerwieni” i „przesunięcie ku fioletowi” w odniesieniu do relatywistycznego efektu Dopplera.

11. Co dzieje się z relatywistycznym efektem Dopplera, gdy prędkość względna jest równa zero?

12. Czy relatywistyczny efekt Dopplera jest zgodny z klasycznym efektem Dopplera w odniesieniu do długości fali λ_{obs}, większej w przypadku oddalania się źródła od obserwatora?

13. Wszystkie galaktyki oddalone o ponad $50 \cdot 10^6$ lat świetlnych wykazują przesunięcie ku czerwieni światła przez nie emitowanego, proporcjonalne do ich odległości od Ziemi (im dalej, tym przesunięcie jest większe). Na co wskazuje takie przesunięcie? Pamiętaj, że jego jedynym źródłem jest ruch źródła światła względem obserwatora.

5.8 Pęd relatywistyczny

14. W jaki sposób fizyka relatywistyczna wpływa na zasadę zachowania pędu?

15. Czy możliwe jest zachowanie pędu relatywistycznego, gdy na układ działa siła zewnętrzna? Wyjaśnij.

5.9 Energia relatywistyczna

16. Jak fizyka relatywistyczna zmienia klasyczne ujęcie zasady zachowania energii i masy?

17. Co dzieje się z masą wody w dzbanku, gdy stygnie, jeśli założymy, że nie ma przepływu masy poza dzbanek? Czy zmiana ta jest mierzalna? Wyjaśnij.

18. Rozważ następujący eksperyment myślowy. Wczesnym rankiem umieszczamy na wadze na tarasie nadmuchany balon. Balon pozostaje na wadze niezależnie od pogody, umożliwiając dokładny pomiar. Czy masa balonu ulegnie zmianie w trakcie dnia? Omów trudności związane z takim pomiarem.

19. Masa paliwa w reaktorze jądrowym zmniejsza się znacząco wraz z uwalnianiem energii. Czy taki sam mechanizm obowiązuje w przypadku węgla i tlenu w konwencjonalnej elektrowni? Jeśli tak, to czy jesteśmy w stanie zmierzyć ten ubytek masy? Wyjaśnij.

20. Wiemy, że c jest maksymalną prędkością ciała o niezerowej masie. Czy istnieje takie ograniczenie w przypadku pędu albo energii? Wyjaśnij.

21. Wiedząc, że światło przemieszcza się z prędkością światła, zastanów się, czy może mieć ono masę. Wyjaśnij.

22. Jeżeli wykorzystamy teleskop do skierowania wiązki laserowej na powierzchnię Księżyca, możemy przesuwać plamkę na Księżycu z prędkością większą niż prędkość światła. Czy ten paradoks przeczy założeniom fizyki relatywistycznej? (Wskazówka: Sygnał świetlny jest przesyłany z powierzchni Ziemi na Księżyc, a nie na powierzchni Księżyca).

ZADANIA

5.3 Dylatacja czasu

23. Jaka jest wartość γ, jeżeli
a. $v = 0{,}25c$;
b. $v = 0{,}5c$?

24. Jaka jest wartość γ, jeżeli
a. $v = 0{,}1c$;
b. $v = 0{,}9c$?

25. Cząstki nazywane mezonami π są produkowane w akceleratorach cząstek. Jeśli poruszają się one z prędkością $2{,}7 \cdot 10^8$ m / s i żyją $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s obserwowane w układzie spoczynkowym, to jak długi będzie ich czas życia mierzony w laboratorium?

26. Załóżmy, że kaon jest cząstką powstałą w wyniku zderzenia promieniowania kosmicznego z atmosferą. Niech cząstka ta porusza się z prędkością $0{,}98c$, a czas jej życia wynosi $1{,}24 \cdot 10^{-8}$ s, mierzony w układzie spoczynkowym cząstki. Jak długi jest czas życia cząstki mierzony przez naukowca?

27. Mezon π (pion) obserwowany w laboratorium ma czas życia równy $1{,}4 \cdot 10^{-16}$ s, który mierzony w układzie spoczynkowym cząstki wynosi $0{,}84 \cdot 10^{-16}$ s. Jaka jest prędkość pionu względem laboratorium?

28. Neutron mierzony w spoczynku względem obserwatora istnieje 900 s. Jak szybko porusza się neutron względem obserwatora, jeśli jego czas życia mierzony przez tego obserwatora wynosi 2065 s?

29. Jeżeli efekt relatywistyczny jest rzędu 1 %, to γ musi wynosić 1,01. Dla jakiej prędkości względnej $\gamma = 1{,}01$?

30. Jeżeli efekt relatywistyczny jest rzędu 3 %, to γ musi wynosić 1,03. Dla jakiej prędkości względnej $\gamma = 1{,}03$?

5.4 Skrócenie długości w szczególnej teorii względności

31. Statek kosmiczny o długości 200 m (mierzonej z pokładu statku) porusza się w stronę Ziemi z prędkością $0{,}97c$. Jaka jest jego długość mierzona przez naukowca na Ziemi?

32. Jak szybko musiałby się poruszać sportowy samochód o długości $6\,\mathrm{m}$ względem ciebie, abyś zaobserwował jego długość jako $5{,}5\,\mathrm{m}$?

33. a. Jaką drogę przebędzie mion z Przykładu 5.1 względem obserwatora na Ziemi?
b. Jakie przemieszczenie zmierzy obserwator poruszający się razem z mionem? Oprzyj swoje obliczenia na prędkości względem Ziemi i czasie życia cząstki (czas własny);
c. Sprawdź, czy wyliczone długości są ze sobą powiązane czynnikiem $\gamma = 3{,}2$.

34. Odpowiedz na poniższe pytania.
a. Jaki jest czas życia mionu z Przykładu 5.1, przy założeniu, że jego prędkość wynosi $0{,}05c$?
b. Jaką drogę przebędzie cząstka obserwowana z powierzchni Ziemi?
c. Ile wynosi długość tej drogi mierzona z układu odniesienia mionu?

35. **Nieracjonalne wyniki.** Statek kosmiczny zmierza w stronę Ziemi z prędkością $0{,}8c$. Astronauta twierdzi, że wyrzucił kanister w stronę Ziemi z prędkością $1{,}2c$ względem Ziemi.
a. Oblicz prędkość kanistra względem statku;
b. Co się nie zgadza w otrzymanym wyniku?
c. Które założenia są błędne?

5.5 Transformacja Lorentza

36. Opisz następujące zdarzenia w formie (x, y, z, t).
a. Listonosz dzwoni do drzwi dokładnie w południe;
b. W tym samym czasie kawałek chleba wyskakuje z tostera, który znajduje się $10\,\mathrm{m}$ na wschód od drzwi;
c. Dziesięć sekund później samolot ląduje na lotnisku, które jest oddalone od drzwi $10\,\mathrm{km}$ na wschód i $2\,\mathrm{km}$ na południe.

37. Opisz, jak zmienia się kąt $\alpha = \mathrm{tg}\,(v / c)$ oraz kąt między osiami na Rysunku 5.17, gdy prędkość względna v między układami S i S' dąży do c.

38. Opisz kształt ścieżki w czasoprzestrzeni
a. ciała, które pozostaje w spoczynku z ustaloną współrzędną x;
b. ciała poruszającego się ze stałą prędkością u wzdłuż osi x;
c. ciała, które porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym o zerowej prędkości początkowej w kierunku dodatnim osi x.

39. Człowiek stojący na peronie obserwuje dwóch chłopców w wagonie pociągu rzucających do siebie piłkę. Załóż, że pociąg porusza się na wschód ze stałą prędkością $20\,\mathrm{m/s}$, a jeden z chłopców rzuca piłkę z prędkością $5\,\mathrm{m/s}$ w kierunku zachodnim do drugiego chłopca oddalonego od niego o $5\,\mathrm{m}$. Jaka jest prędkość piłki obserwowana przez człowieka na peronie?

40. Obserwowane ze Słońca Ziemia i Mars w pewnym momencie poruszają się w przeciwnym kierunku z prędkościami odpowiednio $108\,\mathrm{km/h}$ i $86{,}871\,\mathrm{km/h}$. Jaką prędkość ma w takim przypadku Mars widziany z powierzchni Ziemi?

41. Człowiek biegnie po prostej drodze, prostopadłej do torów kolejowych, oddalając się od nich z prędkością $12\,\mathrm{m/s}$. Pociąg porusza się z prędkością $30\,\mathrm{m/s}$ względem torów. Jaka jest prędkość człowieka względem pasażera siedzącego w pociągu?

42. Jak zmieniłaby się prędkość z poprzedniego zadania, gdyby droga, po której biegnie człowiek, leżała pod kątem 30° do torów?

43. W układzie spoczynkowym stołu bilardowego bila o masie m, poruszająca się z prędkością v uderza w inną bilę o masie m, będącą w spoczynku. Pierwsza bila zatrzymuje się po zderzeniu, a druga zaczyna ruch z prędkością v w kierunku, w którym poruszała się pierwsza bila. Pokazuje to, że pęd w tym układzie został zachowany.
a. Opisz to samo zdarzenie widziane z układu poruszającego się z prędkością v w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu pierwszej bili;
b. Czy w nowym układzie pęd jest zachowany?

44. W układzie spoczynkowym stołu bilardowego dwie bile o tej samej masie m poruszają się ku sobie z tą samą prędkością v i zderzają się ze sobą. Po zderzeniu obie bile się zatrzymują.
a. Wykaż, że we wspomnianym układzie pęd został zachowany;
b. Opisz to samo zdarzenie widziane z układu poruszającego się z prędkością v w kierunku zgodnym z kierunkiem ruchu pierwszej bili;
c. Czy w nowym układzie pęd jest zachowany?

45. W układzie S obserwujemy dwa zdarzenia: pierwsze to powstanie pionu w spoczynku na początku układu, a drugie to rozpad pionu po czasie τ. Inny obserwator w układzie S' porusza się w dodatnim kierunku osi x ze stałą prędkością v i obserwuje te same dwa zdarzenia w swoim układzie odniesienia. Początki obu układów pokrywają się w $t = t' = 0\,\mathrm{s}$. Określ współrzędne czasowe i przestrzenne obu zdarzeń w układzie S' według
a. transformacji Galileusza;
b. transformacji Lorentza.

5.6 Względność prędkości w szczególnej teorii względności

46. Jeśli dwa statki kosmiczne przemieszczają się ku sobie z prędkością $0{,}8c$, to z jaką prędkością należy wystrzelić kanister z pierwszego statku, aby jego prędkość względem drugiego wynosiła $0{,}999c$?

47. Dwie planety znajdują się na kursie kolizyjnym, zmierzając prosto ku sobie z prędkością $0{,}25c$. Statek

kosmiczny wysłany z jednej planety porusza się z prędkością $0{,}75c$ względem drugiej. Jaka jest prędkość statku względem pierwszej planety?

48. Gdy pocisk jest wystrzeliwany z jednego statku w kierunku drugiego, opuszcza pierwszy statek z prędkością $0{,}95c$ i zbliża się do drugiego z prędkością $0{,}75c$. Jaka jest prędkość względna między tymi dwoma statkami?

49. Jaka jest prędkość względna dwóch statków kosmicznych, jeżeli jeden pocisk zostaje wystrzelony z jednego z nich z prędkością $0{,}75c$ i porusza się w kierunku drugiego z prędkością $0{,}95c$?

50. Udowodnij, że dla dowolnej prędkości względnej v między dwoma obserwatorami wiązka światła wyemitowana przez jednego z nich w kierunku drugiego będzie się od niego oddalała z prędkością światła (przy założeniu, że $v \ll c$).

51. Udowodnij, że dla dowolnej prędkości względnej v między dwoma obserwatorami wiązka światła wyemitowana przez jednego z nich w kierunku przeciwnym do kierunku ruchu drugiego będzie się od niego oddalała z prędkością światła (przy założeniu, że $v < c$).

5.7 Relatywistyczny efekt Dopplera

52. Używane przez policję urządzenie do mierzenia prędkości pojazdu wykorzystuje wiązkę fal radiowych odbijaną od powierzchni poruszającego się ciała (samochodu) i mierzy przesunięcie Dopplera. Załóż, że wychodząca fala ma częstotliwość $100\,\text{GHz}$, a powrotna jest o $15\,\text{kHz}$ wyższa. Jaka jest prędkość samochodu? Zauważ, że w tym przypadku nastąpią dwa przesunięcia Dopplera. Pamiętaj, żeby nie zaokrąglać wyniku aż do końca – uzyskana wartość będzie bardzo mała.

5.8 Pęd relatywistyczny

53. Oblicz moment pędu jądra helu o masie $6{,}68 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$ poruszającego się z prędkością $0{,}2c$.

54. Jaki jest pęd elektronu poruszającego się z prędkością $0{,}98c$?

55.
a. Oblicz pęd relatywistyczny asteroidy o masie $10^9\,\text{kg}$ poruszającej się z prędkością $30\,\text{km}/\text{s}$ w kierunku Ziemi;
b. Oblicz stosunek tego pędu do pędu obliczonego w sposób klasyczny.

(Wskazówka: Wykorzystaj zaokrąglenie $\gamma = 1 + (1/2)v^2 \big/ c^2$ w przypadku małych prędkości).

56. a. Jaki jest pęd $2000\,\text{kg}$ satelity orbitującego na wysokości $4\,\text{km}$?
b. Oblicz stosunek tego pędu do pędu obliczonego w sposób klasyczny. (Wskazówka: Wykorzystaj zaokrąglenie $\gamma = 1 + (1/2)v^2 \big/ c^2$ w przypadku małych prędkości).

57. Jaka jest prędkość elektronu o pędzie $3{,}04 \cdot 10^{-21}\,\text{kg}\,\text{m}/\text{s}$? Musisz obliczyć prędkość z dokładnością do co najmniej czterech cyfr po przecinku, aby zauważyć różnicę między nią a prędkością światła.

58. Oblicz prędkość protonu o pędzie $4{,}48 \cdot 10^{-19}\,\text{kg}\,\text{m}/\text{s}$.

5.9 Energia relatywistyczna

59. Jaka jest energia elektronu, jeśli wiemy, że jego masa wynosi $9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$? Swoją odpowiedź wyraź w megaelektronowoltach (MeV).

60. Oblicz energię spoczynkową protonu o masie $1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$. Wynik podaj w dżulach i megaelektronowoltach.

61. Jeżeli energie spoczynkowe protonu i neutronu (dwóch budulców jądra atomowego) wynoszą odpowiednio $938{,}3\,\text{MeV}$ i $939{,}6\,\text{MeV}$, to jaka jest różnica ich mas w kilogramach?

62. Podczas Wielkiego Wybuchu, który dał początek istnieniu Wszechświata, uwolniona została energia $10^{68}\,\text{J}$. Jak wiele gwiazd mogłoby powstać z połowy tej energii, zakładając, że jedna gwiazda ma masę średnio $4 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$?

63. Eksplozja supernowej powstała z gwiazdy o masie $2 \cdot 10^{31}\,\text{kg}$ uwalnia energię $10^{44}\,\text{J}$.
a. Ile kilogramów masy jest zamienione na energię podczas tego zdarzenia?
b. Jaki jest stosunek $\Delta m / m$ masy wykorzystanej w trakcie eksplozji do początkowej masy gwiazdy?

64. a. Korzystając z danych z m65776 (https://cnx.org/content/m65776/latest/#fs-id1165039443587), oblicz ilość masy przekształconej w energię podczas rozszczepienia 1 kg uranu;
b. Jaki jest stosunek przekształconej masy do początkowej ($\Delta m / m$)?

65. a. Korzystając z danych z m65776 (https://cnx.org/content/m65776/latest/#fs-id1165039443587), oblicz ilość masy przekształconej w energię podczas syntezy 1 kg wodoru;
b. Jaki jest stosunek przekształconej masy do początkowej ($\Delta m/m$)?
c. Porównaj otrzymany wynik ze stosunkiem mas z poprzedniego zadania.

66. Synteza wodoru w oceanach produkuje około $10^{34}\,\text{J}$ energii.

a. Jeżeli 10^{33} J tej energii zostanie wykorzystane, to jaki będzie ubytek masy w oceanach?
b. Jakiej objętości wody to odpowiada?
c. Czy jest to duża część całkowitej masy oceanów?

67. Mion ma masę spoczynkową $105{,}7\ \mathrm{MeV}$, a z jego rozpadu powstaje elektron i pewna cząstka o zerowej masie.
a. Jeżeli cały ubytek masy jest przekształcony w energię kinetyczną elektronu, to jaka będzie wartość czynnika γ?
b. Jaka będzie prędkość elektronu?

68. Pion rozpada się na mion i pewną cząstkę o zerowej masie. Pion ma energię spoczynkową $139{,}6\ \mathrm{MeV}$, a mion $105{,}7\ \mathrm{MeV}$. Załóż, że pion znajduje się początkowo w spoczynku, a ubytek masy przekształcany jest w energię kinetyczną mionu. Z jaką prędkością będzie się przemieszczał mion?

69. a. Oblicz relatywistyczną energię kinetyczną tonowego samochodu poruszającego się z prędkością $30\ \mathrm{m/s}$ przy prędkości światła równej $45\ \mathrm{m/s}$;
b. Oblicz stosunek relatywistycznej energii kinetycznej do klasycznej.

70. Rozpad alfa to rozpad jądrowy, w którym emitowane jest jądro helu. Jaka jest prędkość tego jądra, jeżeli jego masa wynosi $6{,}8 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, a procesowi towarzyszy emisja $5\ \mathrm{MeV}$ energii?

71. a. W wyniku rozpadu beta emitowany jest elektron. Jaka jest jego prędkość, jeżeli posiada energię kinetyczną równą $0{,}75\ \mathrm{MeV}$?
b. Jak duża prędkość wpływa na energię kinetyczną cząstki i jak się ma ta zależność do energii masy spoczynkowej elektronu?

ZADANIA DODATKOWE

72. Odpowiedz na poniższe pytania.
a. Dla jakiej prędkości względnej $\gamma = 1{,}5$?
b. Dla jakiej prędkości $\gamma = 100$?

73. Odpowiedz na poniższe pytania.
a. Dla jakiej prędkości względnej $\gamma = 2$?
b. Dla jakiej prędkości $\gamma = 10$?

74. Nieracjonalne wyniki. Naukowiec w laboratorium znajdującym się na Ziemi mierzy upływ czasu pomiędzy dwoma sygnałami z sondy kosmicznej i otrzymuje wynik $23{,}9\ \mathrm{h}$. Na pokładzie sondy odcinek czasu między tymi samymi dwoma sygnałami wynosi dokładnie $24\ \mathrm{h}$.
a. Oblicz wartość γ odpowiadającą tej sytuacji;
b. Co się nie zgadza w otrzymanym wyniku?
c. Które założenia są błędne?

75. a. Jak długo zajmie astronaucie z Przykładu 5.5 przebycie $4{,}3$ roku świetlnego z prędkością $0{,}999\,44c$ (mierzoną przez obserwatora na Ziemi)?
b. Jaki upływ czasu zaobserwuje astronauta?
c. Sprawdź, czy oba te wyniki powiązane są czynnikiem czasoprzestrzennym $\gamma = 30$, jak zostało podane w przykładzie.

76. a. Jak szybko lekkoatleta musiałby przebiec $100\ \mathrm{m}$, aby widział, że przebiegł 100 jardów ($91{,}44\ \mathrm{m}$)?
b. Czy odpowiedź jest zgodna z faktem, że efekty relatywistyczne są trudne do zaobserwowania w codziennych warunkach? Wytłumacz.

77. Astronauta mierzy długość swojego statku i otrzymuje wynik $100\ \mathrm{m}$. Naukowiec obserwujący z Ziemi ten sam statek stwierdza, że jego długość wynosi jedynie $25\ \mathrm{m}$.
a. Oblicz wartość czynnika γ dla tej sytuacji;
b. Jaka jest prędkość statku względem Ziemi?

78. Zegar na statku kosmicznym tyka raz na dziesięć tyknięć tego samego zegara na powierzchni Ziemi. Jaka jest prędkość statku względem Ziemi?

79. Podczas badania lekarskiego tętno astronauty wynosi 66 uderzeń na minutę. Tętno jest mierzone ponownie, gdy astronauta znajduje się na pokładzie statku kosmicznego lecącego z prędkością $0{,}5c$ względem Ziemi. Następnie pomiary tętna przeprowadzane są przez drugiego astronautę (A) znajdującego się na statku razem z badanym i zdalnie, przez lekarza na Ziemi (B).
a. Zaproponuj metodę pomiarową, dzięki której lekarz (B) mógłby dokonać zdalnego pomiaru tętna astronauty;
b. Jakie tętna zarejestrują obserwatorzy A i B?

80. Statek kosmiczny (A) porusza się z prędkością $c/2$ względem drugiego statku (B). Obserwatorzy na statkach A i B ustawiają swoje zegary w taki sposób, że zdarzenie – włączenie lasera, określone przez współrzędne (x, y, z, t), w przypadku obu obserwatorów będzie miało współrzędne $(0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{s})$. Obserwator B włącza laser dla $t = 0\ \mathrm{s}$ i wyłącza dla $t = \theta$ w swoim układzie. Ile będzie wynosił upływ czasu między tymi zdarzeniami zarejestrowany przez obserwatora A?

81. Weźmy pod uwagę obserwatorów z poprzedniego zadania. W układzie obserwatora A w czasie $t = 0\ \mathrm{s}$ na początku układu pojawia się foton; w tym samym czasie pojawia się inny foton o współrzędnych $(1\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m}, 0\ \mathrm{m})$.
a. Oblicz współrzędne czasowe i przestrzenne tych dwóch zdarzeń w układzie odniesienia obserwatora B;
b. W którym układzie zdarzenia te są jednoczesne, a w którym nie?

82. Ponownie weźmy pod uwagę obserwatorów z

poprzednich zadań. Pręt o długości $1\,\mathrm{m}$ zostaje położony na osi x układu odniesienia obserwatora B, zaczynając od początku, aż do $x = 1\,\mathrm{m}$. Jaka jest długość pręta widziana z układu odniesienia obserwatora B?

83. Obserwator znajdujący się na początku inercjalnego układu odniesienia S widzi błysk światła o współrzędnych $x = 150\,\mathrm{km}$, $y = 15\,\mathrm{km}$ i $z = 1\,\mathrm{km}$ w momencie $t = 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$. Jakie są współrzędne czasowe i przestrzenne tego zdarzenia w układzie S', jeżeli S' porusza się wzdłuż osi x (wspólnej dla układu S) z prędkością $v = 0{,}6c$?

84. Obserwator widzi dwa zdarzenia oddalone od siebie o $1{,}5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$ w czasie i $800\,\mathrm{m}$ w przestrzeni. Jak szybko musi się poruszać drugi obserwator względem pierwszego, aby te dwa zdarzenia zachodziły dla niego jednocześnie?

85. Obserwator stojący przy torach widzi dwa pioruny uderzające jednocześnie w końce $500\,\mathrm{m}$ pociągu w momencie, gdy środek pociągu mija go z prędkością $50\,\mathrm{m\,/\,s}$. Wykorzystaj transformację Lorentza do obliczenia czasu pomiędzy uderzeniami piorunów, mierzonego przez pasażera siedzącego pośrodku pociągu.

86. Dwa zdarzenia astronomiczne obserwowane z Ziemi zachodzą w odstępie $1\,\mathrm{s}$ i są oddalone od siebie o $1{,}5 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}$.
a. Ustal, czy separacja zdarzeń jest czasowa, czy przestrzenna;
b. Określ, jaki ma to wpływ na zgodność ze szczególną teorią względności.

87. Dwa zdarzenia astronomiczne obserwowane z Ziemi zachodzą w odstępie $0{,}3\,\mathrm{s}$ i są oddalone od siebie o $2 \cdot 10^{9}\,\mathrm{m}$. Jak szybko musi przemieszczać się statek kosmiczny od jednego zdarzenia w stronę drugiego, aby zachodziły one dla niego jednocześnie?

88. Oglądany z Ziemi statek kosmiczny będący w spoczynku zaczyna przemieszczać się ruchem jednostajnie przyspieszonym z przyspieszeniem równym g do momentu osiągnięcia prędkości $c/2$.
a. Udowodnij, że zmiana czasu własnego jest związana ze zmianą czasu na Ziemi następującą zależnością: $\mathrm{d}\tau = \sqrt{1 - v^2\,/\,c^2}\,\mathrm{d}t$;
b. Znajdź wzór na czas potrzebny statkowi na osiągnięcie prędkości $c/2$ mierzony z powierzchni Ziemi.

89. a. Praktycznie wszystkie galaktyki oddalają się od naszej Drogi Mlecznej. Jeżeli galaktyka znajdująca się $12 \cdot 10^{9}$ lat świetlnych od naszej oddala się z prędkością $0{,}9c$, to z jaką prędkością musimy wysłać sondę, aby poruszała się w kierunku tej galaktyki z prędkością $0{,}99c$ względem niej?
b. Ile czasie zajmie sondzie dotarcie do tej galaktyki? Możesz założyć, że prędkość naszej galaktyki jest stała;
c. Ile czasu zajmie przesłanie sygnału z powrotem do naszej galaktyki?

90. Załóżmy, że statek kosmiczny wracający na Ziemię z prędkością $0{,}75c$ może wystrzelić kanister z prędkością $0{,}5c$ względem statku.
a. Jaka jest prędkość kanistra względem Ziemi, jeżeli został on wystrzelony w jej kierunku?
b. Jaka będzie ta prędkość, jeżeli kanister zostanie wystrzelony w przeciwnym kierunku?

91. Jakie będą prędkości z podpunktów (a) i (b) poprzedniego zadania, jeżeli statek będzie się oddalał od Ziemi?

92. Jeżeli statek porusza się w kierunku Ziemi z prędkością $0{,}1c$ i wysyła kapsułę w stronę Ziemi z prędkością $0{,}1c$ względem Ziemi, to jaka jest prędkość kapsuły względem statku?

93. a. Załóżmy, że prędkość światła wynosi jedynie $3000\,\mathrm{m\,/\,s}$. Myśliwiec poruszający się w stronę celu na Ziemi z prędkością $800\,\mathrm{m\,/\,s}$ wystrzeliwuje pociski, z których każdy ma prędkość wylotową $1000\,\mathrm{m\,/\,s}$. Jaka jest prędkość pocisku względem celu?
b. Jeżeli prędkość światła byłaby tak mała, to czy efekty relatywistyczne byłyby widoczne na co dzień? Omów zagadnienie.

94. Załóżmy, że galaktyka oddala się od Ziemi z prędkością $1000\,\mathrm{km\,/\,s}$ i wysyła sygnał świetlny o długości fali równej $656\,\mathrm{nm}$, charakterystycznej dla wodoru (najczęściej występujący pierwiastek we Wszechświecie).
a. Jaką długość fali zaobserwujemy na Ziemi?
b. Do jakiej grupy fal elektromagnetycznych możemy zaliczyć fale o takich długościach?
c. Dlaczego możemy pominąć prędkość orbitowania Ziemi wokół Słońca?

95. Sonda kosmiczna porusza się w stronę najbliższej gwiazdy z prędkością $0{,}25c$. W trakcie lotu wysyła sygnał o częstotliwości $1\,\mathrm{GHz}$. Jaką częstotliwość zaobserwujemy, gdy sygnał dotrze na Ziemię?

96. W pobliżu centrum naszej galaktyki wodór w formie gazowej oddala się od nas, orbitując wokół czarnej dziury. Otrzymujemy sygnał elektromagnetyczny o długości fali $1900\,\mathrm{nm}$. Jeżeli wiemy, że początkowo sygnał miał długość $1875\,\mathrm{nm}$, to jaka jest prędkość gazu?

97. a. Oblicz prędkość pyłku o masie $1\,\mathrm{\mu g}$, który ma taki sam pęd jak proton poruszający się z prędkością $0{,}999c$;
b. Co otrzymany wynik mówi nam o masie protonu w porównaniu z nawet najmniejszą ilością makroskopowej materii?

98. a. Oblicz czynnik γ protonu, którego pęd wynosi $1\,\mathrm{kg\,m\,/\,s}$;
b. Jaka jest jego prędkość? Takie protony wchodzą w skład promieniowania kosmicznego o nieznanym pochodzeniu.

99. a. Wykaż, że relatywistyczne ujęcie drugiej

zasady dynamiki Newtona wyraża się wzorem $F = m \Big/ \left(1 - u^2 / c^2\right)^{3/2} \cdot \mathrm{d}u / \mathrm{d}t$;
b. Oblicz siłę potrzebną do przyspieszenia masy $1\ \mathrm{kg}$ o $1\ \mathrm{m} \Big/ \mathrm{s}^2$, gdy porusza się ona z prędkością $c/2$.

100. Pozyton jest antycząstką elektronu, posiadającą taką samą masę. Gdy pozyton i elektron się spotykają, ulegają anihilacji, a ich masy zostają przekształcone w energię.
a. Oblicz energię uwolnioną w trakcie takiego zdarzenia, zakładając, że możemy pominąć wpływ energii kinetycznej;
b. Jeżeli energię tę skierować do pozytonu w formie energii kinetycznej, to jaką prędkość osiągnie pozyton?
c. Jaką prędkość osiągnie elektron, jeżeli otrzyma on uwolnioną energię w formie energii kinetycznej?

101. Ile wynosi energia kinetyczna w MeV pionu, którego czas życia wynosi $1{,}4 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}$, gdy mierzymy go w laboratorium, i $0{,}84 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{s}$, gdy pomiaru dokonujemy w układzie spoczynkowym pionu? Jego energia spoczynkowa wynosi $135\ \mathrm{MeV}$.

102. Oblicz energię kinetyczną neutronu o zmierzonym czasie życia równym $2065\ \mathrm{s}$, wiedząc, że jego energia spoczynkowa wynosi $939{,}6\ \mathrm{MeV}$, a czas życia mierzony w układzie spoczynkowym wynosi $900\ \mathrm{s}$. Wynik podaj w MeV.

103. a. Udowodnij, że $(pc)^2 \Big/ \left(mc^2\right)^2 = \gamma^2 - 1$. Co oznacza, że dla dużych prędkości $pc \gg mc^2$?
b. Czy $E \approx pc$ dla $\gamma = 30$, jak w przypadku astronautki z paradoksu bliźniąt?

104. Pewien neutron wchodzący w skład promieniowania kosmicznego osiąga prędkość $0{,}25c$ względem Ziemi.
a. Jaka jest energia całkowita elektronu? Wynik podaj w MeV;
b. Oblicz pęd neutronu;
c. Czy $E \approx pc$ w tej sytuacji? Omów to zagadnienie w odniesieniu do podpunktu (a) poprzedniego zadania.

105. Jaki jest czynnik γ protonu o energii $938{,}3\ \mathrm{MeV}$ przyspieszonego za pomocą potencjału $1\ \mathrm{TV}$ (terawolt)?

106. a. Jaka jest wartość napięcia przyspieszającego dla elektronów w akceleratorze SLAC, jeśli $\gamma = 10^5$?
b. Jaka jest całkowita energia elektronów (praktycznie taka sama jak energia kinetyczna) wyrażona w GeV?

107. a. Wykorzystując dane z m65776 (https://cnx.org/content/m65776/latest/#fs-id1165039443587) , oblicz ubytek masy w beczce ropy naftowej po uwolnieniu energii;
b. Wiedząc, że beczki te mieszczą $200\ \mathrm{l}$ ropy naftowej o gęstości $750\ \mathrm{kg} \Big/ \mathrm{m}^3$, określ, jaki jest stosunek ubytku masy do masy początkowej $(\Delta m / m)$.

108. a. Oblicz energię uwolnioną podczas zniszczenia $1\ \mathrm{kg}$ masy;
b. Jak dużo kilogramów musiałoby zostać podniesionych na wysokość $10\ \mathrm{km}$, aby uzyskać taką samą ilość energii?

109. Akcelerator Van de Graffa wykorzystuje różnicę potencjałów $50\ \mathrm{MV}$ do przyspieszania naładowanych cząstek (np. protonów).
a. Jaka jest prędkość protonu przyspieszonego przez takie napięcie?
b. Jaka zaś w przypadku elektronu?

110. Załóżmy, że średnio w swoim mieszkaniu zużywasz $500\ \mathrm{kW\ h}$ energii elektrycznej miesięcznie.
a. Na jak długo starczyłoby energii elektrycznej pozyskanej z rozpadu $1\ \mathrm{g}$ masy ze sprawnością $38\ \%$ na zasilanie twojego mieszkania?
b. Jak wiele domów miałoby zapewnioną elektryczność na rok, z wykorzystania tego samego źródła energii?

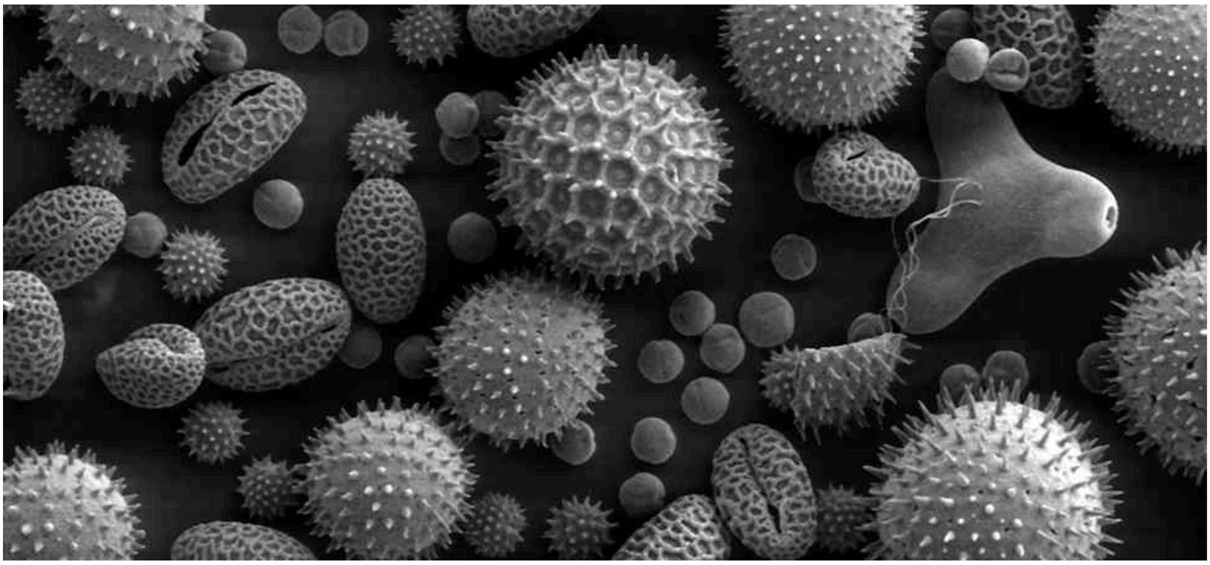
111. a. Elektrownia jądrowa przekształca energię z rozszczepienia jądrowego w elektryczność ze sprawnością $35\ \%$. Jaka masa ulega rozszczepieniu w ciągu jednego roku do produkcji ciągłej mocy $1000\ \mathrm{MW}$?
b. Czy uważasz, że możliwe byłoby zaobserwowanie ubytku masy przy początkowej masie paliwa $10^4\ \mathrm{kg}$?

112. Przez pewien czas rozważano projekt rakiet z napędem jądrowym, ale został on porzucony ze względu na kwestie bezpieczeństwa.
a. Jaki ułamek masy rakiety musiałby zostać zniszczony, aby wynieść ją na niską orbitę Ziemi? Pomiń zmniejszenie przyspieszenia grawitacyjnego oraz przyjmij $250\ \mathrm{km}$ za wysokość orbity;
b. Oblicz energię kinetyczną (klasyczną) i energię potencjalną w polu grawitacyjnym.

113. Poprzez syntezę wodoru Słońce produkuje energię z mocą $3{,}85 \cdot 10^{26}\ \mathrm{W}$. Około $0{,}7\ \%$ każdego kilograma wodoru jest przekształcane w energię produkowaną przez Słońce.
a. Ile kilogramów wodoru poddawane jest syntezie w każdej sekundzie?
b. Jeżeli Słońce składa się w $90\ \%$ z wodoru i bez zmiany obecnego stadium ewolucji może spalić połowę swojej masy, to jak długo jest w stanie produkować energię w aktualnym tempie?
c. Ile kilogramów masy traci Słońce w każdej sekundzie?
d. Jaką część swojej masy straci Słońce w czasie obliczonym w podpunkcie (b)?

114. Wykaż, że $E^2 - p^2c^2$ dla cząstki jest niezmiennikiem transformacji Lorentza.

6 | FOTONY I FALE MATERII



Rysunek 6.1 Na tym wykonanym mikroskopem elektronowym zdjęciu, przedstawiającym ziarnka pyłku, drobiny w kształcie fasoli mają około $50\,\mu m$ długości. Mikroskop elektronowy ma dużo większą zdolność rozdzielczą niż konwencjonalne mikroskopy optyczne, gdyż długość fali elektronu może być około $100\,000$ razy mniejsza niż długość fali odpowiadająca światłu widzialnemu. Źródło: modyfikacja pracy wykonanej przez Dartmouth College Electron Microscope Facility

Treść rozdziału

Wstęp

Dwie z najbardziej rewolucyjnych idei dwudziestowiecznej nauki polegały na opisie światła jako zbioru cząstek oraz na przypisaniu cząstkom właściwości falowych. Falowy opis materii pozwolił na wynalezienie technologii takich jak mikroskopia elektronowa, pozwalająca nam badać obiekty o rozmiarach dużo mniejszych niż w przypadku tradycyjnych mikroskopów, na przykład pokazane na zdjęciu powyżej ziarna pyłku roślin.

W rozdziale tym poznasz pojęcie kwantu energii, wprowadzone w 1900 roku przez niemieckiego fizyka Maxa Plancka, w celu wytłumaczenia zjawiska promieniowania ciała doskonale czarnego. Omówimy także sposób, w jaki Albert Einstein rozszerzył wprowadzone przez Plancka pojęcie na kwanty światła – fotony – aby wyjaśnić efekt fotoelektryczny. Pokażemy też, jak amerykański fizyk Arthur H. Compton wykorzystał w roku 1923 pojęcie fotonu do wyjaśnienia zmiany długości fali obserwowanej w rozpraszaniu promieni rentgenowskich. Po przedyskutowaniu modelu atomu wodoru Bohra opiszemy uzasadniające go pojęcie fal materii, wprowadzone przez Louisa-Victora de Broglie’a. Przeanalizujemy również doświadczenia przeprowadzone w latach 1923–1927 przez Clintona Davissona i Lestera Germera, potwierdzające istnienie fal de Broglie’a.

6.1 | Promieniowanie ciała doskonale czarnego

Cel dydaktyczny

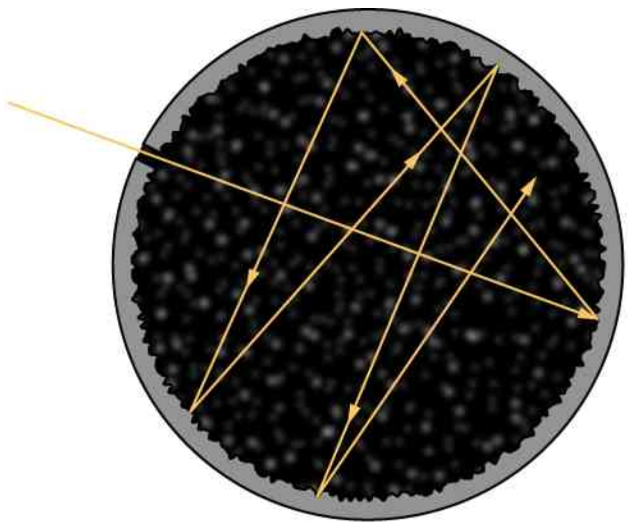
W tym podrozdziale nauczysz się:

- stosować prawa Wiena i Stefana-Boltzmanna do analizy promieniowania ciała doskonale czarnego;
- wyjaśniać hipotezę Plancka dotyczącą kwantów energii.

Wszystkie ciała emitują promieniowanie elektromagnetyczne o szerokim zakresie długości fal. W jednym z wcześniejszych rozdziałów dowiedzieliśmy się, że zimniejsze ciało wypromieniowuje mniej energii niż ciało cieplejsze. Z doświadczenia wiemy także, że gdy ciało jest podgrzewane i jego temperatura rośnie, obserwowana barwa promieniowania emitowanego przez nie zmienia się z podczerwonej na czerwoną, z czerwonej na pomarańczową i tak dalej. Wraz ze wzrostem temperatury rozgrzane ciało przybiera barwy odpowiadające coraz mniejszym długościom fal. Jest to podstawowa zasada działania żarówki: gorące metalowe włókno najpierw świeci na czerwono, a gdy rozgrzewa się bardziej, emitowane przez nie światło obejmuje całe widzialne widmo fal elektromagnetycznych. Temperatura (T) obiektu emitującego promieniowanie, zwanego **emiterem** (ang. **emitter**), determinuje długość fali odpowiadającej maksimum wypromieniowanej energii. Przykładowo Słońce, którego powierzchnia ma temperaturę pomiędzy 5000 K a 6000 K, promieniuje najmocniej w zakresie fal o długości około 560 nm, w widzialnej części spektrum elektromagnetycznego. Twoje ciało, gdy ma normalną temperaturę, około 300 K, promieniuje najmocniej w zakresie podczerwonej części spektrum.

Promieniowanie padające na obiekt jest częściowo absorbowane, a częściowo odbijane. W równowadze termodynamicznej szybkość, z jaką ciało absorbuje promieniowanie jest taka sama jak szybkość, z jaką je emituje. Dlatego dobry **absorber** promieniowania jest także dobrym emiterem. Idealny absorber pochłania całe padające na niego promieniowanie; nazywamy go **ciałem doskonale czarnym** (ang. **blackbody**).

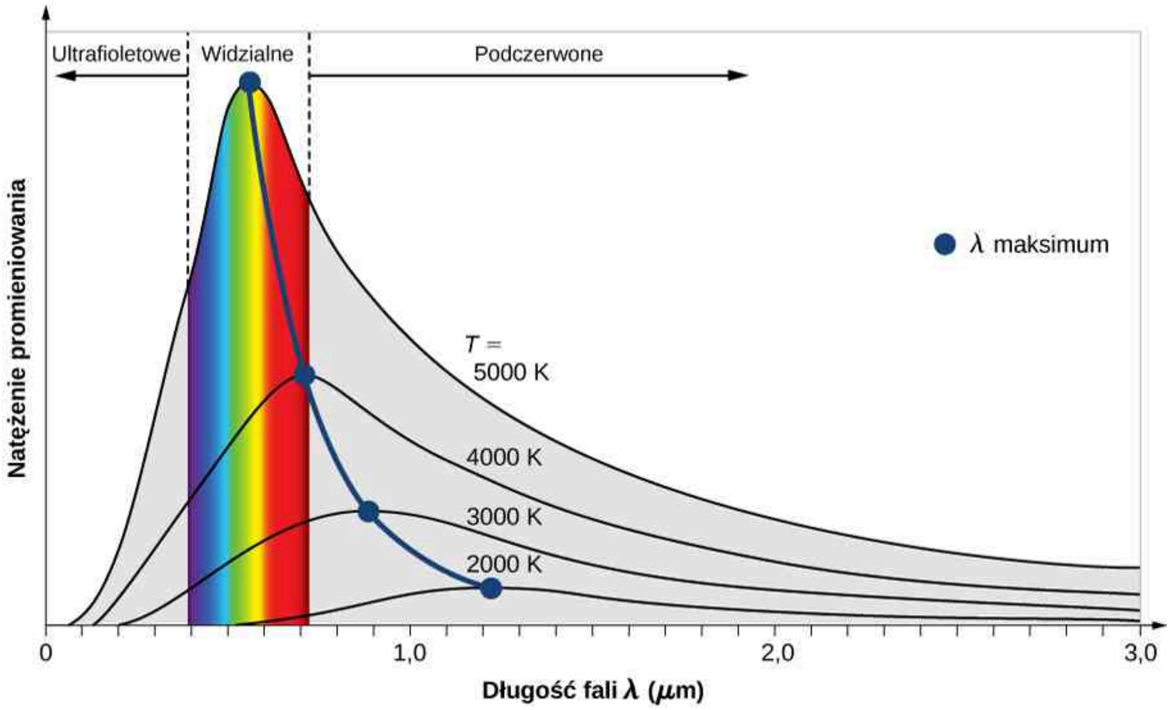
Ponieważ żaden rzeczywisty materiał nie absorbuje 100% promieniowania, ciało doskonale czarne jest tylko pewną idealizacją. Można jednak zbudować zachowujący się bardzo podobnie model w postaci wnęki z niewielkim otworem, której wewnętrzna powierzchnia jest pomalowana na czarno, jak pokazano na Rysunku 6.2. Fale elektromagnetyczne wpadające do takiej wnęki, odbijają się wielokrotnie i są niemal w całości pochłaniane. W stanie równowagi termodynamicznej (w temperaturze T) ściany wnęki absorbują dokładnie tyle samo promieniowania, co emitują. Mierzone spektrum emisji jest bardzo bliskie spektrum ciała doskonale czarnego. Fale elektromagnetyczne emitowane przez ciało doskonale czarne nazywamy **promieniowaniem ciała doskonale czarnego** (ang. **blackbody radiation**).



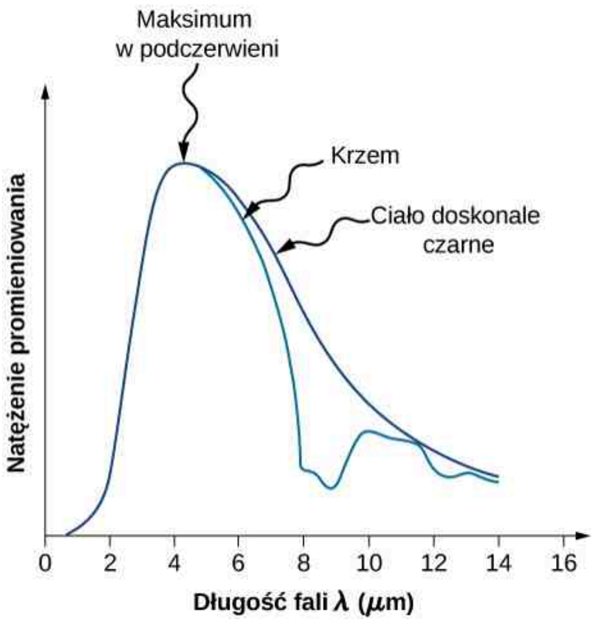
Rysunek 6.2 Dobrym modelem ciała doskonale czarnego jest wnęka z niewielkim otworem.

Natężenie $I(\lambda, T)$ promieniowania ciała doskonale czarnego zależy od długości fali λ emitowanego promieniowania oraz od temperatury T tego ciała (Rysunek 6.3). Funkcja $I(\lambda, T)$ opisuje **natężenie** (ang. **power intensity**) przypadające na jednostkę długości fali; innymi słowy moc promieniowania na jednostkę powierzchni otworu we wnęce, przez którą emitowane jest promieniowanie, na jednostkę długości fali. Zgodnie z tą definicją $I(\lambda, T)\,\mathrm{d}\lambda$ wyraża moc promieniowania na jednostkę powierzchni, wyemitowanego w przedziale długości fal od λ do $\lambda + \mathrm{d}\lambda$. Rozkład natężenia

w funkcji długości fali promieniowania emitowanego przez wnęki badany był eksperymentalnie pod koniec dziewiętnastego wieku. Stwierdzono, że rozkład taki tylko w przybliżeniu odpowiada rozkładowi natężenia promieniowania ciała doskonale czarnego (Rysunek 6.4). Z dużą dokładnością natomiast wykresy natężenia promieniowania pochodzącego z gwiazd odpowiadają wykresom opisującym promieniowanie ciała doskonale czarnego.



Rysunek 6.3 Natężenie promieniowania ciała doskonale czarnego w funkcji długości wyemitowanej fali. Każda krzywa odpowiada innej temeraturze ciała, zaczynając od niskiej temperatury (najniższa krzywa), kończąc na wysokiej (najwyższa).



Rysunek 6.4 Spektrum promieniowania wyemitowanego przez powierzchnię kwarcową (niebieska krzywa) oraz przez ciało doskonale czarne (czarna krzywa) w temperaturze $600\,\mathrm{K}$.

W doświadczeniach z promieniowaniem ciała doskonale czarnego można zaobserwować dwa istotne prawa: prawo

przesunięć Wiena oraz prawo Stefana-Boltzmanna. Pierwsze z nich zilustrowane jest krzywą łączącą maksima krzywych natężenia (Rysunek 6.3). Na wykresie widzimy, że im gorętsze ciało, tym mniejsza długość fali odpowiadającej maksimum natężenia. Ilościowo prawo Wiena opisujemy następującym wzorem

$$\lambda_{\text{max}} T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m K}, \tag{6.1}$$

gdzie λ_{max} jest długością fali odpowiadającą maksimum rozkładu spektralnego promieniowania, zwanego też krzywą promieniowania. Innymi słowy, λ_{max} jest długością fali, przy której ciało doskonale czarne promieniuje najsilniej w danej temperaturze T. Zauważmy, że w tym wzorze (Równanie 6.1) temperatura wyrażona jest w kelwinach. Prawo przesunięć Wiena pozwala nam oszacować temperaturę odległych gwiazd poprzez pomiar długości emitowanego przez nie promieniowania.

Przykład 6.1

Temperatura odległych gwiazd

Przy bezchmurnym niebie w zimowe miesiące na półkuli północnej obserwować można konstelację Oriona. Jedna z gwiazd tej konstelacji, **Rigel**, świeci na niebiesko, natomiast druga – **Betelgeza** (ang. **Betelgeuse**) – ma kolor lekko czerwony (Rysunek 6.5). Która z tych gwiazd jest chłodniejsza, Betelgeza czy Rigel?

Strategia rozwiązania

Wiemy, że promieniowanie gwiazd opisywane jest tak samo jak promieniowanie ciała doskonale czarnego. Zgodnie z prawem Wiena ich temperatura jest odwrotnie proporcjonalna do długości fali odpowiadającej maksimum natężenia. Długość fali $\lambda^{\text{n}}_{\text{max}}$ światła niebieskiego jest mniejsza niż $\lambda^{\text{cz}}_{\text{max}}$ światła czerwonego. Nawet nie znając dokładnych wartości, możemy znaleźć relację między odpowiadającymi im temperaturami.

Rozwiązanie

Stosując prawo Wiena dla niebieskiej i czerwonej gwiazdy, otrzymujemy

$$\lambda^{\text{cz}}_{\text{max}} T_{\text{cz}} = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m K} = \lambda^{\text{n}}_{\text{max}} T_{\text{n}}. \tag{6.2}$$

Po uproszczeniu Równanie 6.2 daje nam

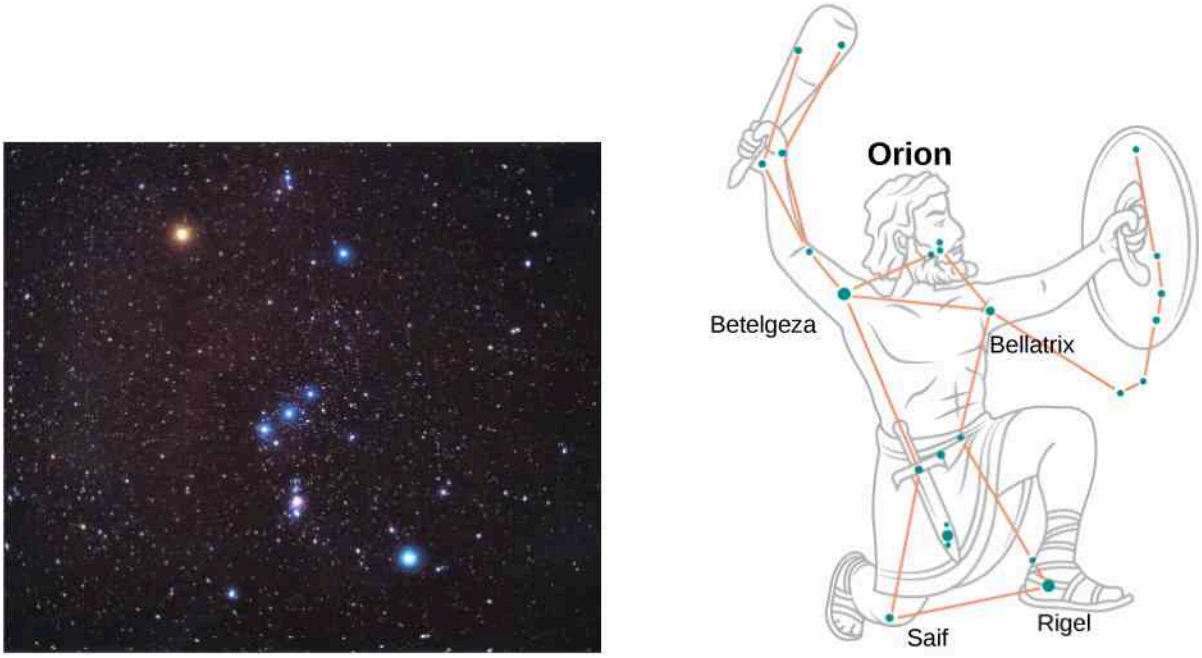
$$T_{\text{cz}} = \frac{\lambda^{\text{n}}_{\text{max}}}{\lambda^{\text{cz}}_{\text{max}}} T_{\text{n}} < T_{\text{n}}. \tag{6.3}$$

Wynika stąd, że Betelgeza jest zimniejsza niż Rigel.

Znaczenie

Zauważmy, że prawo Wiena mówi nam, iż wyższej temperaturze ciała emitującego promieniowanie odpowiada krótsza fala tego promieniowania. Jakościowa analiza zaprezentowana w tym przykładzie jest słuszna w odniesieniu do jakiegokolwiek ciała, niezależnie od tego, czy jest to olbrzymi obiekt, taki jak gwiazda, czy niewielki – taki jak włókno żarowe w żarówce.

6.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Płomień świecy zapachowej ma kolor żółtawy, a płomień palnika Bunsena w laboratorium chemicznym ma kolor niebieskawy. Który płomień ma wyższą temperaturę?



Rysunek 6.5 W gwiazdozbiorze Oriona widoczna w lewym górnym rogu Betelgeza jest czerwonym nadolbrzymem, a widoczny w prawym dolnym rogu Rigel – błękitnym nadolbrzymem.

Kolejna zależność dotycząca promieniowania ciała doskonale czarnego to **prawo Stefana-Boltzmanna** (ang. **Stefan-Boltzmann's law**). Dotyczy ono całkowitej mocy promieniowania wyemitowanego dla wszystkich długości fali przy danej temperaturze. Na wykresie z Rysunku 6.3 całkowita moc odpowiada polu powierzchni pod krzywą. Całkowita moc promieniowania wzrasta wraz z temperaturą, co wyrażone jest w prawie Stefana-Boltzmanna w następujący sposób

$$P\left(T\right)=\sigma ST^{4}, \tag{6.4}$$

gdzie S jest powierzchnią ciała doskonale czarnego, T jego temperaturą (w kelwinach), a σ jest **stałą Stefana-Boltzmanna** (ang. **Stefan-Boltzmann constant**), $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{W} \Big/ \left(\mathrm{m}^2\ \mathrm{K}^4\right)$. Prawo Stefana-Boltzmanna pozwala nam oszacować, jak dużo energii wypromieniowuje gwiazda, poprzez pomiar jej temperatury (na przykład wykorzystujący prawo Wiena).

Przykład 6.2

Moc promieniowania gwiazd

Gwiazdy takie jak nasze Słońce ewoluują poprzez fazę czerwonych olbrzymów do fazy białych karłów. Typowy biały karzeł jest mniej więcej wielkości Ziemi, a temperatura jego powierzchni to w przybliżeniu $2{,}5 \cdot 10^4\ \mathrm{K}$. Temperatura powierzchni typowego czerwonego olbrzyma to $3 \cdot 10^3\ \mathrm{K}$, a jego promień jest około $100\,000$ razy większy niż u białego karła. Jaka jest średnia moc promieniowania na jednostkę powierzchni i całkowita emitowana moc tego typu gwiazd? Jak mają się one do siebie?

Strategia rozwiązania

Wiedząc, że gwiazdę można traktować w przybliżeniu jak ciało doskonale czarne, możemy do opisu jej promieniowania zastosować prawo Stefana-Boltzmanna, mówiące o tym, że całkowita moc promieniowania proporcjonalna jest do czwartej potęgi temperatury. Aby wyznaczyć moc wypromieniowaną przez jednostkę powierzchni gwiazdy, nie musimy robić żadnych założeń co do jej kształtu, ponieważ $P \,/\, S$ zależy tylko od temperatury. Jednak aby wyznaczyć całkowitą moc, musimy założyć, że energia wypromieniowana jest przez powierzchnię w kształcie sfery o polu $S = 4\pi R^2$, gdzie R jest jej promieniem.

Rozwiązanie

Możemy zapisać prostą proporcję, wynikającą z prawa Stefana-Boltzmanna (gdzie literami b.k. oznaczyliśmy wielkości odnoszące się do białego karła, a c.o. – do czerwonego olbrzyma)

$$\frac{P_{\text{b.k.}} \,/\, S_{\text{b.k.}}}{P_{\text{c.o.}} \,/\, S_{\text{c.o.}}} = \frac{\sigma T_{\text{b.k.}}^4}{\sigma T_{\text{c.o.}}^4} = \left(\frac{T_{\text{b.k.}}}{T_{\text{c.o.}}}\right)^4 = \left(\frac{2{,}5 \cdot 10^4\ \text{K}}{3 \cdot 10^3\ \text{K}}\right)^4 = 4820. \tag{6.5}$$

Moc emitowana przez jednostkę powierzchni białego karła jest około 5000 razy większa niż w przypadku czerwonego olbrzyma. Oznaczając ten stosunek przez $\alpha = 4{,}82 \cdot 10^3$, ze wzoru (Równanie 6.5) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{P_{\text{b.k.}}}{P_{\text{c.o.}}} &= \alpha \frac{S_{\text{b.k.}}}{S_{\text{c.o.}}} = \alpha \frac{4\pi R_{\text{b.k.}}^2}{4\pi R_{\text{c.o.}}^2} = \alpha \left(\frac{R_{\text{b.k.}}}{R_{\text{c.o.}}}\right)^2 \\ &= 4{,}82 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{R_{\text{b.k.}}}{10^5 R_{\text{b.k.}}}\right)^2 = 4{,}82 \cdot 10^{-7}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Widzimy, że całkowita moc promieniowania, emitowanego przez białego karła jest bardzo niewielka w porównaniu z mocą promieniowania emitowanego przez czerwonego olbrzyma. Mimo że temperatura czerwonego olbrzyma jest niższa, całkowita moc promieniowania jest dużo większa dzięki dużo większej powierzchni. Aby oszacować wartość mocy promieniowania na jednostkę powierzchni, skorzystamy ponownie z prawa Stefana-Boltzmanna. Dla białego karła otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{P_{\text{b.k.}}}{S_{\text{b.k.}}} &= \sigma T_{\text{b.k.}}^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \text{W} \Big/ \left(\text{m}^2\,\text{K}^4\right) \cdot \left(2{,}5 \cdot 10^4\ \text{K}\right)^4 \\ &= 2{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{W} \Big/ \text{m}^2. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Wynik dla czerwonego olbrzyma uzyskamy, korzystając z poprzednio wyznaczonego stosunku

$$\frac{P_{\text{c.o.}}}{S_{\text{c.o.}}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{W} \big/ \text{m}^2}{4{,}82 \cdot 10^3} = 4{,}56 \cdot 10^6\ \text{W} \big/ \text{m}^2 \cong 4{,}6 \cdot 10^6\ \text{W} \big/ \text{m}^2. \tag{6.8}$$

Znaczenie

Aby wyznaczyć całkowitą moc emitowaną przez gwiazdę, moglibyśmy użyć wzoru (Równanie 6.7). Jednak aby wyznaczyć potrzebne pole powierzchni, musielibyśmy znać promień tej gwiazdy, który w naszym przykładzie nie jest podany; zakończymy więc w tym miejscu nasze rozważania.

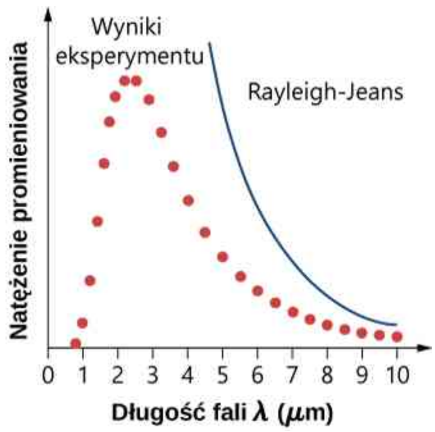
6.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Rozgrzewamy żelazny pogrzebacz. Gdy jego temperatura wzrasta, pogrzebacz zaczyna świecić – najpierw jest ciemnoczerwony, z czasem staje się jasnoczerwony, pomarańczowy, a później żółty. Wyjaśnij, czemu tak się dzieje, korzystając z rozkładu spektralnego promieniowania ciała doskonale czarnego lub prawa Wiena.

6.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że dwie gwiazdy α i β, emitują promieniowanie o takiej samej mocy całkowitej. Jaki jest stosunek temperatur na ich powierzchni, jeśli promień gwiazdy α jest trzy razy większy niż gwiazdy β? Która gwiazda jest gorętsza?

Pojęcie „ciała doskonale czarnego” zostało po raz pierwszy użyte przez **Gustava R. Kirchhoffa (1824–1887)** w 1862 roku. Rozkład spektralny promieniowania (lub krzywa promieniowania) takiego ciała był znany eksperymentalnie, lecz wyjaśnienie jego kształtu nastąpiło dopiero w roku 1900. Próbując zrozumieć cechy promieniowania ciała doskonale czarnego o temperaturze T, posłużmy się modelem fizycznym w postaci fal elektromagnetycznych zamkniętych we wnęce (obejrzyj Rysunek 6.2), znajdujących się w stanie równowagi termodynamicznej ze ściankami tej wnęki. Naszym celem jest znalezienie rozkładu gęstości energii niesionej przez fale o określonej długości. Gdy poznamy ten rozkład, będziemy mogli posłużyć się metodami statystycznymi (podobnymi do tych, z których korzystaliśmy w

poprzednim rozdziale), aby otrzymać krzywą promieniowania cała doskonale czarnego, prawo Stefana-Boltzmanna oraz prawo przesunięć Wiena. Jeśli nasz model jest właściwy, uzyskane w ten sposób przewidywania powinny pokrywać się z danymi doświadczalnymi.

W klasycznym podejściu do problemu promieniowania ciała doskonale czarnego promieniowanie elektromagnetyczne traktuje się jak fale (tak jak to czyniliśmy w poprzednich rozdziałach). Mody fal elektromagnetycznych uwięzionych we wnęce znajdują się w stanie równowagi termodynamicznej i wymieniają energię ze ściankami wnęki. Dowolna ilość energii może być przekazana ściankom przez oddziałującą z nimi falę lub – w drugą stronę – fali przez ściankę. Taki klasyczny obraz stał się podstawą modelu rozwiniętego przez Lorda Rayleigha oraz, niezależnie, przez sir Jamesa Jeansa. Uzyskana przez nich postać rozkładów spektralnych promieniowania znana jest jako prawo Rayleigha–Jeansa. Jednak, jak widać na wykresie z Rysunku 6.6, prawo to nie opisuje poprawnie wyników doświadczalnych. W granicy krótkich fal, w obszarze ultrafioletowym, prawo Rayleigha-Jeansa przewiduje nieskończone natężenie promieniowania, co w oczywisty sposób jest niezgodne z eksperymentem. Ta rozbieżność, nazywana **katastrofą w ultrafiolecie** (ang. **ultraviolet catastrophe**), dowodzi, że klasyczna fizyka nie jest w stanie opisać mechanizmu promieniowania ciała doskonale czarnego.



Rysunek 6.6 Katastrofa w ultrafiolecie: prawo Rayleigha-Jeansa nie opisuje obserwowanego spektrum promieniowania ciała doskonale czarnego.

Problem promieniowania ciała doskonale czarnego został rozwiązany w roku 1900 przez **Maxa Plancka (1858–1947)**. Podobnie jak Rayleigh-Jeans w swoim modelu, Planck rozważał klasycznie opisywane fale elektromagnetyczne w równowadze termodynamicznej ze ściankami wnęki. Nowością wprowadzoną przez Plancka było założenie, że źródłem promieniowania są drgania atomów w ściankach wnęki i że energia tych oscylacji może przybierać tylko dyskretne wartości. Wynika z tego, że promieniowanie może wymieniać energię ze ściankami wyłącznie w określonych „paczkach” energii. Hipoteza Plancka dotycząca dyskretnych wartości energii, które nazwał on kwantami, zakłada, że energia oscylatorów wewnątrz ścianek może przybierać **wartości skwantowane** (ang. **quantized energies**). Była to zupełnie nowa idea, wykraczająca poza klasyczną dziewiętnastowieczną fizykę, zgodnie z którą, jak nauczyłeś się w poprzednim rozdziale, energia oscylatora może mieć dowolną wartość. Planck założył, że energia oscylatora (E_n) może przybierać tylko dyskretne, skwantowane wartości

$$E_n = nh\nu, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.9}$$

W Równaniu 6.9 ν jest częstotliwością oscylatora. Liczba naturalna n, numerująca dyskretne stany energii, nazywana jest **liczbą kwantową** (ang. **quantum number**). Stała h nazywana jest **stałą Plancka** (ang. **Planck's constant**)

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} = 4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s}. \tag{6.10}$$

Każda z dyskretnych wartości energii odpowiada **stanowi kwantowemu oscylatora Plancka** (ang. **quantum state of**

a Planck's oscillator). Stany kwantowe numerowane są liczbami kwantowymi. Przykładowo, gdy oscylator Plancka znajduje się w pierwszym ($n = 1$) stanie kwantowym, jego energia wynosi $E_1 = h\nu$, gdy jest w stanie o $n = 2$, wartość jego energii wynosi $E_2 = 2h\nu$, gdy jest w stanie o liczbie kwantowej $n = 3$, to $E_3 = 3h\nu$ i tak dalej.

Zauważmy, że z Równania 6.9 wynika, że jest nieskończenie wiele stanów kwantowych. Możemy je zapisać w postaci następującej sekwencji: $\{h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \ldots, (n-1)h\nu, nh\nu, (n+1)h\nu, \ldots\}$. Kolejne stany kwantowe oddzielone są od siebie skokiem energii, $\Delta E = h\nu$. Oscylator w ściance wnęki może odebrać energię od promieniowania wewnątrz wnęki (absorpcja) albo oddać energię promieniowaniu (emisja). Absorpcja powoduje, że oscylator przechodzi w wyższy stan kwantowy, emisja powoduje, że oscylator spada na niższy poziom. W którąkolwiek stronę zachodzi wymiana energii, najmniejsza ilość energii, która może być wymieniona, wynosi $h\nu$. Nie ma żadnego ograniczenia co do największej ilości wymienionej energii, ale wymiana musi być równa całkowitej wielokrotności $h\nu$.

Hipoteza Plancka kwantów energii

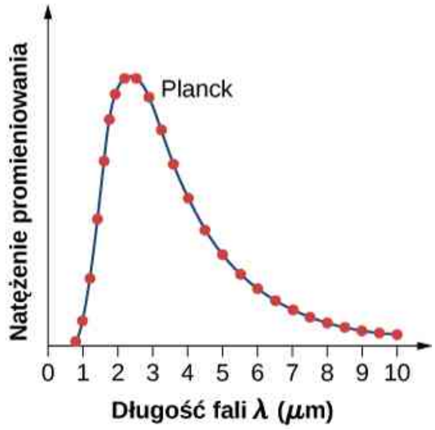
Hipoteza Plancka kwantów energii (ang. **Planck's hypothesis of energy quanta**) zakłada, że ilość energii emitowanej przez oscylator unoszona jest przez kwant promieniowania, ΔE

$$\Delta E = h\nu.$$

Przypomnijmy, że częstotliwość promieniowania elektromagnetycznego związana jest z długością jego fali oraz z prędkością światła podstawowym wzorem $\nu\lambda = c$. Oznacza to, że możemy wyrazić Równanie 6.10 przez długość fali λ. Gdy w wyprowadzeniu wzoru na gęstość energii promieniowania ciała doskonale czarnego skorzystamy z hipotezy Plancka, da nam to następującą zależność natężenia promieniowania na jednostkę długości fali

$$I(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_B T)} - 1}, \tag{6.11}$$

gdzie c jest prędkością światła w próżni, k_B jest stałą Boltzmanna, $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}$. Teoretyczne przewidywanie wyrażone wzorem (Równanie 6.11) nazywane jest prawem Plancka. Doskonale opisuje ono dane doświadczalne (spójrz na Rysunek 6.7). Także prawo przesunięć Wiena oraz prawo Stefana-Boltzmanna wynikają wprost z Równania 6.11. Aby wyprowadzić prawo Wiena, należy użyć rachunku różniczkowego, aby znaleźć maksimum funkcji opisującej natężenie $I(\lambda, T)$. Prawo oraz wartość stałej Stefana-Boltzmanna wyprowadza się, całkując $I(\lambda, T)$, aby uzyskać całkowitą moc promieniowania emitowanego przez ciało doskonale czarne w zakresach fal od $\lambda = 0\ \mu\mathrm{m}$ do $\lambda \longrightarrow \infty$. Wyprowadzenie to będzie jednym z ćwiczeń w dalszej części rozdziału.



Rysunek 6.7 Przewidywanie teoretyczne otrzymane przez Plancka (linia ciągła) i zmierzony rozkład spektralny promieniowania ciała doskonale czarnego (punkty).

Przykład 6.3

Kwantowy oscylator Plancka

Kwantowy oscylator w ścianie wnęki na Rysunku 6.2 oscyluje z częstotliwością $5 \cdot 10^{14}$ Hz. Wyznaczmy różnicę pomiędzy jego poziomami energetycznymi.

Strategia rozwiązania

Stany energetyczne oscylatora kwantowego dane są przez Równanie 6.9. Różnicę ΔE między energiami obliczamy, odejmując od siebie energie stanów o liczbach kwantowych $n+1$ oraz n.

Rozwiązanie

Możemy podstawić daną częstotliwość oraz stałą Plancka bezpośrednio do równania

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = (n+1)h\nu - nh\nu = h\nu = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \cdot 5 \cdot 10^{14}\,\mathrm{Hz} = 3{,}3 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}.$$

Znaczenie

Warto zauważyć, że nie określaliśmy, z jakiego materiału zbudowana jest ściana wnęki. Oscylator kwantowy służył nam tutaj tyko jako teoretyczny model cząsteczki takiego materiału.

6.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Cząsteczka oscyluje z częstotliwością $5 \cdot 10^{14}$ Hz. Jaka jest najmniejsza odległość między jej wibracyjnymi poziomami energetycznymi?

Przykład 6.4

Teoria kwantowa zastosowana do makroskopowego oscylatora

Ciężarek o masie 1 kg drga na końcu sprężyny o stałej sprężystości równej $1000\,\mathrm{N/m}$. Amplituda tych drgań wynosi $0{,}1$ m. Jaka jest różnica między jego poziomami energetycznymi? Czy jest ona istotna dla makroskopowych systemów, takich jak rozważany oscylator?

Strategia rozwiązania

Skorzystamy ze wzoru opisującego kwantowy oscylator (Równanie 6.10), podstawiając częstotliwość ν drgań ciężarka na sprężynie. Aby zbadać, jak istotny jest efekt kwantowania poziomów energetycznych, porównujemy przerwę między poziomami z całkowitą energią klasycznego oscylatora.

Rozwiązanie

Częstotliwość ν drgań ciężarka o masie $m = 1$ kg na sprężynie o stałej sprężystości $k = 10^3\,\mathrm{N/m}$ wynosi

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{10^3\,\mathrm{N/m}}{1\,\mathrm{kg}}} \simeq 5\,\mathrm{Hz}.$$

Kwant energii odpowiadający tej częstotliwości jest równy

$$\Delta E = h\nu = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \cdot 5\,\mathrm{Hz} = 3{,}3 \cdot 10^{-33}\,\mathrm{J}.$$

Energia drgań o amplitudzie $A = 0{,}1$ m wynosi

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 1000\,\mathrm{N/m} \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^2 = 5\,\mathrm{J}.$$

Znaczenie

Widzimy więc, że w przypadku makroskopowego oscylatora mamy $\Delta E / E \approx 10^{-34}$. Różnica poziomów energetycznych jest więc niemierzalnie mała i dla wszystkich praktycznych zastosowań można przyjąć, że energia makroskopowego oscylatora przyjmuje wartości ciągłe. Dlatego też układy makroskopowe można opisywać bez utraty dokładności, korzystając z praw fizyki klasycznej.

6.5 Sprawdź, czy rozumiesz. Czy wnioski byłyby inne niż w Przykładzie 6.4, gdyby masa wynosiła nie $1\,\mathrm{kg}$, tylko $1\,\mu\mathrm{g}$, a amplituda drgań $0{,}1\,\mu\mathrm{m}$?

Gdy Planck po raz pierwszy opublikował swoje wyniki, jego hipoteza kwantyzacji energii nie była traktowana poważnie, ponieważ nie wynikała z żadnej znanej wówczas teorii fizycznej. Była ona, nawet przez samego Plancka, odbierana raczej jako użyteczny matematyczny trik, prowadzący do dobrej teoretycznej parametryzacji danych doświadczalnych. Odbiór ten zmienił się w 1905 roku, po tym jak Einstein opublikował wyjaśnienie efektu fotoelektrycznego, w którym nadał kwantowi energii nowe znaczenie: cząstki światła.

6.2 | Efekt fotoelektryczny

Cel dydaktyczny

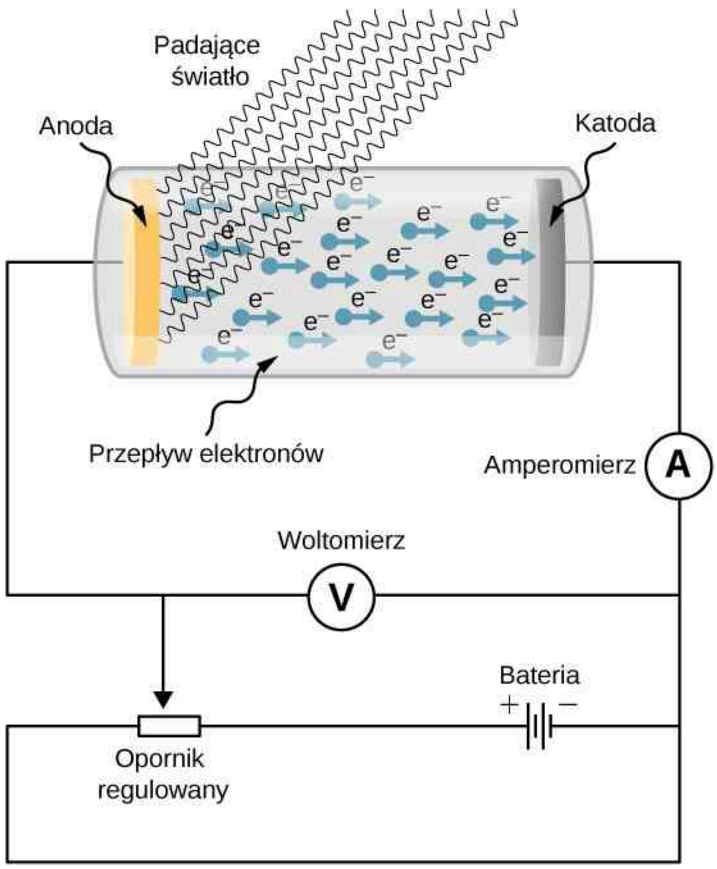
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać właściwości zjawiska fotoelektrycznego;
- wyjaśniać, dlaczego efektu fotoelektrycznego nie można wytłumaczyć na gruncie fizyki klasycznej;
- opisywać, w jaki sposób postulat Einsteina dotyczący istnienia cząstek promieniowania wyjaśnia efekt fotoelektryczny.

Gdy na metalową powierzchnię pada monochromatyczna fala elektromagnetyczna o wystarczająco małej długości fali (co odpowiada częstotliwości większej od pewnego progu), padające promieniowanie jest absorbowane, a emitowane są elektrony. Zjawisko to znane jest jako **efekt fotoelektryczny** (ang. **photoelectric effect**). Emitowane elektrony nazywane są czasem **fotoelektronami** (ang. **photoelectron**).

Układ doświadczalny do badania efektu fotoelektrycznego przedstawiony został na Rysunku 6.8. Oświetlana powierzchnia pełni rolę anody i emituje fotoelektrony, gdy pada na nią monochromatyczne promieniowanie. Nazywa się ją czasem **fotoelektrodą** (ang. **photoelectrode**). Fotoelektrony pochłaniane są przez katodę, która ma niższy od anody potencjał. Różnica potencjałów pomiędzy elektrodami może być zmniejszana lub zwiększana, można także zmienić jej znak. Elektrody umieszczone są w szklanej próżniowej rurze, aby fotoelektrony nie traciły swojej energii kinetycznej poprzez zderzenia z cząsteczkami powietrza.

Gdy na metalową płytkę nie pada promieniowanie, amperomierz wskazuje, że w układzie nie płynie prąd. Zwróćmy uwagę na to, że obwód nie jest zamknięty (pomiędzy elektrodami jest przerwa). Gdy płytka podłączona jest do ujemnego bieguna i pada na nią promieniowanie, amperomierz wskazuje przepływ prądu, czasem nazywanego **fotoprądem** (ang. **photocurrent**). W dalszej części doświadczenia odwracamy podłączone do elektrod napięcie tak, że teraz oświetlana płytka podłączona jest do dodatniego bieguna baterii, i zaczynamy wolno zwiększać napięcie. Natężenie prądu stopniowo zmniejsza się i ostatecznie, gdy napięcie osiąga pewną wartość graniczną, zwaną **napięciem hamowania** (ang. **stopping potential**), prąd przestaje płynąć.



Rysunek 6.8 Układ doświadczalny do badania efektu fotoelektrycznego. Anoda i katoda umieszczone są wewnątrz szklanej rury próżniowej. Woltomierz mierzy różnicę potencjałów między elektrodami, a amperomierz natężenie fotoprądu. Padające światło jest monochromatyczne.

Cechy efektu fotoelektrycznego

Efekt fotoelektryczny ma trzy istotne cechy, których nie da się wytłumaczyć w ramach fizyki klasycznej: (1) brak opóźnienia, (2) niezależność energii kinetycznej fotoelektronów od natężenia padającego promieniowania oraz (3) występowanie częstotliwości granicznej. Zajmijmy się teraz każdą z nich.

Brak opóźnienia

Gdy promieniowanie pada na metalową płytkę elektrody, elektrony emitowane są natychmiast, nawet przy bardzo niewielkim natężeniu promieniowania. Brak opóźnienia stoi w sprzeczności z klasyczną fizyką, w ramach której przewiduje się, że zwłaszcza przy niskim natężeniu padającego światła powinno minąć nieco czasu, zanim elektrony pobiorą wystarczającą ilość energii, aby uwolnić się z powierzchni metalu. Takie opóźnienie nie jest jednak obserwowane.

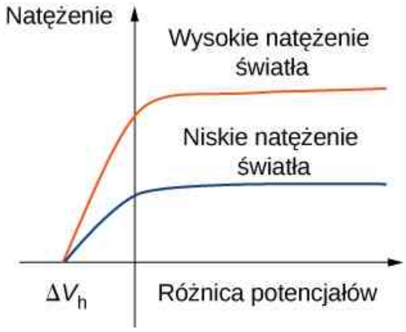
Natężenie padającego promieniowania a energia kinetyczna elektronów

Typowe krzywe eksperymentalne pokazane są na Rysunku 6.9, przedstawiającym natężenie fotoprądu w funkcji przyłożonego do elektrod napięcia. Przy dodatniej różnicy potencjałów natężenie stopniowo rośnie aż do uzyskania pewniej wartości. Dalsze zwiększanie napięcia nie powoduje wzrostu natężenia. Wyższe natężenie padającego promieniowania pociąga za sobą większe natężenie fotoprądu. Gdy różnica potencjałów jest ujemna, wzrost jej wartości absolutnej powoduje, że wartość natężenia prądu spada, aż osiąga zero przy napięciu hamowania. Wartość tego napięcia nie zależy od natężenia padającego promieniowania.

Aby zrozumieć, dlaczego tego rezultatu nie da się wytłumaczyć na gruncie fizyki klasycznej, rozważmy wpierw energię fotoelektronów. Opuszczający powierzchnię płytki fotoelektron ma energię kinetyczną E_{k0}, którą uzyskał od padającego promieniowania. W przestrzeni pomiędzy elektrodami elektron porusza się w polu elektrostatycznym, a jego energia potencjalna zmienia się o $q\Delta V$, gdzie ΔV jest różnicą potencjałów, a $q = -e$. Z zasady zachowania energii wynika więc, że $\Delta E_k - e\Delta V = 0\,\mathrm{J}$, gdzie ΔE_k jest zmianą energii kinetycznej fotoelektronu. Gdy przyłożymy napięcie hamowania $-\Delta V_h$, fotoelektron traci całą swoją energię kinetyczną E_{ki} i zatrzymuje się. Bilans energetyczny wyraża się wtedy następująco: $(0\,\mathrm{J} - E_{k0}) - e(-\Delta V_h) = 0\,\mathrm{J}$, z czego wynika, że: $E_{k0} = e\Delta V_h$. Napięcie hamowania pozwala nam więc wyznaczyć maksymalną energie kinetyczną $E_{k\,max}$ emitowanych elektronów

$$E_{\mathrm{k\,max}} = e\Delta V_{\mathrm{h}}. \tag{6.12}$$

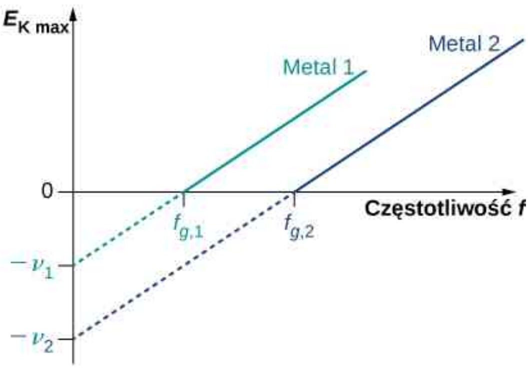
Korzystając z tego wyniku, możemy zrozumieć, dlaczego mechanika klasyczna nie tłumaczy nam wyników eksperymentu. W teorii klasycznej fotoelektron absorbuje energię w sposób ciągły, oznacza to, że gdy padające promieniowanie ma duże natężenie, energia kinetyczna także powinna być duża. Podobnie w przypadku niskiego natężenia promieniowania energia kinetyczna wybitych fotoelektronów powinna być mała. Eksperyment wskazuje jednak, że napięcie hamowania, a więc i maksymalna wartość energii kinetycznej fotoelektronów nie zależą od natężenia światła.



Rysunek 6.9 Natężenie fotoprądu w funkcji różnicy potencjałów między elektrodami. Widzimy, że niezależnie od tego, czy natężenie światła jest duże (wyższa krzywa), czy małe (niższa krzywa), wartość napięcia hamowania jest taka sama.

Częstotliwość progowa

Dla każdej metalowej powierzchni, na którą pada promieniowanie, istnieje pewna częstotliwość tego promieniowania, poniżej której nie rejestruje się fotoprądu – innymi słowy zjawisko fotoelektryczne nie zachodzi. Wielkość taką nazywamy **częstotliwością progową** (ang. **cut-off frequency**) i jest ona charakterystyczna dla danego metalu. Dane eksperymentalne pokazują liniową zależność – maksymalna energia kinetyczna fotoelektronów rośnie liniowo ze zwiększającą się częstotliwością podającego promieniowania. Pomiary dokonywane dla różnych metali dają liniową zależność z tym samym nachyleniem wykresu. Żadna z tych obserwacji nie daje się pogodzić z fizyką klasyczną, w ramach której energia kinetyczna fotoelektronów nie powinna zależeć od częstotliwości, ale od natężenia padającego światła. Fizyka klasyczna nie przewiduje także istnienia częstotliwości progowej. Ponieważ w klasycznym obrazie elektrony pobierają energię od promieniowania w sposób ciągły, ich energia kinetyczna powinna zależeć tylko od natężenia padającego światła, a efekt powinien zachodzić zawsze, niezależnie od częstotliwości.



Rysunek 6.10 Maksymalna energia kinetyczna fotoelektronów w funkcji częstotliwości podającego światła. Efekt fotoelektryczny zachodzi tylko powyżej częstotliwości progowej ν_{g} . Pomiary dają to samo nachylenie wykresu dla różnych metali. Każdy z metali ma jednak swoją częstotliwość progową.

Praca wyjścia

Efekt fotoelektryczny został wyjaśniony w 1905 roku przez **Alberta Einsteina (1879–1955).** Einstein założył, że skoro hipoteza Plancka o kwantach energii poprawnie opisywała wymianę energii między promieniowaniem elektroma-

gnetycznym i ścianami wnęki, to powinna być ona także zastosowana do opisu absorpcji promieniowania przez fotoelektrodę. Zapostulował on tezę, że fala elektromagnetyczna niesie energię w dyskretnych porcjach. Einstein rozszerzył hipotezę Plancka, postulując, że samo światło składa się z kwantów promieniowania. Innymi słowy, że fale elektromagnetyczne są skwantowane.

W podejściu Einsteina wiązka monochromatycznego światła o częstotliwości ν złożona jest z fotonów, czyli **foton** (ang. **photon**) jest cząstką światła. Każdy foton porusza się z prędkością światła i niesie kwant energii E_f. **Energia fotonów** (ang. **energy of a photon**) zależy tylko od częstotliwości ν i dana jest wzorem

$$E_\mathrm{f} = h\nu, \tag{6.13}$$

gdzie h jest stałą Plancka. W efekcie fotoelektrycznym fotony docierają do metalowej powierzchni i każdy foton oddaje całą swoją energię tylko jednemu elektronowi. To **zjawisko kwantowe** (ang. **quantum phenomenon**) stoi w sprzeczności z mechaniką klasyczną, według której wymiana energii zachodzi w sposób ciągły. Bilans energetyczny elektronu, który przejmuje od fotonu pewną energię E_f, jest następujący

$$E_\mathrm{f} = E_{\mathrm{k\,max}} + W,$$

gdzie $E_{\mathrm{k\,max}}$ jest energią kinetyczną elektronu, wyrażoną wzorem (Równanie 6.12), zaraz po opuszczeniu przez elektron metalowej płytki. W tym bilansie energetycznym W jest pracą, którą trzeba wykonać, aby fotoelektron opuścił metal, zwaną **pracą wyjścia** (ang. **work function**) danego metalu. Każdy metal ma swoją charakterystyczną pracę wyjścia, co przedstawiono w Tabeli 6.1. Aby otrzymać energię kinetyczną fotoelektronów przy powierzchni, przekształcamy bilans energetyczny (Równanie 6.13) oraz korzystamy z Równania 6.13 na energię pochłoniętego fotonu. Daje nam to wyrażenie na energię kinetyczną elektronu, zależne wprost od częstotliwości padającego promieniowania

$$E_{\mathrm{k\,max}} = h\nu - W. \tag{6.14}$$

Równanie to jest bardzo proste, ma jednak głebokie znacznie.

Praca wyjścia

Metal	W (eV)
Na	2,46
Al	4,08
Pb	4,14
Zn	4,31
Fe	4,50
Cu	4,70
Ag	4,73
Pt	6,35

Tabela 6.1

W interpretacji Einsteina oddziaływania zachodzą pomiędzy pojedynczymi elektronami i fotonami. Brak opóźnienia świadczy o tym, że to oddziaływanie zachodzi natychmiast. Czasu oddziaływania nie da się zwiększyć, zmniejszając natężenie padającego światła. Natężenie światła odpowiada liczbie fotonów padających na powierzchnię metalu w jednostce czasu. Nawet przy bardzo małych wartościach natężenia efekt fotoelektryczny wciąż występuje, gdyż oddziaływanie zachodzi pomiędzy jednym elektronem i jednym fotonem. Tak długo, jak pada chociaż jeden foton z wystarczająco dużą energią, aby wybić z metalu elektron, tak długo zjawisko elektryczne będzie zachodziło.

Występowanie częstotliwości progowej ν_g w efekcie fotoelektrycznym bezpośrednio wynika z Równania 6.14, ponieważ energia kinetyczna $E_{\mathrm{k\,max}}$ fotoelektronu może przyjmować tylko wartości dodatnie. Oznacza to, że istnieje taka częstotliwość, dla której energia ta wynosi zero, $0\,\mathrm{J} = h\nu_\mathrm{g} - W$. Jest to właśnie częstotliwość progowa

$$\nu_g = \frac{W}{h}. \tag{6.15}$$

Częstotliwość progowa zależy tylko od pracy wyjścia danego metalu i jest do niej wprost proporcjonalna. Gdy praca wyjścia jest duża (elektrony są mocno związane w metalu), energia progowa fotonu musi być wystarczająca, by wybić fotoelektron, co odpowiada dużej częstotliwości. Fotony o częstotliwości większej od częstotliwości progowej ν_g wybijają elektrony, gdyż $E_{k\ max} > 0\,J$. Fotony o częstotliwościach mniejszych niż ν_g nie mają wystarczającej energii, by wybić fotoelektrony. W związku z tym, gdy padające promieniowanie ma częstotliwość niższą od progowej, efekt fotoelektryczny nie zachodzi. Ponieważ częstotliwość ν i długość fali λ fal elektromagnetycznych są ze sobą powiązane $\lambda\nu = c$ (gdzie c jest prędkością światła w próżni), częstotliwości progowej odpowiada **progowa długość fali** (ang. **cut-off wavelength**) λ_0

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu_g} = \frac{c}{W\,/\,h} = \frac{hc}{W}, \tag{6.16}$$

gdzie $hc = 1240\,eV\,nm$. Obserwacje nasze możemy przeformułować w następujący sposób: gdy padające promieniowanie ma długość fali większą od długości progowej, efekt fotoelektryczny nie zachodzi.

Przykład 6.5

Efekt fotoelektryczny w srebrze

Promieniowanie o długości fali $300\ nm$ pada na powierzchnię srebra. Czy zachodzi efekt fotoelektryczny?

Strategia rozwiązania

Fotoelektrony wybijane są z powierzchni metalu, tylko gdy długość fali padającego promieniowania jest krótsza od długości progowej. Praca wyjścia dla srebra równa jest $W = 4{,}73\ eV$ (Tabela 6.1). Aby obliczyć progową długość fali, skorzystamy z Równania 6.16.

Rozwiązanie

Wartość progowej długości fali potrzebna do zajścia efektu fotoelektrycznego w srebrze wynosi

$$\lambda_0 = \frac{hc}{W} = \frac{1240\,eV\ \ nm}{4{,}73\,eV} = 262\ nm\,.$$

Padające promieniowanie ma długość fali $300\,nm$, czyli większą od długości progowej. Efekt fotoelektryczny nie będzie zachodził.

Znaczenie

Gdyby fotoelektrody zrobione były z sodu zamiast ze srebra, progowa długość fali wynosiłaby $504\ nm$ i można byłoby zaobserwować fotoelektrony.

Równanie 6.14 w zaproponowanym przez Einsteina modelu zjawiska fotoelektrycznego mówi nam, że maksymalna energia kinetyczna fotoelektronów jest liniową funkcją częstotliwości padającego promieniowania, co pokazuje wykres na Rysunku 6.10. Dla dowolnego metalu nachylenie prostej na tym wykresie dane jest przez wartość stałej Plancka. Punkt przecięcia z osią $E_{k\ max}$ daje nam wartość pracy wyjścia charakterystycznej dla danego metalu. Wartość $E_{k\ max}$ jest natomiast bezpośrednio wyznaczana eksperymentalnie, poprzez pomiar napięcia hamowania ΔV_h (zobacz Równanie 6.12), przy którym fotoprąd przestaje płynąć. Pomiar taki pozwala nam doświadczalnie wyznaczyć wartość stałej Plancka, jak również pracę wyjścia dla różnych materiałów.

Model Einsteina pozwala nam także wytłumaczyć wartości fotoprądu przedstawione na Rysunku 6.9. Na przykład podwojenie natężenia promieniowania przekłada się na podwojenie liczby fotonów padających w jednostce czasu na powierzchnię płytki. Większa liczba fotonów powoduje wybicie większej liczby elektronów, a więc większe natężenie fotoprądu. Natężenie po osiągnięciu pewnej maksymalnej wartości nie zwiększa się dalej wraz z wzrostem napięcia, gdyż nie zależy od niego liczba wybitych elektronów, a jedynie to, jak wiele z nich dotrze do przeciwnej elektrody. Napięcie hamowania nie zmienia się wraz z natężeniem promieniowania, ponieważ energia fotoelektronów nie zależy od tego natężenia (spójrz na Równanie 6.14).

Przykład 6.6

Praca wyjścia i częstotliwość progowa

W eksperymencie użyto światła o długości fali $180\,\text{nm}$, padającego na nieznany metal. Zmierzony fotoprąd przestawał płynąć po przyłożeniu napięcia $-0{,}8\,\text{V}$. Wyznaczmy pracę wyjścia dla tego metalu oraz jego częstotliwość progową w zjawisku fotoelektrycznym.

Strategia rozwiązania

Aby wyznaczyć częstotliwość progową ν_g, korzystamy z Równania 6.15, wcześniej musimy jednak wyznaczyć wartość pracy wyjścia W. W tym celu skorzystamy z Równania 6.12 oraz Równania 6.14. Fotoprąd przestaje płynąć po przyłożeniu napięcia hamowania, wiemy więc, że $\Delta V_\text{h} = 0{,}8\,\text{V}$.

Rozwiązanie

Korzystamy z Równania 6.12, aby wyznaczyć energię kinetyczną fotoelektronów

$$E_{\text{k max}} = e\Delta V_\text{h} = e \cdot 0{,}8\,\text{V} = 0{,}8\,\text{eV}\,.$$

Następnie rozwiązujemy Równanie 6.14, aby wyznaczyć W

$$W = h\nu - E_{\text{k max}} = \frac{hc}{\lambda} - E_{\text{k max}} = \frac{1240\,\text{eV nm}}{180\,\text{nm}} - 0{,}8\,\text{eV} = 6{,}09\,\text{eV}\,.$$

W końcu korzystamy z Równania 6.15, by obliczyć częstotliwość progową

$$\nu_\text{g} = \frac{W}{h} = \frac{6{,}09\,\text{eV}}{4{,}136 \cdot 10^{-15}\,\text{eV s}} = 1{,}47 \cdot 10^{-15}\,\text{Hz}\,.$$

Znaczenie

W tego typu obliczeniach wygodnie jest korzystać ze stałej Plancka wyrażonej w jednostkach eV s i wyrażać wszystkie energie w elektronowoltach zamiast w dżulach.

Przykład 6.7

Energia fotonu i energia kinetyczna fotoelektronów

Fioletowe światło o długości fali $430\,\text{nm}$ pada na fotoelektrodę wapniową o pracy wyjścia $2{,}71\,\text{eV}$. Wyznaczmy energię padających fotonów oraz maksymalną energię kinetyczną wybitych elektronów.

Strategia rozwiązania

Energia padających fotonów dana jest wzorem $E_\text{f} = h\nu = hc / \lambda$, gdzie skorzystaliśmy z $\nu\lambda = c$. Aby wyznaczyć maksymalną energię wybitych elektronów, skorzystamy z Równania 6.16.

Rozwiązanie

$$E_\text{f} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240\,\text{eV nm}}{430\,\text{nm}} = 2{,}88\,\text{eV}\,,$$
$$E_{\text{k max}} = E_\text{f} - W = 2{,}88\,\text{eV} - 2{,}71\,\text{eV} = 0{,}17\,\text{eV}\,.$$

Znaczenie

W tym układzie doświadczalnym fotoprąd przestaje płynąć przy napięciu hamowania $0{,}17\,\text{V}$.

6.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Żółte światło o długości fali $589\,\text{nm}$ pada na powierzchnię o pracy wyjścia $1{,}2\,\text{eV}$. Jakie jest napięcie hamowania? Jaka jest progowa długość fali?

6.7 Sprawdź, czy rozumiesz. Częstotliwość progowa efektu fotoelektrycznego w pewnym materiale wynosi $8 \cdot 10^{13}$ Hz. Gdy padające światło ma częstotliwość $1{,}2 \cdot 10^{14}$ Hz, zmierzony potencjał hamowania wynosi $-0{,}16$ V. Oszacuj z tych danych wartość stałej Plancka (w jednostkach J s oraz eV s) i wyznacz procentowy błąd twojego oszacowania.

6.3 | Efekt Comptona

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać eksperyment Comptona;
- wyjaśniać komptonowskie przesunięcie długości fali;
- opisywać sposób, w jaki eksperymenty z promieniowaniem rentgenowskim ujawniają cząstkową naturę promieniowania.

W 1905 roku Einstein ogłosił dwie teorie, które zrewolucjonizowały fizykę: szczególną teorię względności oraz ideę kwantów światła. Następnie Einstein rozwinął teorię kwantów światła, postulując, że swobodnie rozchodząca się fala elektromagnetyczna składa się z cząstek, nazwanych później fotonami, podobnie jak materia składa się z elektronów i innych masywnych cząstek. Wiązkę monochromatycznego światła o długości λ (lub, równoważnie, o częstotliwości ν) możemy opisywać jako klasyczną falę lub jako zbiór fotonów poruszających się w próżni z prędkością c i niosących energię $E_f = h\nu$. Koncepcja ta pozwoliła wytłumaczyć własności oddziaływania światła z materią.

Pęd fotonu

W przeciwieństwie do cząstek materii, posiadających niezerową masę spoczynkową m_0, foton jest bezmasowy. Podczas gdy cząstki materii osiągać mogą w próżni różne prędkości, mniejsze od prędkości światła, foton przemieszcza się zawsze z prędkością światła. Z punktu widzenia klasycznej mechaniki newtonowskiej podanie opisu takiej cząstki stanowi istotny problem. Jak przypisać pęd albo energię kinetyczną obiektowi, którego masa równa jest zero? Problem ten rozwiązać można na gruncie szczególnej teorii względności. Zgodnie z tą teorią dla każdego ciała zachodzi następujący związek

$$E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4, \tag{6.17}$$

gdzie E jest całkowitą energią cząstki, p jego pędem, a m_0 jego masą spoczynkową. Równanie to możemy zastosować także do fotonu, zakładając, że $m_0 = 0$. Prowadzi to do następującego wyrażenia na pęd fotonu p_f

$$p_f = \frac{E_f}{c}. \tag{6.18}$$

Energię fotonu E_f obliczyć możemy, znając częstotliwość związanej z nim fali elektromagnetycznej

$$E_f = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \tag{6.19}$$

korzystając także ze związku łączącego częstotliwość ν z długością λ fali i jej prędkością c

$$\lambda\nu = c. \tag{6.20}$$

Równania – Równanie 6.19 oraz Równanie 6.20 – dają nam więc następujący związek między pędem fotonu a długością związanej z nim fali

$$p_{\mathrm{f}} = \frac{h}{\lambda}. \tag{6.21}$$

Powyższe równanie opisuje jedynie wartość pędu i nie zawiera informacji o kierunku jego ruchu. W postaci wektorowej równanie to przybiera zazwyczaj następującą postać

$$\vec{p}_{\mathrm{f}} = \hbar \vec{k}, \tag{6.22}$$

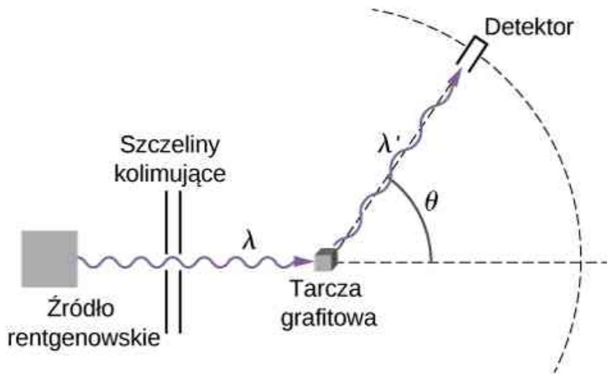
gdzie przez $\hbar = h / 2\pi$ oznacza się tak zwaną **zredukowaną stałą Plancka** (ang. **reduced Planck's constant**). Wektor $\vec{k}$ to **wektor falowy** (ang. **propagation vector**), wskazujący kierunek przemieszczania się fali (a więc także kierunek przemieszczania się fotonu). Długość tego wektora wyraża się wzorem $k = \left|\vec{k}\right| = 2\pi / \lambda$ i zwana jest **liczbą falową** (ang. **wave number**).

Efekt Comptona

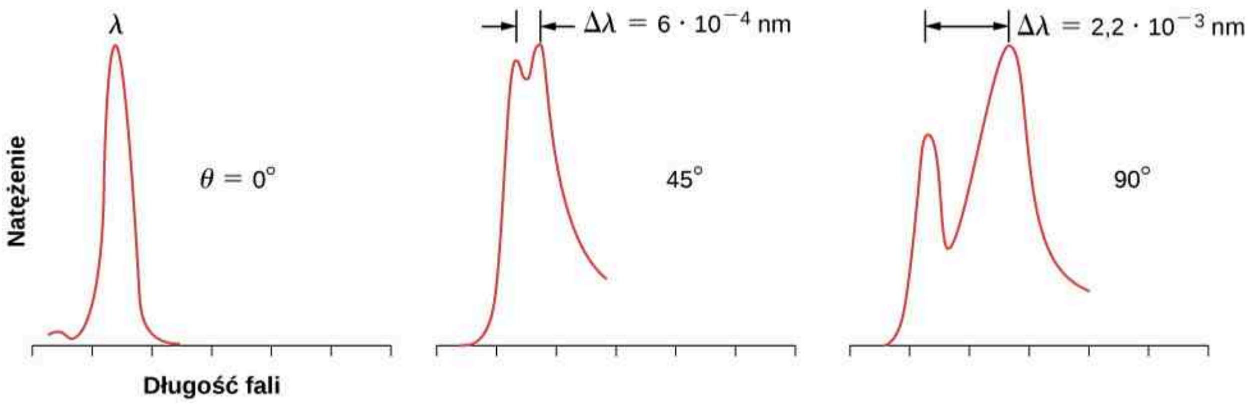
Efektem Comptona (ang. **Compton effect**) nazywa się niezwykły rezultat eksperymentu, w którym obserwuje się rozpraszanie promieni rentgenowskich na niektórych materiałach. Teoria klasyczna przewidywała, że rozproszona fala elektromagnetyczna powinna mieć tę samą długość co fala padająca. Jednak przeprowadzone doświadczenia nie potwierdzają tego przewidywania. Promieniowanie rentgenowskie rozproszone na przykład na powierzchni grafitowej miało inną długość fali niż promieniowanie padające. To zjawisko, niedające się wytłumaczyć na gruncie fizyki klasycznej, badał eksperymentalnie wraz ze współpracownikami **Artur H. Compton (1892–1962)** i on też podał jego wytłumaczenie w roku 1923.

W celu wyjaśnienia obserwowanej w doświadczeniu zmiany długości fali Compton wykorzystał zaproponowaną przez Einsteina ideę cząstek światła. Dlatego też efekt Comptona odegrał istotną rolę jako przykład zjawiska, którego nie da się wyjaśnić, zakładając jedynie falową naturę promieniowania elektromagnetycznego. Podane przez Comptona wyjaśnienie stanowiło przekonujący argument, że fale elektromagnetyczne w pewnych zjawiskach zachowują się jak strumień cząstek – fotonów.

Schemat układu doświadczalnego Comptona pokazany został na Rysunku 6.11. Idea eksperymentu jest bardzo prosta: monochromatyczne promieniowanie rentgenowskie o długości fali λ pada na grafitową próbkę (tarczę), nastepnie rozproszona na tarczy fala o długości λ' rejestrowana jest przez detektory mierzące natężenie promieniowania w zależności od **kąta rozproszenia** (ang. **scattering angle**) θ, będącego kątem między kierunkiem padającego i mierzonego promieniowania. W eksperymencie tym znamy natężęnie i długość λ padającej wiązki, a dla danego kąta rozproszenia θ mierzymy natężenie i długość fali λ' wiązki rozproszonej. Typowe wyniki takiego eksperymentu przedstawione są na Rysunku 6.12, gdzie na osi x podana jest długość fali rozproszonych promieni rentgenowskich, a na osi y ich natężenie, zmierzone dla kilku różnych kątów rozpraszania (wskazanych na wykresach). Dla wszystkich kątów (poza $\theta = 0°$) obserwuje się dwa maksima natężenia, pierwsze z nich odpowiada długości fali λ promieniowania padającego. Drugie odpowiada innej długości fali λ'. Odległość $\Delta\lambda$, dzieląca oba maksima, nazywana jest **przesunięciem Comptona** (ang. **Compton shift**) i zależna jest od kąta θ.



Rysunek 6.11 Układ doświadczalny do badania efektu Comptona.



Rysunek 6.12 Typowe wyniki pomiaru efektu Comptona w rozpraszaniu promieniowania rentgenowskiego pod różnymi kątami pokazują, że natężenie wiązki rozproszonej ma dwa maksima. Jedno – przy długości fali λ równej długości fali promieniowania padającego, a drugie – przy długości fali λ'. Odległość $\Delta\lambda$ między maksimami zależy od kąta rozpraszania θ, pod którym ustawiony został detektor w układzie pokazanym na Rysunku 6.11. Dane eksperymentalne przedstawione są schematycznie w jednostkach umownych, wysokość krzywej odpowiada wartości natężenia powyżej szumu tła.

Przesunięcie Comptona

Compton wyjaśnił zmianę długości fali rozproszonej, opierając się na tym, że w grafitowej tarczy elektrony walencyjne są słabo związane z atomami i zachowują się jak cząstki swobodne. Compton założył, że padające promieniowanie rentgenowskie składa się ze strumienia fotonów. Padający foton zderza się z elektronem walencyjnym w tarczy i przekazuje mu w tym zderzeniu część energii i pędu. Model ten jakościowo pozwala zrozumieć, dlaczego długość fali rozproszonego promieniowania jest większa. Traci on po prostu część swojej energii i jego częstotliwość zmniejsza się, wskutek czego zwiększa się długość fali. Compton użył tego modelu do wyprowadzenia wzoru na przesunięcie $\Delta\lambda$, zakładając jedynie, że w zderzeniu fotonu z elektronem spełnione są zasady zachowania pędu i energii.

W poniższym wyprowadzeniu wzoru na przesunięcie Comptona E_f i $\vec{p}_f$ oznaczają odpowiednio energię i pęd padającego fotonu o częstotliwości ν. Foton ten zderza się ze spoczywającym elektronem, co oznacza, że bezpośrednio przed zderzeniem energia elektronu równa była jego energii spoczynkowej m_0c^2. Bezpośrednio po zderzeniu elektron ma energię E i pęd $\vec{p}$ spełniające Równanie 6.19. Rozproszony foton bezpośrednio po zderzeniu ma energię $\widetilde{E}_f$, pęd $\vec{\widetilde{p}}_f$ i częstotliwość ν'. Kierunki padającego i rozproszonego fotonu oraz kąt θ między nimi pokazane są na Rysunku 6.11. Kąt ten rozpięty jest przez wektrory $\vec{p}_f$ i $\vec{\widetilde{p}}_f$, możemy więc w następujący sposób zapisać ich iloczyn skalarny

$$\vec{p}_f \cdot \vec{\widetilde{p}}_f = p_f \widetilde{p}_f \cos\theta. \tag{6.23}$$

Compton założył, że zderzające się foton i elektron tworzą układ izolowany. To założenie jest uzasadnione dla słabo związanych elektronów, które – w przybliżeniu – traktować możemy jak cząstki swobodne. Z zasady zachowania energii wynika więc

$$E_f + m_0 c^2 = \widetilde{E}_f + E. \tag{6.24}$$

Lewa strona równości wyraża energię układu przed zderzeniem, prawa – po zderzeniu. Następne równanie wynika z zachowania pędu układu foton–elektron, w którym elektron przed zderzeniem pozostaje w spoczynku

$$\vec{p}_f = \vec{\widetilde{p}}_f + \vec{p}. \tag{6.25}$$

Prawa strona równania wyraża pęd układu przed zderzeniem, a lewa – po zderzeniu. Cały proces opisany jest przez powyższe trzy równania – pozostaje jedynie przekształcić je algebraicznie.

Najpierw przekształcimy pierwsze równanie, przenosząc jeden z wyrazów na lewą stronę i podnosząc obie strony do kwadratu

$$\left[\left(E_f - \widetilde{E}_f\right) + m_0 c^2\right]^2 = E^2.$$

W następnym etapie podstawimy Równanie 6.19 w miejsce E^2, uprościmy oraz podzielimy obie strony przez c^2, aby otrzymać

$$\left(\frac{E_f}{c} - \frac{\widetilde{E}_f}{c}\right)^2 + 2m_0 c\left(\frac{E_f}{c} - \frac{\widetilde{E}_f}{c}\right) = p^2.$$

Możemy teraz skorzystać z Równania 6.21, aby wyrazić powyższe równanie w zmiennych pędowych. Otrzymujemy

$$\left(p_f - \widetilde{p}_f\right)^2 + 2m_0 c\left(p_f - \widetilde{p}_f\right) = p^2. \tag{6.26}$$

Aby wyeliminować p^2, skorzystamy z równania opisującego zachowanie pędu (Równanie 6.25), aby po przekształceniu i podniesieniu do kwadratu otrzymać

$$\left(\vec{p}_f - \vec{\widetilde{p}}_f\right)^2 = p^2 \text{ oraz } \left(\vec{p}_f - \vec{\widetilde{p}}_f\right)^2 = p_f^2 + \widetilde{p}_f^2 - 2\vec{p}_f \cdot \vec{\widetilde{p}}_f.$$

Iloczyn skalarny wektorów pędu dany jest przez Równanie 6.23. Po podstawieniu tego wyniku za p^2 w Równaniu 6.26 otrzymamy równania zawierające kąt θ

$$\left(p_f - \widetilde{p}_f\right)^2 + 2m_0 c\left(p_f - \widetilde{p}_f\right) = p_f^2 + \widetilde{p}_f^2 - 2p_f\widetilde{p}_f \cos\theta.$$

Po dalszych prostych przekształceniach wynik ten upraszczamy do

$$\frac{1}{\widetilde{p}_f} - \frac{1}{p_f} = \frac{1}{m_0 c}(1 - \cos\theta). \tag{6.27}$$

Korzystając z Równania 6.21, otrzymujemy: $1 / \widetilde{p}_f = \lambda' / h$ oraz $1 / p_f = \lambda / h$. Podstawiając do Równania 6.27, otrzymujemy ostateczny wzór na przesunięcie Comptona

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta). \tag{6.28}$$

Czynnik $h / m_0 c$ nazywany jest **comptonowską długością fali** (ang. **Compton wavelength**) elektronu

$$\lambda_C = \frac{h}{m_0 c} = 0{,}002\,43\,\text{nm} = 2{,}43\,\text{pm}. \tag{6.29}$$

Oznaczając zmianę długości fali przez $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$, końcowy wynik możemy zapisać w następujący sposób

$$\Delta\lambda = \lambda_C\,(1 - \cos\theta). \tag{6.30}$$

Powyższy wzór z niebywałą dokładnością opisuje wyniki doświadczeń przedstawione na Rysunku 6.12. Także dane uzyskane w doświadczeniach rozpraszania na molibdenie, graficie, kalcycie i wielu innych materiałach są zgodne z tym przewidywaniem. Nieprzesunięte maksimum pokazane na Rysunku 6.12 jest efektem zderzeń fotonu z elektronami mocniej związanymi z atomami tarczy, w praktyce więc – z całym atomem. W tym przypadku masą spoczynkową w Równaniu 6.29 jest masa atomu. Wynikające z tego przesunięcie jest cztery rzędy wielkości mniejsze niż przesunięcie spowodowane zderzeniami ze swobodnymi elektronami i w związku z tym może być pominięte.

Rozpraszanie Comptona jest przykładem **rozpraszania nieelastycznego** (ang. **inelastic scattering**), w którym rozproszone promieniowanie ma większą długość fali niż promieniowanie padające. Współcześnie nazwy „rozpraszanie comptonowskie” używa się do opisu nieelastycznego rozpraszania fotonów na swobodnych, naładowanych cząstkach. Opis efektu Comptona przyjmujący, że promieniowanie składa się z posiadających pęd cząstek, fotonów, pozwala wyjaśnić obserwowaną zmianę długości fali.

Przykład 6.8

Rozpraszanie Comptona

Promieniowanie rentgenowskie o długości fali 71 pm pada na kalcytową tarczę. Wyznaczmy długość fali rozproszonej pod kątem $30°$. Jaka jest największa wartość przesunięcia Comptona w tym eksperymencie?

Strategia rozwiązania

Aby wyznaczyć długość fali rozproszonego promieniowania, musimy najpierw, korzystając z Równania 6.30, obliczyć przesunięcie comptonowskie dla danego kąta $\theta = 30°$. Następnie dodamy to przesunięcie do długości fali padającej. Największe przesunięcie zachodzi dla kąta $\theta = 180°$, dla którego czynnik $1 - \cos\theta$ ma największą wartość.

Rozwiązanie

Przesunięcie przy kącie rozproszenia równym $\theta = 30°$ wynosi

$$\Delta\lambda = \lambda_C\,(1 - \cos 30°) = 0{,}134\lambda_C = 0{,}134 \cdot 2{,}43\,\text{pm} = 0{,}325\,\text{pm}\,.$$

Daje to nam następującą długość fali rozproszonej

$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 71\,\text{pm} + 0{,}325\,\text{pm} = 71{,}325\,\text{pm}\,.$$

Największe przesunięcie wynosi

$$(\Delta\lambda)_{\text{max}} = \lambda_C\,(1 - \cos 180°) = 2{,}43\,\text{pm} \cdot 2 = 4{,}86\,\text{pm}\,.$$

Znaczenie

Największe przesunięcie długości fali rejestruje się przy rozpraszaniu do tyłu. Jednakże większość fotonów rozprasza się pod niewielkimi kątami, tylko niewielka część rozpraszana jest wstecz. Pomiary w tym obszarze wymagają więc bardzo czułych detektorów.

6.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Promieniowanie rentgenowskie o długości fali 71 pm pada na kalcytową tarczę. Wyznacz długość fali rozproszonej pod kątem $60°$. Jakie jest najmniejsze przesunięcie, które można zmierzyć w tym eksperymencie?

6.4 | Model atomu wodoru Bohra

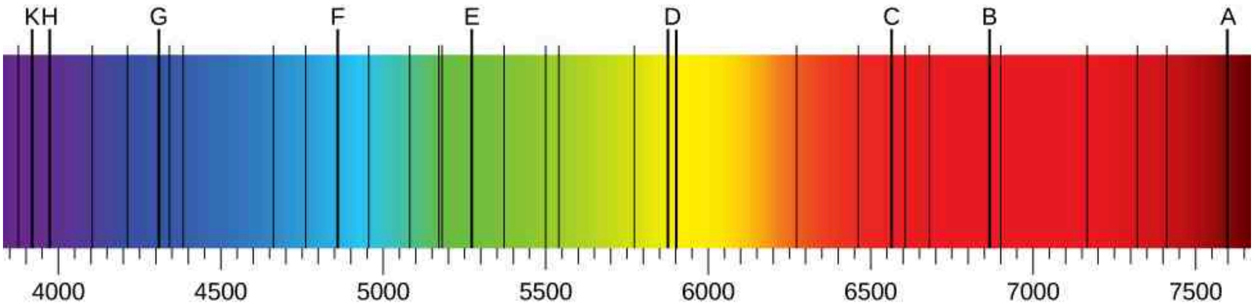
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

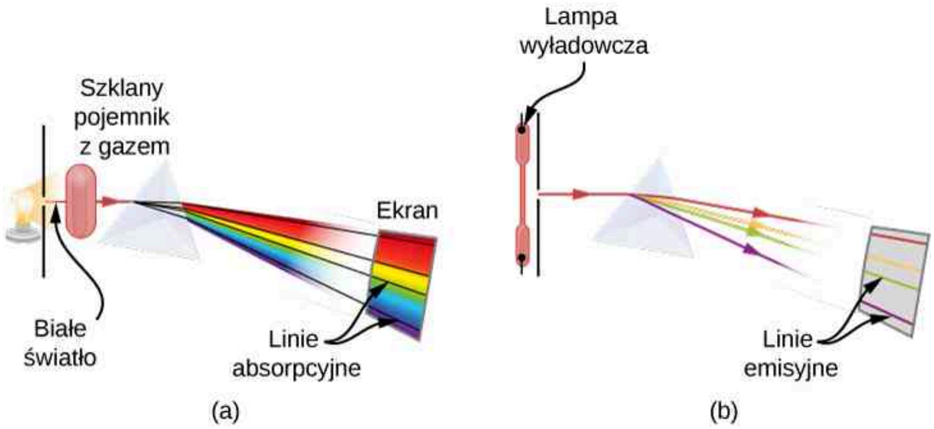
- wyjaśniać różnicę między widmem absorbcyjnym a emisyjnym promieniowania;
- opisywać doświadczenie Rutherforda i odkrycie jądra atomowego;
- opisywać strukturę atomu wodoru;
- opisywać postulaty wczesnej teorii kwantowej;
- opisywać, w jaki sposób model Bohra wyjaśnia widmo promieniowania atomu wodoru.

Szczególne znaczenie historyczne modelu struktury atomu zaproponowanego przez Bohra wynika z tego, że jako pierwszy wyjaśnił on widmo promieniowania atomu wodoru. Jego istotna rola w rozwoju nauki polegała także na wykorzystaniu wczesnych koncepcji teorii kwantów, stymulowaniu jej dalszego rozwoju i pełnym sformułowaniu mechaniki kwantowej. Zanim opiszemy szczegóły tego modelu, musimy się przyjrzeć leżącym u jego podstaw odkryciom, dokonanym w dziewiętnastym wieku.

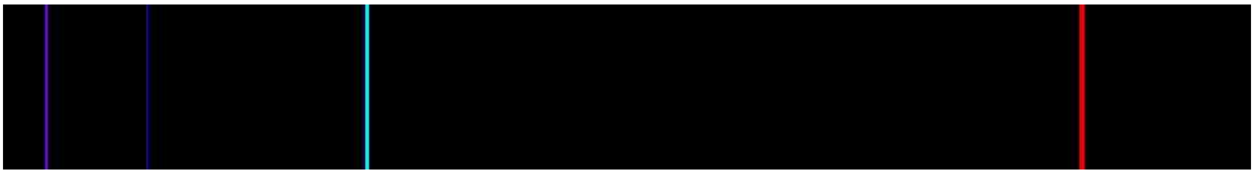
Gdy użyje się pryzmatu do analizy światła słonecznego, w obserwowanym widmie zauważyć można wiele ciemnych linii (Rysunek 6.13), nazywanych **liniami Fraunhofera** (ang. **Fraunhofer lines**), od nazwiska **Josepha von Fraunhofera (1787–1826)**, który dokładnie zmierzył odpowiadające im długości fali. W latach 1854–1861, Gustav Kirchhoff i Robert Bunsen, analizując widmo światła emitowanego podczas podgrzewania różnych pierwiastków chemicznych (zwane **widmem emisyjnym** (ang. **emission spectrum**)), odkryli, że obserwowane w nim linie pasują dokładnie do czarnych miejsc w widmie Fraunhofera (będącego przykładem **widma absorpcyjnego** (ang. **absorption spectrum**)). Różnica między widmem absorpcyjnym a emisyjnym wyjaśniona jest na Rysunku 6.14. Widmo absorpcyjne powstaje, gdy światło przechodzi przez gaz i obserwuje się je w postaci czarnych linii na tle ciągłego spektrum (Rysunek 6.13). Położenie ciemnych linii odpowiada długości zaabsorbowanych fal świetlnych. Widmo emisyjne obserwujemy, gdy światło emitowane jest przez rozgrzany gaz i składa się z kolorowych linii na czarnym tle (jak na Rysunku 6.15 i Rysunku 6.16). Położenie jasnych linii emisyjnych odpowiada długościom wyemitowanej fali świetlej. Każdy pierwiastek ma swoje własne charakterystyczne widmo emisyjne, a linie tego widma znajdują się zawsze w tym samym miejscu co ciemne linie w jego widmie absorpcyjnym. Oznacza to, że atomy danego pierwiastka absorbują tylko fale o pewnych długościach, tych samych co długości emitowanego przez nie promieniowania.



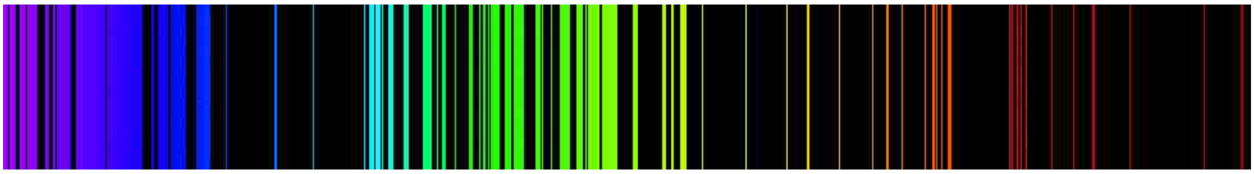
Rysunek 6.13 W zakresie widzialnym widma promieniowania słonecznego (od 380 nm do 710 nm) linie Fraunhofera obserwowane są jako czarne, pionowe linie na tle ciągłego widma. Współcześnie bardzo czułe instrumenty rejestrują tysiące takich linii.



Rysunek 6.14 Schematy układów doświadczalnych do obserwacji (a) linii absorpcyjnych, (b) linii emisyjnych. (a) Białe światło przechodzi przez chmurę zimnego gazu zamkniętego w szklanym pojemniku. Pryzmat rozszczepia światło o różnych długościach fali. W widmie światła przechodzącego brakuje fal o pewnych długościach, co widoczne jest w postaci czarnych linii na tle ciągłego spektrum. (b) Gaz zamknięty jest w szklanej rurze, z przyczepionymi na końcach elektrodami. Przy dużej różnicy potencjałów pomiędzy elektrodami gaz świeci, a wyemitowane światło przechodzi przez pryzmat, który rozdziela je na fale o różnej długości. W widmie emitowanego światła występują tylko pewne długości fali, widoczne w postaci kolorowych linii na ekranie.



Rysunek 6.15 Widmo emisyjne atomu wodoru: położenie linii emisyjnych jest charakterystyczne dla tego pierwiastka. Źródło: „Merikanto”/Wikimedia Commons



Rysunek 6.16 Widmo emisyjne atomów żelaza.

Widma emisyjne pierwiastków mają skomplikowaną strukturę, zwłaszcza dla pierwiastków o wyższych liczbach atomowych. Najprostsze widmo, przedstawione na Rysunku 6.15, należy do atomu wodoru. Tylko cztery linie widoczne są ludzkim okiem. Od prawej do lewej są to: czerwona ($656\,\text{nm}$), zwana linią H-α, niebiesko-zielona ($486\,\text{nm}$), niebieska ($434\,\text{nm}$) i fioletowa ($410\,\text{nm}$). Linie odpowiadające długościom fal mniejszym niż $400\,\text{nm}$ znajdują się w ultrafioletowej części widma i są niewidoczne dla ludzkiego oka.

Empiryczny wzór opisujący położenie (długość fali) λ linii emisyjnych wodoru w tej serii podany został w 1885 roku przez **Johanna Balmera (1825–1898)** i znany jest jako **wzór Balmera** (ang. **Balmer formula**)

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right), \tag{6.31}$$

gdzie $R_{\text{H}} = 1{,}097\,37 \cdot 10^7\,\text{m}^{-1}$ to **stała Rydberga dla atomu wodoru** (ang. **Rydberg constant for hydrogen**). We wzorze (Równanie 6.31) dodatnia liczba całkowita n przyjmuje wartości $n = 3, 4, 5, 6$ dla czterech widzialnych linii w

tej serii. Seria linii emisyjnych opisywana przez wzór Balmera nazywana jest **serią Balmera** (ang. **Balmer series**) dla wodoru. Inne linie emisyjne wodoru odkryte zostały w XX wieku i opisywane są przez **wzór Rydberga** (ang. **Rydberg formula**), podsumowujący wszystkie wyniki doświadczalne

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}} \left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right), \text{ gdzie } n_i = n_f + 1, n_f + 2, n_f + 3, \ldots \qquad (6.32)$$

Dla $n_f = 1$ seria linii spektralnych nazywana jest **serią Lymana** (ang. **Lyman series**). Dla $n_f = 2$ mamy do czynienia ze znaną już serią Balmera; $n_f = 3$ odpowiada **serii Paschena** (ang. **Paschen series**), natomiast $n_f = 4$ – **serii Bracketta** (ang. **Brackett series**), a potem kolejno: **serii Pfunda** (ang. **Pfund series**) i **serii Humphreysa** (ang. **Humphreys series**). Wzór ten przewiduje nieskończenie wiele takich serii, jako że n_f może przybierać dowolną wartość całkowitą.

Wzór Rydberga dokładnie opisuje pozycje obserwowanych doświadczalnie linii widmowych atomu wodoru, jednakże na początku XX wieku nie potrafiono wyjaśnić, jaki jest jego sens fizyczny. Zrozumienie tego wzoru umożliwił dopiero zaproponowany przez Bohra w 1913 roku model atomu.

Przykład 6.9

Granice serii Balmera

Obliczmy największą i najmniejszą długość fali w serii Balmera.

Strategia rozwiązania

Możemy skorzystać z wzoru Rydberga lub z będącego jego szczególnym przypadkiem wzoru Balmera. Najdłuższą falę otrzymamy, gdy $1 / n_i$ ma największą wartość, czyli dla $n_i = n_f + 1 = 3$, ponieważ $n_f = 2$ w serii Balmera. Najkrótsza fala odpowiada najmniejszemu $1 / n_i$, czyli $1 / n_i \longrightarrow 0$, gdy $n_i \longrightarrow \infty$.

Rozwiązanie

Najdłuższa fala

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 1{,}097\,37 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9} \right) \Rightarrow \lambda = 656{,}3 \text{ nm}.$$

Najkrótsza fala

$$\frac{1}{\lambda} = R_{\mathrm{H}} \left(\frac{1}{2^2} - 0 \right) = 1{,}097\,37 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1} \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = 364{,}6 \text{ nm}.$$

Znaczenie

Zauważmy, że między tymi granicami jest nieskończenie wiele linii widmowych.

6.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jakie są graniczne wartości długości fali w serii Lymana? Czy znajdują się one w zakresie widzialnym?

Kluczem do wyjaśnienia zagadki widm emisyjnych jest zrozumienie struktury atomu. W XIX wieku sądzono, że atomy są najmniejszymi i niepodzielnymi składnikami materii. Przekonanie to uległo zmianie po serii eksperymentów odkrywających istnienie cząstek subatomowych, takich jak elektrony, protony czy neutrony.

Elektron został odkryty w roku 1897 przez **J. J. Thomsona (1856–1940)** w eksperymencie z promieniami katodowymi, zwanym czasem eksperymentem z **promieniowaniem β** (ang. **β-ray**) – promieniowanie to jest w istocie strumieniem elektronów. W 1904 roku Thomson zaproponował pierwszy model struktury atomu, znany jako model „ciasta z rodzynkami”, w ramach którego atom opisywany był jako dodatnio naładowana materia, w której zanurzone były ujemnie naładowane elektrony (jak rodzynki w cieście). Około roku 1900, **E. Rutherford (1871–1937)** i, niezależnie, **Paul Ulrich Villard (1860–1934)** sklasyfikowali wszystkie znane wówczas rodzaje promieniowania jako **promieniowanie α** (ang. **α-ray**), β oraz γ (ang. **γ-ray**) (promieniowanie γ jest strumieniem wysokoenergetycznych fotonów). W 1907 r. Rutherford i Thomas Royds użyli metod spektroskopii, wykazując, że dodatnio naładowane cząstki promie-

niowania α (zwane **cząstkami α** (ang. **α-particle**)) są podwójnie zjonizowanymi atomami helu. W 1909 r. Rutherford, Ernest Marsden i Hans Geiger użyli cząstek α w słynnym eksperymencie, który obalił model Thomsona (patrz Pęd i zderzenia (https://cnx.org/content/m65781/latest/)).

W **eksperymencie Rutherforda** (ang. **Rutherford's gold foil experiment**; zwanym też eksperymentem Geigera-Marsdena) cząstki α padały na cienką, złotą folię i rozpraszane były przez znajdujące się w niej atomy (zobacz podrozdział Rodzaje zderzeń (https://cnx.org/content/m65786/latest/#CNX_UPhysics_09_04_TvsR)). Wychodzące po zderzeniu cząstki rejestrowane były przez otaczający tarczę ekran pokryty scyntylacyjną farbą (dokładny opis układu doświadczalnego znajduje się tu: Pęd i zderzenia (https://cnx.org/content/m65781/latest/)). Gdy rozproszona cząstka uderzała w ekran, obserwowano mały rozbłysk światła. Licząc rozbłyski, określano, jaka część padających cząstek była rozproszona pod danym kątem. Gdyby model Thomsona był prawdziwy, żadne cząstki nie powinny ulegać wstecznemu rozpraszaniu. Jednakże w eksperymencie zaobserwowano, że mimo iż większość cząstek ulegała bardzo niewielkiemu rozproszeniu, istotna ich część rozpraszana była do tyłu, w kierunku źródła promieniowania. Taki wynik dało się wytłumaczyć jedynie, stwierdzając, że prawie cała masa oraz cały ładunek atomu skoncentrowane są w małej przestrzeni w jego środku.

W roku 1911 Rutherford zaproponował **model atomu z jądrem** (ang. **nuclear model of the atom**) o bardzo niewielkich rozmiarach, zawierającym cały ładunek dodatni atomu oraz prawie całą jego masę. Atom zawierał także niosące ładunek ujemny elektrony, znajdujące się w dużej odległości od jądra. Dziesięć lat później Rutherford zaproponował nazwę „proton” na jądro wodoru oraz „neutron” dla hipotetycznej neutralnej cząstki, która wiązałaby pozytywnie naładowane protony w jądrze (neutron odkryty został w 1932 r. przez **Jamesa Chadwicka (1891–1935)**). Rutherford został odkrywcą jądra atomowego, jednakże zaproponowany przez niego model nie wyjaśniał jeszcze wzoru Rydberga, opisującego linie emisyjne wodoru.

Model atomu wodoru Bohra (ang. **Bohr's model of the hydrogen atom**), zaproponowany przez **Nielsa Bohra (1885–1962)** w 1913 roku, był pierwszym modelem zawierającym w sobie elementy wczesnej mechaniki kwantowej. W ramach tego modelu, łączącego klasyczny opis „planetarnego” ruchu elektronów wokół jądra z kwantową ideą fotonów, odtworzyć można wzór Rydberga, opisujący widmo emisyjne wodoru. Po odkryciu jądra przez Rutherforda Bohr zasugerował, że elektrony krążą wokół jądra, co wydawało się logiczną konsekwencją prawa Coulomba. Zauważmy, że siła oddziaływania elektrostatycznego pomiędzy przeciwnymi ładunkami ma tę samą postać co prawo uniwersalnego ciążenia Newtona, to znaczy, że maleje jak $1/r^2$, gdzie r jest odległością pomiędzy oddziałującymi ciałami. Na wzór Ziemi obiegającej Słońce elektron miałby obiegać jądro. Jednakże pomysł ten napotyka od razu poważną przeszkodę: ładunek poruszający się ruchem przyspieszonym (a takim jest ruch po okręgu) szybko wypromieniowuje swoją energię. Zbudowany w taki sposób atom wodoru nie byłby stabilny, elektron natychmiast spadłby na jądro. Co więcej, klasyczny ruch elektronu nie jest w stanie wyjaśnić dyskretnego widma emisyjnego wodoru.

Aby obejść te dwie trudności, Bohr zaproponował trzy **postulaty dotyczące modelu** (ang. **postulates of Bohr's model**):

1. Elektron o ładunku ujemnym porusza się wokół dodatnio naładowanego jądra (protonu) po orbitach kołowych.
2. Dozwolone są jedynie orbity spełniające pierwszy warunek kwantowania: na n-tej orbicie moment pędu L_n elektronu może przyjmować tylko dyskretne wartości

   $$L_n = n\hbar, \text{ gdzie } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.33}$$

   W postulacie tym zawarte jest kwantowanie momentu pędu. Oznaczając promień n-tej orbity przez r_n i prędkość elektronu na tej orbicie przez v_n, pierwszy warunek kwantowania możemy zapisać w następujący sposób

   $$m_e v_n r_n = n\hbar. \tag{6.34}$$

   Elektron znajdujący się na dozwolonej orbicie nie traci energii przez promieniowanie.
3. Elektron może przechodzić z orbity, na której jego energia wynosi E_n, na inną, gdzie energia ta równa jest E_m. Gdy atom absorbuje foton, elektron przechodzi na orbitę o wyższej energii. Gdy atom emituje foton, elektron spada na orbitę o energii niższej. Przejścia takie zachodzą natychmiastowo. Dopuszczalne przejścia spełniają następujący, drugi warunek kwantowania

   $$h\nu = |E_n - E_m|, \tag{6.35}$$

gdzie $h\nu$ jest energią wyemitowanego lub zaabsorbowanego fotonu o częstotliwości ν.

Te trzy postulaty wczesnej kwantowej teorii atomu wodoru pozwalają wyprowadzić nie tylko wzór Rydberga, lecz także wartość stałej Rydberga oraz inne ważne własności, takie jak: jego poziomy energetyczne, energię jonizacji oraz wielkości orbit elektronowych. Wyprowadzenie to oparte jest na klasycznym opisie elektronu jako cząstki poddanej sile Coulomba i spełniającej prawa Newtona oraz klasyczne zasady zachowania energii i pędu.

Orbity elektronu

Aby wyznaczyć promień r_n i prędkość elektronu na n-tej orbicie, założymy, że jego ruch można opisywać przy pomocy klasycznej mechaniki newtonowskiej. Elektron, będący cząstką o ładunku ujemnym, poddany jest sile elektrostatycznej, przyciągającej go do jądra, znajdującego się w środku jego orbity kołowej. Oddziaływanie elektrostatyczne pełni więc rolę siły dośrodkowej, powodującej ruch elektronu po okręgu

$$\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n^2}, \tag{6.36}$$

gdzie e oznacza wartość ładunku elementarnego. Ładunek elektronu i protonu mają tę samą wartość bezwzględną $|q| = e$. Korzystając z Równania 6.36 oraz z pierwszego warunku kwantyzacji danego przez Równanie 6.34, możemy wyznaczyć prędkość v_n i promień r_n

$$v_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar} \cdot \frac{1}{n}, \tag{6.37}$$

$$r_n = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} n^2. \tag{6.38}$$

Zauważmy, że wyznaczone w ten sposób promień orbity i prędkość elektronu zależą tylko od wskaźnika n numerującego orbity, ponieważ wszystkie inne wielkości w powyższych wzorach to podstawowe stałe fizyczne. Widzimy, że promień orbity rośnie proporcjonalnie do kwadratu n oraz że prędkość elektronu maleje, gdy zwiększa się promień. Promień najmniejszej orbity a_0 zwany jest **promieniem Bohra** (ang. **Bohr radius of hydrogen**). Jego wartość otrzymujemy, podstawiając $n = 1$ w Równaniu 6.38

$$a_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 5{,}29 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}529\ \text{Å}. \tag{6.39}$$

Korzystając z powyższej definicji a_0 w Równaniu 6.38, możemy wyrazić promień n-tej orbity w prostszy sposób

$$r_n = a_0 n^2. \tag{6.40}$$

Oznacza to, że orbity elektronu są skwantowane, ponieważ ich promienie przyjmują tylko określone wartości $a_0, 4a_0, 9a_0, 16a_0, \ldots$ dane wzorem (Równanie 6.40).

Poziomy energetyczne

Całkowita energia E_n elektronu na n-tej orbicie jest sumą jego energii kinetycznej $E_{\mathrm{k}n}$ i potencjalnej $E_{\mathrm{p}n}$. Korzystając z Równania 6.37, otrzymujemy

$$E_{\mathrm{k}n} = \frac{1}{2} m_e v_n^2 = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \tag{6.41}$$

Jak wiemy z wcześniejszych rozdziałów, energia potencjalna oddziaływania elektrostatycznego pomiędzy dwoma ładunkami q_1 i q_2 znajdującymi się w odległości r_{12} od siebie wynosi $1 / (4\pi\varepsilon_0) \cdot q_1 q_2 / r_{12}$. W naszym przypadku $q_1 = +e$ jest ładunkiem jądra atomu wodoru (ładunkiem protonu), $q_2 = -e$ jest ładunkiem elektronu, a $r_{12} = r_n$ jest promieniem n-tej orbity. Korzystając z Równania 6.38, wyznaczamy energię potencjalną elektronu

$$E_{\mathrm{p}n} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{16\pi^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \tag{6.42}$$

Energię potencjalną otrzymujemy, sumując równania: Równanie 6.41 i Równanie 6.42

$$E_n = E_{\mathrm{k}n} + E_{\mathrm{p}n} = -\frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e e^4}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2}. \tag{6.43}$$

Zauważmy, że energia ta zależy tylko od wskaźnika n, ponieważ wszystkie inne symbole oznaczają podstawowe stałe fizyczne. Wartość stałego czynnika w Równaniu 6.43 wynosi

$$E_0 = \frac{1}{32\pi^2 \varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e e^4}{\hbar^2} = \frac{1}{8\varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e e^4}{h^2} = 2{,}17 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}6\,\mathrm{eV}\,. \tag{6.44}$$

Energię n-tej orbity można wyrazić przez ten stały czynnik w następujący sposób

$$E_n = -E_0 \frac{1}{n^2}. \tag{6.45}$$

Widzimy, że energie elektronów w atomie wodoru są skwantowane i mogą przyjmować jedynie dyskretne wartości $-E_0, -E_0 / 4, -E_0 / 9, -E_0 / 16, \ldots$ dane wzorem (Równanie 6.45). Ten zbiór dozwolonych wartości energii elektronu nazywamy **spektrum energetycznym wodoru** (ang. **energy spectrum of hydrogen**) (Rysunek 6.17). Wskaźnik n, numerujący poziomy energetyczne, nazywany jest **liczbą kwantową** (ang. **quantum number**) energii. Najmniejsza wartość energii odpowiada $n = 1$ i nazywana jest **energią stanu podstawowego atomu wodoru** (ang. **ground state energy of the hydrogen atom**). Jej wartość wynosi

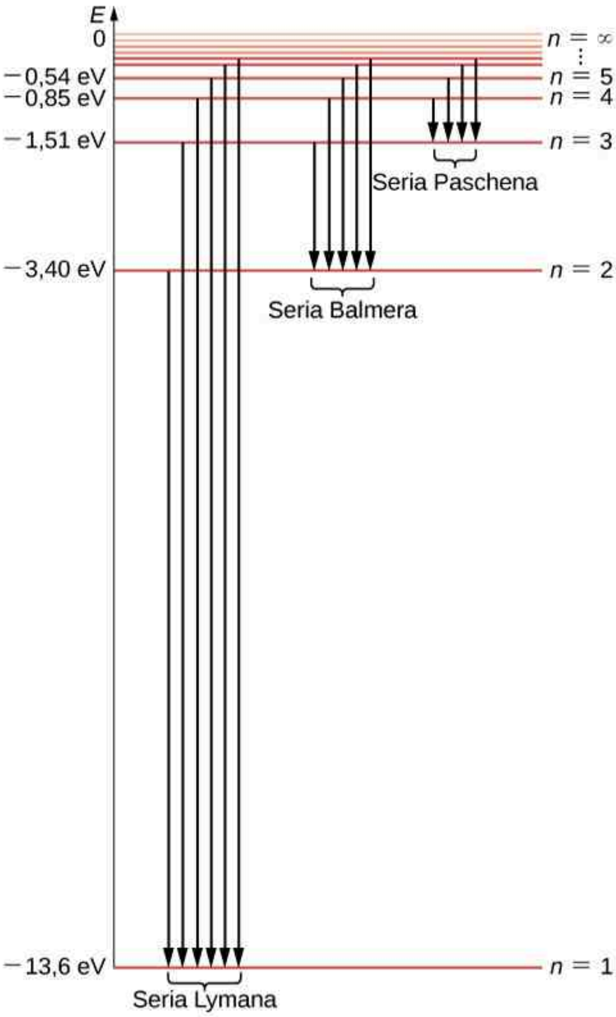
$$E_1 = -E_0 = -13{,}6\,\mathrm{eV}\,. \tag{6.46}$$

Elektron w atomie wodoru może mieć energie wyższe niż energia stanu podstawowego. Odpowiadające im stany nazywane są **stanami wzbudzonymi atomu wodoru** (ang. **excited energy states of a hydrogen atom**).

Nad stanem podstawowym jest nieskończenie wiele stanów wzbudzonych, odpowiadających nieskończonej liczbie wartości n we wzorze (Równanie 6.45). Mówimy, że elektron jest w pierwszym stanie wzbudzonym, gdy jego energia wynosi E_2 (dla $n = 2$). W drugim stanie wzbudzonym energia wynosi E_3 (dla $n = 3$). Uogólniając, w n-tym stanie wzbudzonym energia wynosi E_{n+1}. Nie istnieje najwyższy stan wzbudzony, jednakże istnieje granica energii dla n dążącego do nieskończoności w Równaniu 6.45: $\lim_{n \longrightarrow \infty} -E_0 / n^2 = 0$. W granicy tej elektron nie jest już związany w atomie wodoru i staje się elektronem swobodnym. Najmocniej związany jest elektron w stanie podstawowym, gdy jego energia dana jest Równaniem 6.46. Aby wyrwać elektron z atomu, musimy mu dostarczyć energii $E_{\mathrm{jonizacji}}$, równej

$$E_{\text{jonizacji}} = E_\infty - E_1 \Rightarrow E_{\text{jonizacji}} = -E_1 = -(-E_0) = E_0 = 13{,}6\,\text{eV}\,. \tag{6.47}$$

Energia potrzebna do uwolnienia elektronu z atomu nazywana jest **energią jonizacji** (ang. **ionization energy**). Wynik uzyskany w Równaniu 6.47 zgadza się z wartością mierzoną eksperymentalnie.



Rysunek 6.17 Spektrum energetyczne atomu wodoru. Poziomy energii (linie poziome) odpowiadają stanom związanym w atomie. Jest jeden stan podstawowy, $n = 1$ i nieskończenie wiele stanów wzbudzonych. Stany numerowane są liczbami kwantowymi $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$. Linie pionowe pokazują dozwolone przejścia pomiędzy stanami z emisją fotonu, o długościach fal odpowiadających widmu liniowemu atomu wodoru.

Widmo emisyjne atomu wodoru

Aby wyznaczyć długość fali promieniowania emitowanego przez atom, gdy elektron przechodzi z n-tej orbity na orbitę o liczbie kwantowej m, użyjemy drugiego warunku kwantyzacji Bohra oraz wzoru (Równanie 6.45) na energię. Emisja energii z atomu może nastąpić tylko, gdy elektron przechodzi ze stanu o wyższej energii do stanu o energii niższej ($E_n > E_m$ i $n > m$). W wyniku takiego przejścia foton unosi energię, będącą różnicą energii stanów, pomiędzy którymi zaszło przejście

$$h\nu = \left|E_n - E_m\right| = E_n - E_m = -E_0\frac{1}{n^2} + E_0\frac{1}{m^2} = E_0\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{6.48}$$

Teraz pozostaje tylko wyrazić energię fotonu przez jego długość fali, $h\nu = hc/\lambda$, i podzielić obie strony Równania 6.48 przez hc. W wyniku otrzymujemy

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{hc}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{6.49}$$

Wartość występującej w tym równaniu stałej wynosi

$$\frac{E_0}{hc} = \frac{13{,}6\,\mathrm{eV}}{4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s} \cdot 2{,}997 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m\,/\,s}} = 1{,}097 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}. \tag{6.50}$$

Ta wielkość to dokładnie stała Rydberga R_H , występująca w Równaniu 6.32. Wzór z Równania 6.49 jest równoważny empirycznemu wzorowi Rydberga, ponieważ dla danego m mamy $n = m + 1, m + 2, \ldots$. W ten sposób model atomu Bohra pozwala nam wyprowadzić stałą Rydberga z pierwszych zasad i wyrazić ją przez podstawowe stałe fizyczne. Przejścia między dozwolonymi orbitami przedstawione są na Rysunku 6.17.

Możemy powtórzyć rozumowanie, które doprowadziło do Równania 6.49, aby uzyskać długości fal promieniowania absorbowanego przez atomy wodoru. Wzór (Równanie 6.49) będzie wówczas opisywał pozycje linii w widmie absorpcyjnym. Jedyna różnica polegać będzie na tym, że tym razem m oznaczać będzie orbitę przed przejściem, a liczba kwantowa n wskazywać będzie orbitę, na którą przechodzi elektron. Różnica energii elektronu na tych orbitach równa jest energii zaabsorbowanego fotonu.

Przykład 6.10

Rozmiar i energia atomu wodoru w stanie wzbudzonym

Jak zmieni się energia i rozmiar atomu wodoru, gdy będąc w stanie podstawowym zaabsorbuje foton o długości fali $93{,}7\ \mathrm{nm}$, odpowiadający linii w serii Lymana? Jaka będzie energia jonizacji atomu w uzyskanym w ten sposób stanie wzbudzonym? Odpowiedź podamy w odpowiednich jednostkach oraz w stosunku do wielkości opisujących stan podstawowy.

Strategia rozwiązania

Przed absorpcją atom jest w stanie podstawowym. Oznacza to, że przejście zachodzi między orbitą $m = 1$ a pewną wyższą, n-tą orbitą. W pierwszym kroku wyznaczymy n dla danej długości fali $\lambda = 93{,}7\ \mathrm{nm}$, korzystając ze wzoru (Równanie 6.49). Następnie, korzystając z Równania 6.45, wyznaczymy energię E_n stanu wzbudzonego oraz energię jonizacji $E_{\mathrm{jonizacji},n}$. Równanie 6.40 pozwoli nam natomiast wyznaczyć promień r_n orbity w stanie wzbudzonym.

Rozwiązanie

Podstawmy $m = 1$ i $\lambda = 93{,}7\ \mathrm{nm}$ do Równania 6.49 i wyznaczmy z niego n. Oczywiście ze względu na zaokrąglenia nie powinniśmy oczekiwać dokładnej wartości całkowitej, ale nasza odpowiedź powinna być jej bardzo bliska

$$\frac{1}{\lambda} = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\lambda R_\mathrm{H}}}},$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{93{,}7 \cdot 10^{-9}\ \mathrm{m} \cdot 1{,}097 \cdot 10^{7}\ \mathrm{m^{-1}}}}} = 6{,}07 \Rightarrow n = 6.$$

Promień orbity o $n = 6$ równy jest

$$r_n = a_0 n^2 = a_0 6^2 = 36 a_0 = 36 \cdot 0{,}529 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} = 19{,}04 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{m} \cong 19\,\text{Å}.$$

Widzimy więc, że po zaabsorbowaniu fotonu o długości fali $93{,}7\ \mathrm{nm}$ rozmiar atomu wodoru w stanie $n = 6$ jest 36 razy większy niż w stanie podstawowym. Energia piątego stanu wzbudzonego ($n = 6$) wynosi

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} = -\frac{E_0}{6^2} = -\frac{E_0}{36} = -\frac{13{,}6\,\mathrm{eV}}{36} \cong -0{,}378\,\mathrm{eV}.$$

Po zaabsorbowaniu fotonu energia atomu wodoru jest wyższa od energii stanu podstawowego. Jonizacja atomu w piątym stanie wzbudzonym wymaga 36 razy mniej energii niż jonizacja atomu w stanie podstawowym

$$E_{\text{jonizacji},6} = -E_6 = -(-0{,}378\,\text{eV}) = 0{,}378\,\text{eV}\,.$$

Znaczenie

W powyższy sposób możemy przeanalizować dowolne linie w widmie atomu wodoru. Doświadczalne pomiary linii spektralnych dostarczają nam więc informacji na temat struktury tego atomu.

6.10 Sprawdź, czy rozumiesz. Jaką wartość prędkości oraz energii kinetycznej elektronu przewiduje model Bohra w pierwszym stanie wzbudzonym atomu wodoru? Ile wynosi jego moment pędu?

Zaproponowany przez Bohra model atomu opisuje poprawnie także widma jonów wodoropodobnych. **Jony wodoropodobne** (ang. **hydrogen-like ions**) powstają z atomów o liczbie atomowej Z większej niż jeden (dla wodoru $Z = 1$), po usunięciu wszystkich elektronów poza jednym. Przykładowo elektrycznie obojętny atom helu ma liczbę atomową $Z = 2$. Oznacza to, że znajdują się w nim dwa elektrony krążące po orbitach wokół jądra o ładunku $q = +Ze$. Gdy jeden z elektronów zostanie wyrwany z atomu (mówimy, że atom został jednokrotnie zjonizowany), powstaje wodoropodobna struktura atomowa, w której wokół tego jądra krąży tylko jeden elektron. Możemy teraz dla takiego jonu powtórzyć poprzednio przeprowadzone rozumowanie, zmieniając tylko ładunek jądra na $+Ze$, zaczynając ponownie od wzoru (Równanie 6.36), aby otrzymać następujące rezultaty

$$r_n = \frac{a_0}{Z} n^2, \tag{6.51}$$

gdzie a_0 jest promieniem Bohra

$$E_n = -Z^2 E_0 \frac{1}{n^2}, \tag{6.52}$$

gdzie E_0 jest energią stanu podstawowego. Równania te stanowią dobre przybliżenie dla jąder o niewielkich liczbach atomowych Z.

Model Borha ma duże znaczenie historyczne w rozwoju nauki, gdyż był pierwszym modelem atomu zakładającym skwantowanie orbit elektronu i wprowadzającym pojęcie atomowych liczb kwantowych. Ma on jednak istotne wady i ograniczenia: zawiera arbitralne założenie o tym, że elektrony znajdujące się na dozwolonych orbitach nie tracą energii przez promieniowanie, łączy idee kwantowe z klasycznym opisem ruchu elektronu w atomie. Duży sukces, jakim było opisanie widma wodoru, spowodował jednak poszukiwania pełniejszej teorii oraz dalszy rozwój mechaniki kwantowej, między innymi wprowadzenie zupełnie nowego pojęcia „fal materii”.

6.5 | Fale de Broglie’a

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać hipotezę de Broglie’a o istnieniu fal materii;
- wyjaśniać, w jaki sposób hipoteza de Broglie’a dostarczyła uzasadnienia dla kwantowania momentu pędu w modelu atomu zaproponowanym przez Bohra;
- opisywać doświadczenie Davissona-Germera;
- interpretować ideę fal materii de Broglie’a i to, jak wyjaśnia ona zjawiska dyfrakcyjne w rozpraszaniu elektronów.

Z analizy rozpraszania Comptona i efektu fotoelektrycznego wynika, że fala elektromagnetyczna podczas oddziaływania z materią zachowuje się jak zbiór cząstek, zwanych fotonami. W 1924 roku **Louis de Broglie (1892–1987)** zaproponował nową hipotezę, zakładającą, że elektrony i inne cząstki materii mogą zachowywać się jak fale. Ideę tę nazywamy **hipotezą de Broglie'a o falach materii** (ang. **de Broglie's hypothesis of matter waves**). Hipoteza ta doprowadziła do rozwoju **mechaniki kwantowej** (ang. **wave quantum mechanics**), opisującej zjawiska fizyczne w mikroświecie atomów i cząstek elementarnych, w konsekwencji także do wielu nowych odkryć technologicznych, takich jak: lasery, tranzystory, mikroskopy elektronowe, rezonans magnetyczny czy diody. Dzięki temu przyczyniła się także do rozwoju wielu innych dziedzin, a będąc podstawą współczesnej elektroniki, wpływa na całe nasze życie.

Zgodnie z hipotezą de Broglie'a wielkości opisujące zarówno bezmasowe fotony, jak i masywne cząstki muszą spełniać taki sam zestaw równań łączących energię E z częstotliwością ν i pęd p z długością fali λ. Omawialiśmy te związki dla fotonu w kontekście rozpraszania Comptona, teraz rozważymy je w ogólniejszym przypadku. Każdej cząstce o danej energii i pędzie towarzyszy **fala de Broglie'a** (ang. **de Broglie wave**) o częstotliwości ν i długości fali λ

$$E = h\nu, \tag{6.53}$$

$$\lambda = \frac{h}{p}, \tag{6.54}$$

gdzie E i p oznaczają odpowiednio relatywistyczną energię i pęd cząstki. Możemy te relacje wyrazić przy użyciu wektora falowego $\vec{k}$, $k = 2\pi / \lambda$ i częstości $\omega = 2\pi\nu$

$$E = \hbar\omega, \tag{6.55}$$

$$\vec{p} = \hbar\vec{k}. \tag{6.56}$$

Przekształcając ten wzór i podstawiając $E = \gamma mc^2$ oraz $p = \gamma mu$, otrzymujemy następującą relację

$$\lambda\nu = \frac{\omega}{k} = \frac{E / \hbar}{p / \hbar} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mu} = \frac{c^2}{u} = \frac{c}{\beta}, \tag{6.57}$$

gdzie $\beta = u / c$. Dla cząstki bezmasowej zachodzi $u = c$ i Równanie 6.57 sprowadza się do $\lambda\nu = c$.

Przykład 6.11

Jak długie są fale de Broglie'a?

Wyznaczmy długość fali de Broglie'a

a. piłki do koszykówki o masie $0{,}65\ \mathrm{kg}$ rzuconej z prędkością $10\ \mathrm{m / s}$;

b. nierelatywistycznego elektronu o energii kinetycznej $1\ \mathrm{eV}$;

c. relatywistycznego elektronu o energii kinetycznej $108\ \mathrm{keV}$.

Strategia rozwiązania

Aby wyznaczyć długość fali de Broglie'a, skorzystamy z Równania 6.57. W przypadku obiektu poruszającego się z nierelatywistyczną prędkością u, tak jak w przypadku (a), gdy $\beta = u / c \ll 1$, możemy skorzystać ze wzorów nierelatywistycznych. Gdy nie możemy skorzystać z przybliżenia nierelatywistycznego, tak jak w przypadku (c), musimy użyć ścisłego wyrażenia na pęd $p = mu = m_0\gamma u = E_0\gamma\beta$, gdzie energia

spoczynkowa dana jest wzorem $E_0 = m_0 c^2$, a γ jest czynnikiem Lorentza $\gamma = 1 \big/ \sqrt{1-\beta^2}$. Całkowita energia E cząstki dana jest wzorem (Równanie 6.53), a energia kinetyczna wyraża się przez $E_k = E - E_0 = (\gamma - 1)E_0$. Gdy znamy już energię kinetyczną, możemy odwrócić zależność (Równanie 6.18), aby wyznaczyć pęd $p = \sqrt{\left(E^2 - E_0^2\right) / c^2} = \sqrt{E_k\,(E_k + 2E_0)} \big/ c$ i podstawić go do Równania 6.57

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E_k\,(E_k + 2E_0)}}. \tag{6.58}$$

Ze względu na rozważany przypadek wygodnie będzie użyć innej postaci wyrażenia hc

$$hc = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m / s} = 1{,}986 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{J\,m} = 1{,}241\,\mathrm{eV\,\mu m}.$$

Rozwiązanie

a. Energia kinetyczna piłki wynosi

$$E_k = \frac{m_0 u^2}{2} = \frac{0{,}65\,\mathrm{kg} \cdot (10\,\mathrm{m / s})^2}{2} = 32{,}5\,\mathrm{J},$$

a energia spoczynkowa

$$E_0 = m_0 c^2 = 0{,}65\,\mathrm{kg} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m / s}\right)^2 = 5{,}84 \cdot 10^{16}\,\mathrm{J}.$$

Zauważmy, że $E_k / (E_k + E_0) \ll 1$, korzystamy więc z

$$p = m_0 u = 0{,}65\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m / s} = 6{,}5\,\mathrm{J\,s / m}$$

i podstawiamy do wzoru na długość fali

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{6{,}5\,\mathrm{J\,s / m}} = 1{,}02 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{m}.$$

b. W przypadku nierelatywistycznego elektronu

$$E_0 = m_0 c^2 = 9{,}109 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m / s}\right)^2 = 511\,\mathrm{keV}$$

i przy $E_k = 1\,\mathrm{eV}$, zachodzi $E_k / (E_k + E_0) = (1 / 512) \cdot 10^{-3} \ll 1$, możemy więc skorzystać ze wzoru nierelatywistycznego. Jednakże prościej będzie skorzystać wprost z Równania 6.58

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E_k\,(E_k + 2E_0)}} = \frac{1{,}241\,\mathrm{eV\,\mu m}}{\sqrt{1\,\mathrm{eV} \cdot (1\,\mathrm{eV} + 2 \cdot 511\,\mathrm{keV})}} = 1{,}23\,\mathrm{nm}.$$

c. W przypadku szybkiego elektronu o energii kinetycznej $E_k = 108\,\mathrm{keV}$ nie można pominąć efektów relatywistycznych, ponieważ energia całkowita wynosi $E = E_k + E_0 = 108\,\mathrm{keV} + 511\,\mathrm{keV} = 619\,\mathrm{keV}$ i stosunek $E_k / E = 108 / 619$ nie jest zaniedbywalnie mały

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{E_k\,(E_k + 2E_0)}} = \frac{1{,}241\,\mathrm{eV\,\mu m}}{\sqrt{108\,\mathrm{keV} \cdot (108\,\mathrm{keV} + 2 \cdot 511\,\mathrm{keV})}} = 3{,}55\,\mathrm{pm}.$$

Znaczenie

Z powyższych obliczeń wynika, że długość fali de Broglie'a obiektów makroskopowych, takich jak piłka, jest niemierzalnie mała i wszystkie efekty związane z falową naturą takich obiektów są nieistotne.

6.11 Sprawdź, czy rozumiesz. Ile wynosi długość fali de Broglie'a nierelatywistycznego protonu o energii kinetycznej $1\,\mathrm{eV}$?

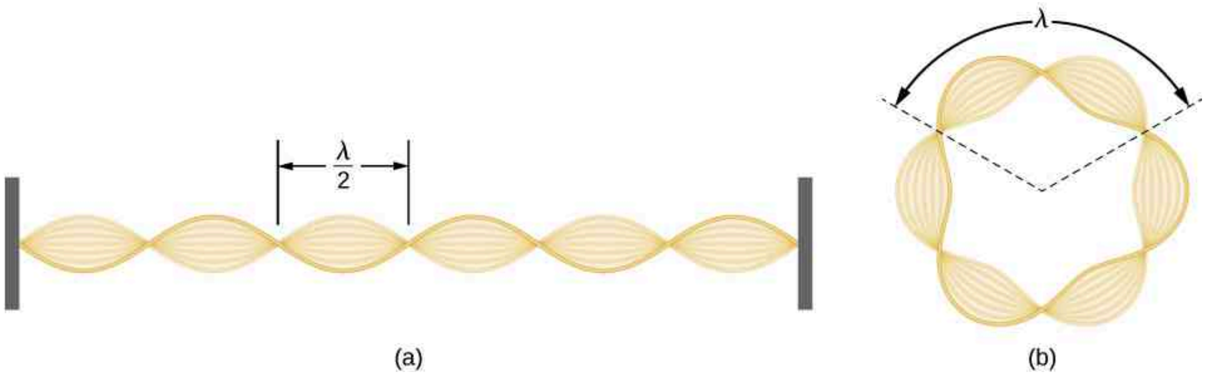
Hipoteza fal materii pozwoliła de Broglie'owi znaleźć uzasadnienie dla postulatu Bohra dotyczącego kwantowania momentu pędu elektronu w atomie wodoru. Fizyczne wyjaśnienie tego warunku kwantowania staje się jasne, gdy założy się, że elektron w atomie wykazuje cechy falowe. Aby to lepiej zrozumieć, możemy wyobrazić sobie drgającą strunę o długości l (Rysunek 6.18). Długość fali stojącej nie może być dowolna, całkowita wielokrotność k połowy jej długości $\lambda / 2$ musi bowiem być równa długości struny l. Daje to następujący warunek: $l = k\lambda / 2$ na długość fali stojącej drgań struny. Rozważmy teraz, zamiast prostej struny, strunę w kształcie okręgu. Drgania takiej struny muszą teraz spełniać podobny warunek, z tym że wielokrotność połówek fal musi być w tym przypadku liczbą parzystą k, $k = 2n$. W dodatku długość l jest związana z promieniem okręgu r_n. Oznacza to, że promienie te nie mogą być dowolne, ale spełniać muszą następującą zależność

$$2\pi r_n = 2n\frac{\lambda}{2}. \tag{6.59}$$

Zgodnie z Równaniem 6.59 długość fali de Broglie'a elektronu na n-tej orbicie musi być równa $\lambda = 2\pi r_n / n$. Korzystając z Równania 6.58, możemy wyznaczyć pęd takiego elektronu $p = h / \lambda = nh / (2\pi r_n) = n\hbar / r_n$. Na orbicie kołowej moment pędu wynosi więc

$$L_n = r_n p = r_n \frac{n\hbar}{r_n} = n\hbar. \tag{6.60}$$

Uzyskaliśmy w ten sposób zapostulowany przez Bohra pierwszy warunek kwantyzacji (Równanie 6.36). Wyjaśnienie tego warunku stanowiło przekonujący argument za istnieniem fal materii.



Rysunek 6.18 Fala stojąca: (a) na strunie przyczepionej z obu stron do ściany, (b) elektronu na trzeciej orbicie w modelu atomu Bohra.

Przykład 6.12

Fale de Broglie'a elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru

Wyznaczmy długość fali de Broglie'a elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru.

Strategia rozwiązania

Skorzystamy z pierwszego warunku kwantyzacji (Równanie 6.60) oraz z Równania 6.36 i Równania 6.38 dla pierwszej orbity.

Rozwiązanie

Gdy $n = 1$, a $r_n = a_0 = 0{,}529\,\text{Å}$, z warunku kwantyzacji wynika $a_0 p = 1 \cdot \hbar \Rightarrow p = \hbar / a_0$. Długość fali elektronu wynosi

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\hbar / a_0} = 2\pi a_0 = 2\pi \cdot 0{,}529\,\text{Å} = 3{,}324\,\text{Å}.$$

Znaczenie

Ten sam wynik otrzymać można bezpośrednio z Równania 6.58.

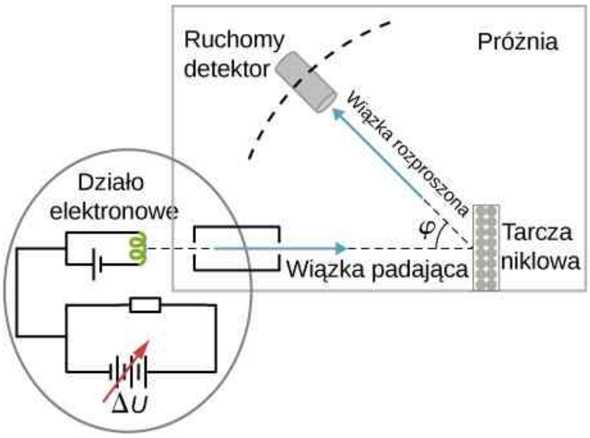
6.12 Sprawdź, czy rozumiesz. Wyznacz długość fali elektronu w trzecim stanie wzbudzonym atomu wodoru.

Eksperymentalne potwierdzenie istnienia fal materii przyszło w roku 1927, gdy **C. Davisson (1881–1958)** i **L. Germer (1896–1971)** przeprowadzili eksperyment rozpraszania elektronów na kryształach niklu. Eksperyment pierwotnie zaplanowany w celu badania właściwości powierzchni niklu, niejako przy okazji ujawnił falową naturę elektronów.

W **doświadczeniu Davissona-Germera** (ang. **Davisson-Germer experiment**) próbka niklu została specjalnie przygotowana w wysokiej temperaturze tak, aby zmienić jej strukturę krystaliczną. Zamiast zwykłej struktury polikryształu w próbce powstały duże obszary monokrystaliczne. Rysunek 6.19 pokazuje schemat układu doświadczalnego. Elektrony termiczne, uwolnione z podgrzewanego źródła (zrobionego na przykład z wolframu) w dziale elektronowym, przyspieszane były przy pomocy różnicy potencjałów ΔV, tworząc wiązkę elektronów. Energia kinetyczna elektronów może być regulowana poprzez zmianę wartości tej różnicy potencjałów. Pęd rozpędzonych w ten sposób elektronów wynosi

$$e\Delta V = E_\mathrm{k} = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow p = \sqrt{2me\Delta V}. \tag{6.61}$$

Wiązka elektronów pada na powierzchnię próbki niklu pod kątem prostym, rozpraszając się na niej w różnych kierunkach. Natężenie wiązki rozproszonej pod kątem φ mierzone jest przy pomocy bardzo czułych detektorów. Położenie kątowe detektora względem kierunku padającej wiązki zmienia się w zakresie od $\varphi = 0°$ do $\varphi = 90°$. Cały układ doświadczalny zamknięty jest w komorze próżniowej, aby wykluczyć zderzenia elektronów z cząsteczkami powietrza.



Rysunek 6.19 Schemat układu doświadczalnego Davissona-Germera. Spójna wiązka elektronów rozpraszana jest na tarczy niklowej. Energia kinetyczna elektronów regulowana jest poprzez przyłożoną różnicę potencjałów ΔV w dziale elektronowym. Natężenie rozproszonej wiązki elektronów mierzone jest pod różnymi kątami φ, w tej samej odległości od tarczy.

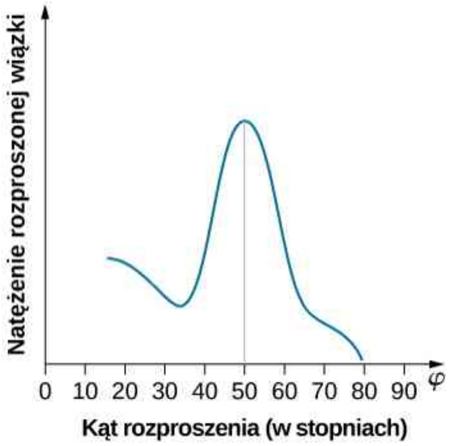
Gdy tarcza ma strukturę polikryształu z wieloma przypadkowo zorientowanymi mikroskopowymi kryształami, padające elektrony rozpraszają się na jej powierzchni w przypadkowych kierunkach. W rezultacie natężenie rozproszonej wiązki elektronów jest takie samo w każdym kierunku, analogicznie jak w przypadku światła rozproszonego na porowatej powierzchni. Jednakże gdy tarcza ma regularną strukturę krystaliczną, w natężeniu rozproszonej wiązki obserwuje się silne maksima przy wybranych kątach i wykazuje ono wyraźny wzór dyfrakcyjny (zobacz Rysunek 6.20). Podobne wzory dyfrakcyjne badane były przez **Williama H. Bragga (1862–1942)** i **Williama L. Bragga (1890–1971)** (ojca i syna) w roku 1912 w rozpraszaniu promieniowania rentgenowskiego na kryształach. Sformułowane przez nich prawo Bragga łączy długość fali λ padającego promieniowania, odległość między węzłami sieci krystalicznej i położenie maksimum dyfrakcyjnego rozproszonego promieniowania (zobacz Dyfrakcja).

Odległość między węzłami siatki krystalicznej w tarczy użytej w eksperymencie Davissona-Germera, wyznaczona przy pomocy krystalografii rentgenowskiej, wynosiła $a = 2{,}15\,\mathrm{Å}$. W eksperymencie z wiązką elektronową tylko atomy na powierzchni próbki oddziałują z padającymi elektronami. W przypadku takiej dyfrakcji na powierzchni maksimum natężenia odbitej wiązki elektronów obserwuje się przy kątach spełniających warunek $n\lambda = a \sin\varphi$ (zobacz Rysunek 6.21). Pierwsze maksimum (dla $n = 1$) zmierzono przy $\varphi \approx 50°$ dla $\Delta V \approx 54\,\mathrm{V}$. Wyznaczona stąd długość fali wynosi $\lambda = 2{,}15\,\mathrm{Å} \cdot \sin 50° = 1{,}64\,\mathrm{Å}$. Różnica potencjałów o wartości $54\,\mathrm{V}$ przyspiesza nato-

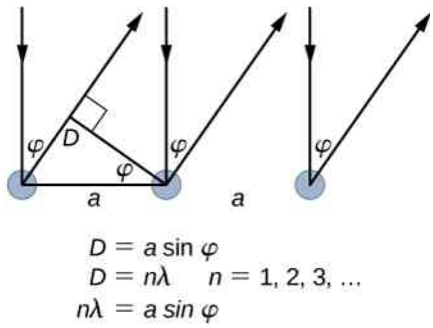
miast padające elektrony do energii kinetycznej $E_\mathrm{k} = 54\,\mathrm{eV}$. Ich pęd, obliczony przy pomocy Równania 6.61, wynosi $p = 2{,}478 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV\,s\,/\,m}$. Gdy użyjemy tej wartości we wzorze (Równanie 6.58), wyznaczona długość fali de Broglie'a wynosi

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eV\,s}}{2{,}478 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{eV\,s\,/\,m}} = 1{,}67\,\mathring{\mathrm{A}}. \tag{6.62}$$

Zgodność tego teoretycznego przewidywania z uzyskanym przez Davissona i Germera wynikiem eksperymentalnym $\lambda = 1{,}64\,\mathring{\mathrm{A}}$ stanowi przekonywujący dowód realności fal materii.

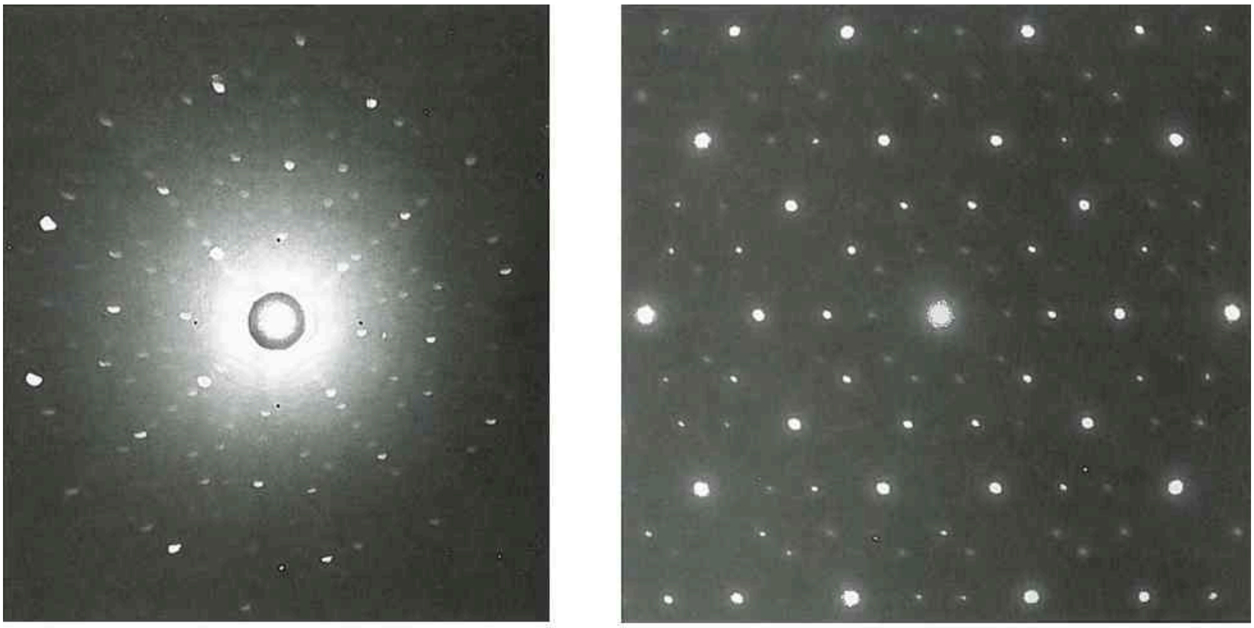


Rysunek 6.20 Wyniki eksperymentalne rozpraszania elektronów na tarczy niklowej przy różnicy potencjału w dziale elekronowym wynoszącej około $\Delta V = 54\,\mathrm{V}$: maksimum natężenia obserwuje się przy kącie rozpraszania około $\varphi = 50°$.



Rysunek 6.21 Gdy monochromatyczna fala elektromagnetyczna rozprasza się na powierzchni kryształu, fale padające zgodne w fazie rozpraszają się na atomach sieci. Promień odbity od atomu znajdującego się po lewej stronie pokonuje dodatkową odległość $D = a \sin\varphi$ do detektora, gdzie a jest odległością między atomami sieci. Odbite promienie pozostają zgodne w fazie, gdy D jest całkowitą wielokrotnością długości ich fali λ. Natężenie odbitego promieniowania ma więc maksima dla kątów φ spełniających $n\lambda = a \sin\varphi$.

Linie dyfrakcyjne mierzone przy użyciu niskoenergetycznych elektronów, takich jak w eksperymencie Davissona-Germera, są dość szerokie (zobacz Rysunek 6.20), ponieważ padające elektrony rozpraszane są tylko na powierzchni próbki. Rozdzielczość obrazów dyfrakcyjnych poprawia się bardzo, gdy użyje się elektronów o bardzo wysokiej energii, przechodzących przez cienką, metalową folię. Uzyskane w ten sposób, zgodnie ze wzorem Bragga, maksima dyfrakcyjne są dużo wyraźniejsze (zobacz Rysunek 6.22).



(a) (b)

Rysunek 6.22 Wzory dyfrakcyjne uzyskane w rozpraszaniu na kryształach: (a) promieni rentgenowskich, (b) elektronów. Obserwowany wzór odpowiada symetrii struktury krystalicznej badanej próbki.

Od czasu eksperymentów Davisona i Germera hipoteza de Broglie'a sprawdzana była przy użyciu wielu technik eksperymentalnych i istnienie fal materii potwierdzono dla wielu cząstek. W eksperymentach mających na celu zbadanie struktury krystalicznej materiałów wykorzystuje się neutrony poprzez badanie wzorów dyfrakcyjnych ich fal materii. Wynika stąd, że własności falowe nie są związane z jakimiś specjalnymi cechami cząstek (jak na przykład ładunek elektryczny), ale dotyczą wszystkich – bez wyjątku. Zbadano nawet fale materii związane z tak dużymi obiektami, jak cząsteczka węgla C_{60}.

Przykład 6.13

Rozpraszanie neutronów

Rozważmy strumień neutronów używany w eksperymencie dyfrakcyjnym na krysztale. Oszacujmy energię kinetyczną neutronu (w eV) w tym strumieniu i porównajmy ją z energią kinetyczną cząstki gazu doskonałego w temperaturze pokojowej.

Strategia rozwiązania

Odległość między atomami typowej sieci krystalicznej wynosi około $1\,\text{Å}$. Aby dało się zaobserwować wzór dyfrakcyjny na takiej sieci, długość fali neutronów λ musi być tego samego rzędu. Skorzystamy z Równania 6.61, aby wyznaczyć pęd p i energię kinetyczną E_k. Aby porównać tę energię z energią E_T cząstki gazu doskonałego w temperaturze pokojowej $T = 300\,\mathrm{K}$, skorzystamy ze wzoru $E_\mathrm{k} = 3k_\mathrm{B}T\,/\,2$, gdzie $k_\mathrm{B} = 8{,}62 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}\,/\,\mathrm{K}$ jest stałą Boltzmanna.

Rozwiązanie

Wyznaczmy najpierw pc i porównajmy tę wielkość z energią spoczynkową neutronu $E_0 = 940\,\mathrm{MeV}$

$$p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow pc = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1{,}241 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV\,m}}{10^{-10}\,\mathrm{m}} = 12{,}41\,\mathrm{keV}\,.$$

Widzimy, że $p^2c^2 \ll E_0^2$, zatem $E_\mathrm{k} \ll E_0$, możemy więc skorzystać z nierelatywistycznego wzoru na energię

$$E_k = \frac{p^2}{2m_n} = \frac{h}{2\lambda^2 m_n} = \frac{\left(6{,}63 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{m}^2 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}} = 1{,}32 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{J} = 82{,}7\,\mathrm{MeV}\,.$$

Energia kinetyczna cząstki gazu idealnego w temperaturze $300\,\mathrm{K}$ wynosi

$$E_{kT} = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \cdot 8{,}62 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}\,/\,\mathrm{K} \cdot 300\,\mathrm{K} = 38{,}8\,\mathrm{MeV}\,.$$

Widzimy, że energie te są tego samego rzędu.

Znaczenie

Neutrony o takich energiach, porównywalnych z energią cząstki gazu doskonałego w temperaturze pokojowej, zwane są neutronami termicznymi.

Przykład 6.14

Długość fali relatywistycznego protonu

W wielkim zderzaczu hadronów w CERN protony rozpędzane są do prędkości równych nawet 0,999 999 prędkości światła. Jaka jest długość fali protonu o prędkości $0{,}75c$? Ile wynosi jego energia kinetyczna?

Strategia rozwiązania

Energia spoczynkowa protonu wynosi

$$E_0 = m_0 c^2 = 1{,}672 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2{,}998 \cdot 10^8\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}\right)^2 = 938\,\mathrm{MeV}\,.$$

Dla danej prędkości protonu mamy $\beta = 0{,}75$ oraz $\beta\gamma = 0{,}75 \Big/ \sqrt{1-(0{,}75)^2} = 1{,}714$. Ze związków relatywistycznych otrzymujemy długość fali λ oraz energię kinetyczną E_k.

Rozwiązanie

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{pc} = \frac{hc}{\beta\gamma E_0} = \frac{1{,}241\,\mathrm{eV\,\mu m}}{1{,}714 \cdot 938\,\mathrm{MeV}} = 0{,}77\,\mathrm{fm}\,,$$

$$E_k = E_0(\gamma - 1) = 938\,\mathrm{MeV} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1-(0{,}75)^2}} - 1\right) = 480{,}1\,\mathrm{MeV}\,.$$

Znaczenie

Zauważmy, że ponieważ proton jest 1835 razy masywniejszy od elektronu, to odpowiednie wielkości dla rozpędzonego do takiej samej prędkości elektronu otrzymalibyśmy przez proste przeskalowanie uzyskanych powyżej wyników. Długość fali elektronu wynosiłaby $1865 \cdot 0{,}77\,\mathrm{fm} = 1{,}4\,\mathrm{pm}$, a jego energia kinetyczna $480{,}1\,\mathrm{MeV}\,/\,1835 = 261{,}6\,\mathrm{keV}$.

6.13 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyznacz długość fali de Broglie'a i energię kinetyczną elektronu rozpędzonego do 0,9 prędkości światła c.

6.6 | Dualizm korpuskularno-falowy

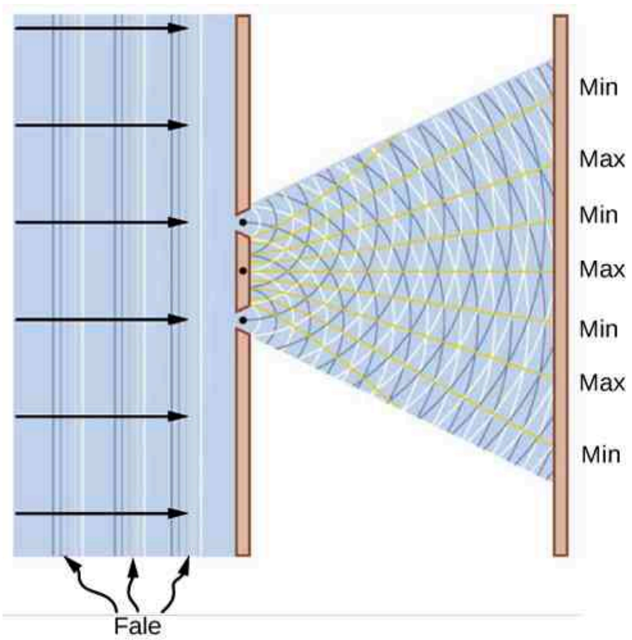
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- identyfikować zjawiska, w których fale elektromagnetyczne zachowują się jak wiązka fotonów, i takie, w których cząstki wykazują własności falowe;
- opisywać zjawiska fizyczne będące podstawą działania mikroskopu elektronowego;
- opisywać drogę, która doprowadziła do sformułowania mechaniki kwantowej.

Promieniowanie elektromagnetyczne w pewnych zjawiskach, takich jak na przykład odbierany przez antenę sygnał radiowy, zachowuje się jak rozchodząca się w przestrzeni fala. W innych, takich jak rozważany już efekt fotoelektryczny, zachowuje się jak zbiór cząstek zwanych fotonami. Stąd naturalne jest zadanie pytania: jaka jest natura promieniowania elektromagnetycznego, czy foton jest cząstką, czy falą? Podobne pytanie możemy postawić w stosunku do innych obiektów. Na przykład elektron w obwodzie, w którym płynie prąd, zachowuje się jak cząstka poruszająca się wraz z innymi nośnikami wewnątrz przewodnika. Natomiast elektron przechodzący przez strukturę krystaliczną i tworzący obraz dyfrakcyjny wykazuje własności falowe. To samo dotyczy wszystkich cząstek elementarnych, a także bardziej złożonych obiektów, takich jak atomy czy cząsteczki. Wszystko, co możemy odpowiedzieć, na pytanie o naturę takich obiektów, to to, że w pewnych zjawiskach przejawiają się ich własności cząstkowe, a w innych falowe. Własność tę nazwano **dualizmem korpuskularno-falowym** (ang. **wave-particle duality**).

Taka dualność opisu nie pojawiła się po raz pierwszy w fizyce dopiero w XX wieku. Była obecna już w 1670 roku w debacie pomiędzy Izaakiem Newtonem a Christiaanem Huygensem dotyczącej natury światła. Według Newtona światło należało traktować jak zbiór cząstek, według Huygensa – było falą. Hipoteza cząstek została odrzucona w roku 1803, gdy **Thomas Young (1773–1829)** ogłosił wyniki swojego **eksperymentu z dwiema szczelinami** (ang. **double-slit interference experiment**), Rysunek 6.23, które jasno wskazywały na falowe zachowanie światła. W sformułowanej przez Jamesa Clerka Maxwella teorii elektromagnetyzmu (ukończonej w roku 1873) światło jest falą elektromagnetyczną. Równań Maxwella używamy także współcześnie, jednak nie są one w stanie wyjaśnić ani promieniowania ciała doskonale czarnego, ani efektu fotoelektrycznego, w przypadku którego światło zachowuje się jak strumień fotonów.

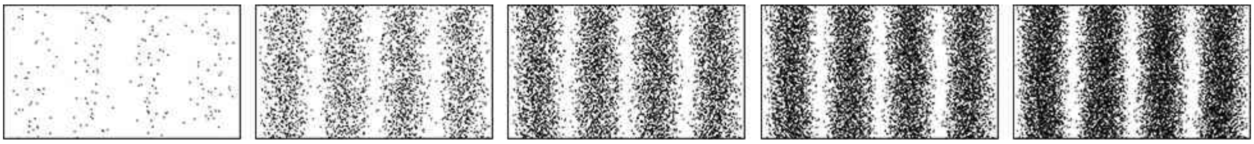


Rysunek 6.23 Wyniki doświadczenia Younga z dwiema szczelinami zrozumieć można poprzez analogię z interferencją fal na wodzie. Dwie fale tej samej długości wygenerowane są w miejscu położenia szczelin w nieprzepuszczalnej zasłonie. Przemieszczają się od źródeł (w miejscu położenia szczelin) do ekranu umieszczonego za zasłoną. Fale spotykają się na ekranie i w miejscach oznaczonych na rysunku przez „Max” są w tej samej fazie, więc ich wypadkowa amplituda wzrasta. W miejscach oznaczonych „Min” są w fazie przeciwnej, więc ich amplituda znika. W przypadku światła mechanizm ten powoduje powstanie prążków na ekranie.

Podobna dychotomia istniała też w opisie elektryczności. Od obserwacji Benjamina Franklina w 1751 roku do odkrycia elektronu przez J. J. Thomsona prąd elektryczny opisywany był jako przepływ w pewnym ciągłym ośrodku. W ramach tej teorii fluidu elektrycznego rozwijano teorię obwodów elektrycznych, elektromagnetyzmu i indukcji. Eksperyment Thomsona udowodnił jednak, że nośniki ładunku elektrycznego (elektrony) mogą się przemieszczać w próżni bez żadnego ośrodka. W zaproponowanym przez Bohra modelu atomu wodoru zarówno elektron, jak i proton były cząstkami materii. Podobnie w rozpraszaniu Comptona elektrony traktuje się jak cząstki. Jednakże w rozpraszaniu elektronów na strukturach krystalicznych elektron wykazuje własności falowe.

Gdyby ktoś uważał wynik doświadczeń dyfrakcyjnych za niewystarczające potwierdzenie falowej natury elektronów, przekonującego dowodu dostarczyć powinno powtórzenie eksperymentu Younga z dwiema szczelinami dla elektronów. Jeśli elektron jest falą, powinniśmy zaobserwować tworzenie się prążków interferencyjnych, takich jak na Rysunku 6.23, nawet gdy elektrony przechodzą przez szczeliny pojedynczo. Jednakże gdy elektron falą nie jest, prążków nie zaobserwuje się.

Pierwszy eksperyment z dwiema szczelinami, przez które przechodziła wiązka elektronów, przeprowadził Claus Jönsson w Niemczech w roku 1961, stwierdzając, że wiązka elektronów rzeczywiście tworzy wzór interferencyjny. Stanowiło to dowód, że wiązka ta wykazuje własności falowe. Jednakże dopiero w 1974 roku **Giulio Pozzi (ur. 1945)** we Włoszech i w 1989 roku **Akira Tonomura (1942–2012)** w Japonii przeprowadzili doświadczenia, w których elektrony pojedynczo przechodziły przez szczeliny. Zaobserwowali oni, że nawet w tym przypadku miało miejsce stopniowe tworzenie się prążków interferencyjnych. To ponad wszelką wątpliwość dowodzi falowej natury elektronów. Rezultaty doświadczeń z elektronami przechodzącymi przez podwójną szczelinę zilustrowane są na Rysunku 6.24.



Rysunek 6.24 Komputerowa symulacja prążków interferencyjnych obserwowanych w doświadczeniu Younga z dwiema szczelinami, przez które przechodzą elektrony. Prążki tworzą się niezależnie od tego, czy elektrony przechodzą pojedynczo, czy też jako wiązka.

Przykład 6.15

Eksperyment z elektronami przechodzącymi przez dwie szczeliny

W jednym z układów doświadczalnych do badania wzorów interferencyjnych tworzonych przez fale stowarzyszone z elektronami dwie szczeliny wykonano w pokrytej złotem silikonowej membranie. Każda ze szczelin ma 62 nm szerokości i 4 µm długości, a odległość między nimi wynosi 272 nm. Strumień elektronów wytworzony jest w dziale elektronowym poprzez podgrzanie elementu wolframowego i przyspieszenie elektronów różnicą potencjałów o wartości 600 V. Strumień jest następnie skupiany przy pomocy soczewek elektromagnetycznych i kierowany na dwie szczeliny. Znajdźmy położenie pierwszego prążka interferencyjnego na ekranie.

Strategia rozwiązania

Przypomnijmy, że kątowe położenie θ n-tego prążka we wzorze interferencyjnym w doświadczeniu Younga związane jest z odległością d między szczelinami oraz z długością fali padającej λ następującym wzorem $d \sin \theta = n\lambda$, gdzie $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Odległość jest znana i równa $d = 272 \text{ nm}$. Aby wyznaczyć położenie pierwszego prążka, podstawiamy $n = 1$. Potrzebujemy teraz tylko wyznaczyć długość fali.

Elektron przyspieszony został różnicą potencjałów $\Delta V = 600 \text{ V}$, więc jego energia kinetyczna wynosi $E_\text{k} = e\Delta V = 600 \text{ eV}$. Energia spoczynkowa elektronu wynosi $E_0 = 511 \text{ keV}$.

Obliczymy długość fali de Broglie'a, korzystając z wzorów nierelatywistycznych, gdyż jego energia kinetyczna E_k jest dużo mniejsza od energii spoczynkowej E_0 $(E_\text{k} \ll E_0)$.

Rozwiązanie

Długości fali elektronu wynosi

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m_e E_k}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_0 / c^2 \cdot E_k}} = \frac{hc}{\sqrt{2E_0 E_k}}$$

$$= \frac{1{,}241 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{eV\,m}}{\sqrt{2 \cdot 511\,\mathrm{keV} \cdot 600\,\mathrm{eV}}} = 0{,}05\,\mathrm{nm}\,.$$

Wyznaczoną w ten sposób wartość λ wykorzystujemy do obliczenia położenia pierwszego prążka

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{0{,}05\,\mathrm{nm}}{272\,\mathrm{nm}} = 0{,}000\,184 \Rightarrow \theta = 0{,}01°.$$

Znaczenie

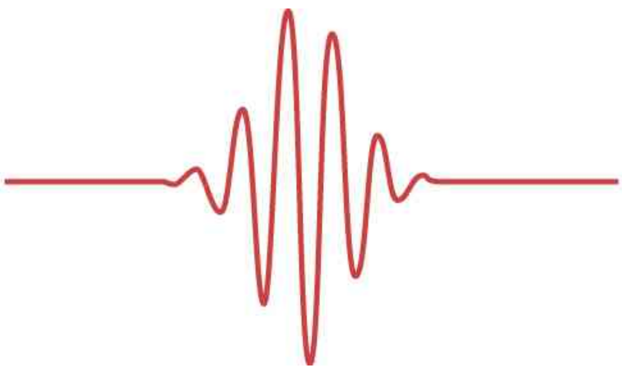
Zauważmy, że tyle wynosi (w danym przybliżeniu) odległość między kolejnymi prążkami, aż do $n = 1000$.

6.14 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wyznacz położenie kątowe piątego prążka interferencyjnego w układzie opisanym w Przykładzie 6.15.

Dualna, korpuskularno-falowa natura materii i promieniowania jest wyrazem naszej niezdolności do opisu świata przy użyciu fizyki klasycznej. Ograniczenie to doprowadziło, począwszy od 1928 roku, do sformułowania przez Bohra, **Erwina Schrödingera (1887–1961)**, **Wernera Heisenberga (1901–1976)** i **Paula Diraca (1902–1984)** nowej teorii, zwanej mechaniką kwantową. Postuluje ona istnienie związanej z każdym obiektem fizycznym funkcji falowej, niosącej informację na temat rozkładu prawdopodobieństwa jego położenia oraz wartości innych jego cech. Funkcja falowa pojedynczej cząstki reprezentowana jest przez **paczkę falową** (ang. **wave packet**; superpozycję fal o różnych częstotliwościach), którą w pewnym uproszczeniu możemy sobie wyobrażać w sposób przedstawiony na Rysunku 6.25. Intuicja podpowiada nam, że jeśli cząstka reprezentowana jest przez taką paczkę falową, to wyznaczenie jej dokładnego położenia i pędu nie jest możliwe. Ta niepewność pomiaru położenia Δx i pędu Δp wyrażona jest przez zasadę nieoznaczoności Heisenberga

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar. \tag{6.63}$$

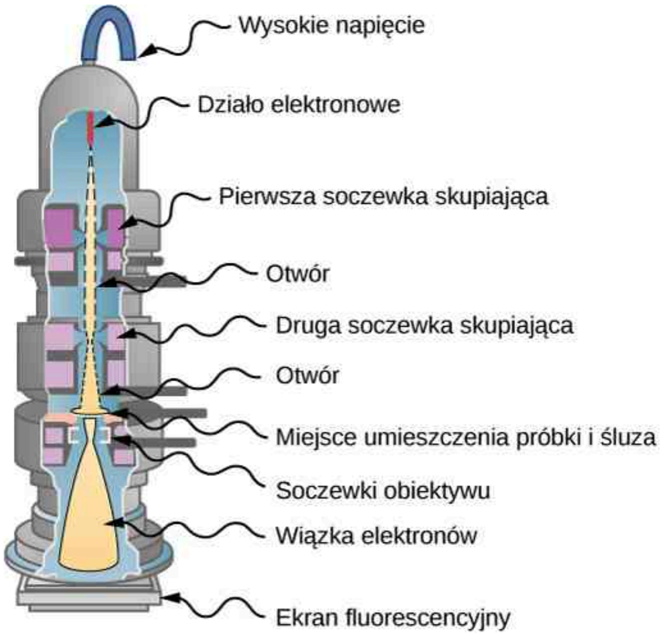
Zasada Heisenberga wyraża pewne fundamentalne ograniczenie naszych możliwości poznania w teorii kwantowej. Na przykład gdy wyznaczymy dokładnie położenie naszej cząstki (co odpowiada $\Delta x = 0$ w Równaniu 6.63), to nie będziemy mogli nic powiedzieć o jej pędzie, ponieważ niepewność jego wyznaczenia, równa $\Delta p \geq 0{,}5\hbar / \Delta x$, stanie się nieskończona. **Zasada nieoznaczoności Heisenberga** (ang. **Heisenberg's uncertainty principle**) mówi nam, że najlepsza precyzja równoczesnego pomiaru położenia i pędu dana jest, gdy w Równaniu 6.63 mamy równość, niezależnie od tego, jak precyzyjnymi urządzeniami będziemy dysponować.



Rysunek 6.25 Uproszczone wyobrażenie paczki falowej, opisującej położenie cząstki. Widzimy, że położeniu cząstki nie możemy przypisać jednego punktu w przestrzeni.

Codziennie używamy wielu urządzeń elektronicznych wykorzystujących dualną, korpuskularno-falową naturę materii, nie zdając sobie nawet sprawy z tego, jak wyszukana jest fizyka, będąca podstawą ich działania. Jednym z przykładów urządzeń wykorzystujących cząstkową naturę światła są **matryce światłoczułe CCD** (ang. **charge-coupled device**), służące do cyfrowego zapisu obrazu, znajdujące szerokie zastosowanie od astronomii i medycyny po aparaty w telefonach komórkowych. Urządzeniem, które wykorzystuje falowe własności elektronu, jest na przykład mikroskop elektronowy.

W roku 1931 fizyk **Ernst Ruska (1906–1988)**, bazując na obserwacji, że pola magnetyczne mogą sterować wiązką elektronów w podobny sposób, jak soczewki sterują wiązką światła w mikroskopie optycznym, zbudował pierwszy prototyp mikroskopu elektronowego. Osiągnięcie to zapoczątkowało dziedzinę **mikroskopii elektronowej** (ang. **electron microscopy**). W **transmisyjnym mikroskopie elektronowym** (ang. **transmission electron microscope (TEM)**), którego schemat pokazuje Rysunek 6.26, elektrony pochodzące z rozgrzanego elementu wolframowego przyspieszane są różnicą potencjału w dziale elektronowym, osiągając energię kinetyczną $400\ \mathrm{keV}$. Po opuszczeniu działa wiązka elektronów skupiana jest przy pomocy soczewek elektromagnetycznych i kierowana tak, aby przeszła przez badaną próbkę. Obraz próbki rekonstruowany jest na podstawie własności wiązki przechodzącej. Powiększony obraz można oglądać bezpośrednio na ekranie fluorescencyjnym bądź zarejestrować przez kamery i przesłać do komputera. Cały układ składający się z działa elektronowego, soczewek, próbki i fluorescencyjnego ekranu umieszczony jest w komorze próżniowej, aby zapobiec utracie energii elektronów przez zderzenia z cząstkami powietrza. Rozdzielczość takiego mikroskopu ograniczana jest tylko przez aberrację sferyczną (dyskutowaną we wcześniejszych rozdziałach). Współczesne modele TEM mają zdolność rozdzielczą większą niż $0{,}5\ \text{Å}$ i powiększenie większe niż 50 milionów razy. Dla porównania, najlepsza rozdzielczość osiągana przez tradycyjne mikroskopy optyczne wynosi $97\ \mathrm{nm}$. Istotnym ograniczeniem TEM jest jednak fakt, iż próbki muszą być bardzo cienkie, ich grubość nie powinna przekraczać około $100\ \mathrm{nm}$. Preparaty biologiczne trzeba poddać specjalnym, wstępnym procesom chemicznym, aby mogły one przetrwać „krojenie” na tak cienkie plastry.



Rysunek 6.26 TEM: wiązka elektronów pochodząca z działa elektronowego kolimowana jest przez soczewki i przechodzi przez próbkę. Przepuszczone elektrony padają na ekran. Źródło: modyfikacja pracy dr. Grahama Beardsa

Ograniczenia takie nie dotyczą natomiast **skaningowego mikroskopu elektronowego** (ang. **scanning electron microscope (SEM)**), wynalezionego przez **Manfreda von Ardenne (1907–1997)** w 1937 roku. W SEM typowa energia elektronów wynosi $40\ \mathrm{keV}$, a wiązka nie przechodzi przez próbkę, tylko odbija się od jej powierzchni. Topografia powierzchni rekonstruowana jest poprzez analizę elektronów rozproszonych (przepuszczonych przez próbkę) i promieniowania emitowanego wskutek oddziaływania elektronów z atomami w próbce. Zdolność rozdzielcza SEM przekracza $1\ \mathrm{nm}$, a powiększenie jest około 250 razy lepsze od uzyskanego w mikroskopie optycznym. Próbki mogą mieć wielkość nawet kilku centymetrów, ale muszą być specjalnie przygotowane, zależnie od ich własności elektrycznych.

Duże powiększenia uzyskiwanie w TEM i SEM pozwalają nam obejrzeć pojedyncze cząsteczki. Duże zdolności rozdzielcze umożliwiają dostrzeżenie drobnych detali, takich jak ziarna pyłku pokazane na Rysunku 6.1.

Przykład 6.16

Zdolność rozdzielcza mikroskopu elektronowego

W mikroskopie TEM wiązka elektronów o długości fali $1\ \mathrm{pm}$ wychodzi przez otwór o promieniu $2\ \mathrm{\mu m}$. Jaki jest najmniejszy kąt pomiędzy rozróżnialnymi punktowymi źródłami?

Rozwiązanie

Możemy bezpośrednio skorzystać ze wzoru na zdolność rozdzielczą $\Delta\theta$ mikroskopu (omawianą we wcześniejszym rozdziale) dla fali o długości $\lambda = 1\ \mathrm{pm}$ i średnicy otworu $D = 2\ \mathrm{\mu m}$

$$\Delta\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D} = 1{,}22 \cdot \frac{1\ \mathrm{pm}}{2\ \mathrm{\mu m}} = 6{,}1 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{rad} = 3{,}5 \cdot 10^{-5}\ {}^\circ.$$

Znaczenie

Gdybyśmy użyli zwykłego mikroskopu i światła o długości fali $400\ \mathrm{nm}$, zdolność rozdzielcza wynosiłaby tylko 14° i wszystkie szczegóły obrazu byłyby rozmyte.

6.15 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaki wpływ na zdolność rozdzielczą miałoby zmniejszenie o połowę otworu w Przykładzie 6.16?

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 6

KLUCZOWE POJĘCIA

absorber (ang. absorber) każde ciało absorbujące promieniowanie

atom wodoropodobny (ang. hydrogen-like atom) zjonizowany atom z jednym elektronem krążącym wokół jądra

ciało doskonale czarne (ang. blackbody) idealny absorber/emiter

comptonowska długość fali (ang. Compton wavelength) stała fizyczna o wartości $\lambda_C = 2{,}43\,\text{pm}$

cząstka α (ang. α-particle) podwójnie zjonizowane jądro helu

częstotliwość progowa (ang. cut-off frequency) częstotliwość padającego promieniowania, poniżej której efekt fotoelektryczny nie zachodzi

doświadczenie Davissona-Germera (ang. Davisson-Germer experiment) doświadczenie z dyfrakcją elektronów na powierzchni kryształów

dualizm korpuskularno-falowy (ang. wave-particle duality) każdy obiekt w pewnych warunkach wykazuje własności falowe, a w innych cząstkowe

efekt Comptona (ang. Compton effect) zmiana długości rozproszonej fali elektromagnetycznej

efekt fotoelektryczny (ang. photoelectric effect) emisja elektronów z metalowej powierzchni pod wpływem padającego na nią promieniowania o odpowiedniej częstotliwości

eksperyment Rutherforda (ang. Rutherford's gold foil experiment) pierwszy eksperyment odkrywający istnienie jądra atomowego

eksperyment z dwiema szczelinami (ang. double-slit interference experiment) eksperyment Younga z dwiema szczelinami, który pokazuje interferencję fal z dwóch źródeł

emiter (ang. emitter) każde ciało emitujące promieniowanie

energia fotonu (ang. energy of a photon) kwant energii promieniowania, zależy tylko od częstotliwości

energia jonizacji (ang. ionization energy) energia potrzebna do uwolnienia elektronu z atomu

fala de Broglie'a (ang. de Broglie wave) fala stowarzyszona z każdym obiektem fizycznym

fotoelektroda (ang. photoelectrode) elektroda emitująca elektrony pod wpływem padającego na nią światła

fotoelektron (ang. photoelectron) elektron wyemitowany z powierzchni metalu pod wpływem padającego na niego światła

foton (ang. photon) cząstka promieniowania elektromagnetycznego

fotoprąd (ang. photocurrent) prąd płynący w odbwodzie, gdy na fotoelektrodę pada światło

hipoteza de Broglie'a o falach materii (ang. de Broglie's hypothesis of matter waves) obiekty materialne wykazują własności falowe

hipoteza Plancka o kwantach energii (ang. Planck's hypothesis of energy quanta) wymiana energii pomiędzy ściankami i promieniowaniem zachodzi tylko w postaci dyskretnych kwantów energii

jądrowy model atomu (ang. nuclear model of the atom) zaproponowany przez Rutherforda model, w którym ciężkie jądro jest zlokalizowane w centrum atomu i otoczone przez elektrony

kąt rozproszenia (ang. scattering angle) kąt pomiędzy wiązką rozproszona a wiązką padającą

liczba falowa (ang. wave number) wartość wektora falowego

liczba kwantowa (ang. quantum number) liczba numerująca poziomy energetyczne

linie Fraunhofera (ang. Fraunhofer lines) ciemne linie absorpcyjne w ciągłym widmie promieniowania słonecznego

mikroskopia elektronowa (ang. electron microscopy) mikroskopia korzystająca z właściwości falowych elektronu; pozwala dojrzeć szczegóły obiektów o nanometrowych rozmiarach

model atomu wodoru Bohra (ang. Bohr's model of the hydrogen atom) pierwszy model atomu z elementami mechaniki kwantowej; opisuje widmo promieniowania

napięcie hamowania (ang. stopping potential) różnica potencjałów, po przyłożeniu której przestaje płynąć fotoprąd

natężenie promieniowania (ang. power intensity) energia niesiona przez promieniowanie przechodzące przez jednostkę powierzchni w jednostce czasu

postulaty modelu Bohra (ang. postulates of Bohr’s model) trzy postulaty leżące u podstaw modelu Bohra

praca wyjścia (ang. work function) energia, którą trzeba przekazać elektronowi, aby wybić go z powierzchni metalu

progowa długość fali (ang. cut-off wavelength) długość fali odpowiadająca częstotliwości progowej

promieniowanie ciała doskonale czarnego (ang. blackbody radiation) promieniowanie wysyłane przez ciało doskonale czarne

promieniowanie α (ang. α-ray) strumień cząstek α

promieniowanie β (ang. β-ray) strumień elektronów

promieniowanie γ (ang. γ-ray) strumień wysokoenergetycznych fotonów

promień Bohra (ang. Bohr radius of hydrogen) promień pierwszej orbity w modelu Bohra

przesunięcie Comptona (ang. Compton shift) różnica długości fali promieniowania rozproszonego i padającego

rozpraszanie nieelastyczne (ang. inelastic scattering) rozpraszanie, w którym energia kinetyczna padającej cząstki nie jest zachowana

seria Balmera (ang. Balmer series) linie w widmie odpowiadające przejściom elektronów ze (lub do) stanu $n = 2$ atomu wodoru, opisane wzorem Balmera

seria Bracketta (ang. Brackett series) linie w widmie odpowiadające przejściom elektronów ze (lub do) stanu $n = 4$ atomu wodoru

seria Humphreysa (ang. Humphreys series) linie w widmie odpowiadające przejściom elektronów ze (lub do) stanu $n = 6$ atomu wodoru

seria Lymana (ang. Lyman series) linie w widmie odpowiadające przejściom elektronów ze (lub do) stanu podstawowego atomu wodoru

seria Paschena (ang. Paschen series) linie w widmie odpowiadające przejściom elektronów ze (lub do) stanu $n = 3$ atomu wodoru

seria Pfunda (ang. Pfund series) linie w widmie odpowiadające przejściom elektronów ze (lub do) stanu $n = 5$ atomu wodoru

skwantowane wartości energii (ang. quantized energies) dyskretne (nieciągłe) porcje energii

stan kwantowy oscylatora Plancka (ang. quantum state of a Planck’s oscillator) mod drgania oscylatora kwantowego numerowany liczbą kwantową

stan podstawowy atomu wodoru (ang. ground state of the hydrogen atom) energia elektronu na pierwszej orbicie w modelu atomu Bohra

stany wzbudzone atomu wodoru (ang. excited energy states of a hydrogen atom) wszystkie stany poza stanem podstawowym

stała Rydberga dla atomu wodoru (ang. Rydberg constant for hydrogen) stała fizyczna we wzorze Balmera

stała Stefana-Boltzmanna (ang. Stefan-Boltzmann constant) stała fizyczna w prawie Stefana-Boltzmanna

wektor falowy (ang. propagation vector) wektor o długości $2\pi / \lambda$ wskazujący kierunek rozchodzenia się fali (lub, inaczej mówiąc, kierunek pędu fotonu)

widmo absorpcyjne (ang. absorption spectrum) długości fal promieniowania zaabsorbowanego przez atomy i cząsteczki

widmo emisyjne (ang. emission spectrum) długości fal promieniowania emitowanego przez atomy i cząsteczki

widmo energii atomu wodoru (ang. energy spectrum of hydrogen) zbiór dozwolonych dyskretnych wartości energii elektronu w atomie wodoru

wzór Balmera (ang. Balmer formula) opisuje widmo emisyjne atomu wodoru w zakresie fal widzialnych

wzór Rydberga (ang. Rydberg formula) empiryczny wzór opisujący położenie linii w widmie atomu wodoru

zasada nieoznaczoności Heisenberga (ang. Heisenberg's uncertainty principle) podaje granicę dokładności jednoczesnego pomiaru pędu i położenia cząstki

zredukowana stała Plancka (ang. reduced Planck's constant) stała Plancka podzielona przez 2π

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Prawo przesunięć Wiena	$\lambda_{\text{max}} T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\text{m K}$
Prawo Stefana-Boltzmanna	$P(T) = \sigma S T^4$
Stała Plancka	$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{J s} = 4{,}136 \cdot 10^{-15}\,\text{eV s}$
Energia kwantu promieniowania	$\Delta E = h\nu$
Prawo Plancka	$I(\lambda, T) = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(\lambda k_{\text{B}} T)} - 1}$
Maksymalna energia kinetyczna fotoelektronu	$E_{\text{k max}} = e\Delta V_{\text{h}}$
Energia fotonu	$E_{\text{f}} = h\nu$
Bilans energetyczny fotoelektronu	$E_{\text{k max}} = h\nu - W$
Częstotliwość graniczna	$\nu_{\text{g}} = \frac{W}{h}$
Relatywistyczny związek energii i pędu	$E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4$
Związek energii i pędu fotonu	$p_{\text{f}} = \frac{E_{\text{f}}}{c}$
Energia fotonu	$E_{\text{f}} = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$
Wartość pędu fotonu	$p_{\text{f}} = \frac{h}{\lambda}$
Wektor pędu fotonu	$\vec{p}_{\text{f}} = \hbar \vec{k}$
Comptonowska długość fali elektronu	$\lambda_{\text{C}} = \frac{h}{m_0 c} = 0{,}002\,43\,\text{nm}$
Przesunięcie comptonowskie	$\Delta\lambda = \lambda_{\text{C}}(1 - \cos\theta)$
Wzór Balmera	$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)$
Wzór Rydberga	$\frac{1}{\lambda} = R_{\text{H}}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right), n_i = n_f + 1, n_f + 2, \ldots$
Pierwszy warunek kwantyzacji Bohra	$L_n = n\hbar, n = 1, 2, \ldots$
Drugi warunek kwantyzacji	$h\nu = \lvert E_n - E_m \rvert$
Promień Bohra	$a_0 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0{,}529\,\text{Å}$
Promień n-tej orbity Bohra	$r_n = a_0 n^2$
Energia jonizacji	$E_0 = \frac{1}{8\varepsilon_0^2} \cdot \frac{m_e e^4}{h^2} = 13{,}6\,\text{eV}$
Energia elektronu na n-tej orbicie	$E_n = -E_0 \frac{1}{n^2}$
Energia stanu podstawowego atomu wodoru	$E_1 = -E_0 = -13{,}6\,\text{eV}$
Promień n-tej orbity atomu wodoropodobnego	$r_n = \frac{a_0}{Z} n^2$
N-ty poziom energetyczny jonu wodoropodobnego	$E_n = -Z^2 E_0 \frac{1}{n^2}$
Związek energii z długością fali materii	$E = h\nu$
Długość fali de Broglie'a	$\lambda = \frac{h}{p}$
Związek długości fali i częstotliwości dla fal materii	$\lambda\nu = \frac{c}{\beta}$
Zasada nieoznaczoności Heisenberga	$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}\hbar$

PODSUMOWANIE

6.1 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

- Wszystkie ciała wypromieniowują energię. Ilość emitowanej przez ciało energii zależy od jego temperatury. Oparte na doświadczeniu prawo przesunięć Wiena mówi, że im gorętsze ciało, tym mniejsza długość fali odpowiadająca maksimum krzywej promieniowania. Prawo Stefana-Boltzmanna mówi o tym, że całkowita moc wyemitowanego promieniowania jest proporcjonalna do czwartej potęgi temperatury tego ciała (wyrażonej w kelwinach).
- W ramach fizyki klasycznej absorpcja i emisja promieniowania przez ciało doskonale czarne opisywane są poprzez wymianę energii między ściankami a falami elektromagnetycznymi wewnątrz wnęki, będącej modelem takiego ciała. Wymieniana energia nie podlega żadnym ograniczeniom. Podejście klasyczne daje wynik niezgodny z obserwacjami doświadczalnymi.
- Aby wyjaśnić rozkład spektralny promieniowania (krzywą promieniowania) ciała doskonale czarnego, Planck założył, że wymiana energii między ściankami a falami elektromagnetycznymi zachodzić może tylko w dyskretnych kwantach energii. Hipoteza taka doprowadziła do stworzenia prawa Plancka, dobrze opisującego obserwowane krzywe promieniowania oraz wyjaśniającego prawa Wiena i Stefana-Boltzmanna.

6.2 Efekt fotoelektryczny

- Efekt fotoelektryczny zachodzi, gdy fotoelektrony wybijane są z metalowej powierzchni na skutek oświetlenia jej monochromatycznym promieniowaniem. Ma on kilka istotnych cech: (1) jest natychmiastowy, (2) zachodzi tylko, gdy promieniowanie ma częstotliwość wyższą od progowej oraz (3) maksymalna energia kinetyczna fotoelektronów nie zależy od natężenia padającego promieniowania. Efekt fotoelektryczny nie może być wyjaśniony przez teorię klasyczną.
- Efekt fotoelektryczny możemy wyjaśnić, zakładając, że promieniowanie składa się z fotonów (cząstek światła). Każdy foton niesie kwant energii. Energia fotonu zależy od częstotliwości odpowiadającej mu fali elektromagnetycznej. W trakcie oddziaływania cała energia fotonu przekazywana jest jednemu elektronowi.
- Maksymalna energia kinetyczna fotoelektronu równa jest różnicy między energią padającego fotonu a pracą wyjścia z metalu. Praca wyjścia równa jest energii, jaką trzeba przekazać elektronowi, aby opuścił on metal i stał się elektronem swobodnym, i jest ona charakterystyczną cechą danego metalu.

6.3 Efekt Comptona

- Efekt Comptona polega na zmianie długości fali elektromagnetycznej rozproszonej na tarczy w stosunku do długości fali padającej. Efektu tego nie da się wyjaśnić na gruncie fizyki klasycznej.
- Efekt Comptona wyjaśniono, zakładając, że promieniowanie składa się z fotonów zderzających się ze słabo związanymi elektronami w materiale tarczy. Do opisu tego zjawiska korzysta się z zasady zachowania energii i pędu, w ramach szczególnej teorii względności. Zgodność z uzyskanymi w ten sposób wynikami dowodziła realności fotonów.
- Rozpraszanie Comptona jest nieelastyczne, a rozproszona fala ma większą długość niż fala padająca.

6.4 Model atomu wodoru Bohra

- Wyniki doświadczalnych pomiarów widma absorpcyjnego i emisyjnego atomu wodoru opisywane są empirycznym prawem Rydberga, nie da się ich jednak wyjaśnić na gruncie fizyki klasycznej.
- Przeprowadzone przez Rutherforda, Geigera i Marsdena doświadczenia z rozpraszaniem promieniowania alfa na złotej folii ujawniły, że atom zbudowany jest z niewielkiego jądra zawierającego ładunek dodatni i prawie całą masę atomu oraz z elektronów znajdujących się w dużej odległości od jądra.
- Zaproponowany przez Bohra model atomu wodoru jako pierwszy poprawnie opisywał widmo promieniowania. Model oparty jest na trzech postulatach: (1) elektron porusza się po orbitach kołowych; (2) dozwolone są tylko orbity o skwantowanym momencie pędu, a elektron znajdujący się na takiej orbicie nie traci energii przez promieniowanie; (3) elektron może zmienić orbitę, emitując lub pochłaniając foton o energii równej różnicy energii elektronu między orbitami.
- Model Bohra wykorzystał wczesne idee teorii kwantowej i połączył je z klasycznym opisem ruchu elektronów po okręgu, dodając do tego niczym niepoparte założenie o stabilności wybranych orbit. Sukces w opisie linii widmowych spowodował dalszy rozwój teorii kwantowej, prowadząc do jej pełnego sformułowania, w tym do spójnego modelu atomu wodoru oraz do stworzenia pojęcia „fal materii”.

6.5 Fale de Broglie’a

- Hipoteza de Broglie’a postuluje, że każdej cząstce materii towarzyszy pewna fala. Długość tej fali jest odwrotnie proporcjonalna do wartości pędu cząstki. Prędkość przemieszczania się fali jest prędkością cząstki.
- Koncepcja fali elektronu pozwoliła znaleźć uzasadnienie dla postulatu Bohra dotyczącego kwantowania momentu pędu elektronu w atomie wodoru.
- W doświadczeniu Davissona-Germera elektrony rozpraszane są na powierzchni kryształu niklu, wskutek czego obserwuje się wzór dyfrakcyjny, co jest dowodem na istnienie fal materii. Fale materii obserwuje się także w eksperymentach dyfrakcyjnych, przeprowadzanych z wieloma innymi cząstkami.

6.6 Dualizm korpuskularno-falowy

- W naturze występuje dualizm korpuskularno-falowy – w pewnych warunkach zarówno promieniowanie, jak i materia zachowują się jak zbiór cząstek, w innych – jak fala.
- We współczesnych doświadczeniach z dwiema szczelinami zademonstrowano ponad wszelką wątpliwość naturę falową elektronów poprzez obserwację tworzonych przez nie wzorów dyfrakcyjnych.
- Dualizm korpuskularno-falowy jest wyrazem niemożności opisania natury w ramach fizyki klasycznej.
- Mechanika kwantowa postuluje istnienie związanej z każdym obiektem fizycznym funkcji falowej, niosącej informację na temat rozkładu prawdopodobieństwa jego położenia oraz wartości innych jego cech. Funkcja falowa pojedynczej cząstki reprezentowana jest przez **paczkę falową**. Immanentną cechą mechaniki kwantowej są ograniczone możliwości dokonywania jednoczesnych pomiarów różnych wielkości, co wyraża zasada Heisenberga.
- Dualizm korpuskularno-falowy leży u podstaw działania wielu urządzeń, między innymi kamer cyfrowych (poprzez matryce CCD) i mikroskopu elektronowego.

PYTANIA

6.1 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

1. Która gwiazda ma gorętszą powierzchnię – ta świecąca na żółto czy na czerwono?

2. Opisz, co zaobserwujesz, gdy będziesz podgrzewał ciało od temperatury $1000\,\mathrm{K}$ do $1\,000\,000\,\mathrm{K}$.

3. Wyjaśnij zmiany koloru światła emitowanego przez ciało podczas jego podgrzewania.

4. Jak myślisz, czemu promieniowanie UV powoduje oparzenia słoneczne, a światło widzialne nie?

5. Ściany dwóch wnęk (takich jak na Rysunku 6.2) zbudowane są z różnych metali. Jak będzie różniło się ich promieniowanie w tej samej temperaturze?

6. Wytłumacz, czemu niektóre ciała wydają się czarne, inne czerwone, a jeszcze inne białe.

7. Jeśli wszystkie ciała emitują promieniowanie elektromagnetyczne, czemu w pokojowej temperaturze nie widzimy przedmiotów w ciemnym pokoju?

8. Jak zmieni się moc emitowana przez ciało doskonale czarne, jeśli jego temperatura (w kelwinach) wzrośnie trzykrotnie?

6.2 Efekt fotoelektryczny

9. Czy przy tym samym źródle promieniowania monochromatycznego efekt fotoelektryczny zachodził będzie we wszystkich rodzajach metali?

10. Jakie cechy efektu fotoelektrycznego wskazują na to, że elektron absorbuje tylko jeden foton?

11. Wyjaśnij, w jaki sposób można wyznaczyć pracę wyjścia na podstawie wykresu wartości napięcia hamowania w funkcji częstotliwości padającego promieniowania w efekcie fotoelektrycznym. Czy z tego wykresu można także wyznaczyć wartość stałej Plancka?

12. Jaka informację można uzyskać na podstawie wykresu natężenia fotoprądu w funkcji przyłożonej różnicy potencjałów? Czy możemy z niego wyznaczyć stałą Plancka? Czy możemy wyznaczyć pracę wyjścia z metalu?

13. Których własności efektu fotoelektrycznego nie da się wyjaśnić w ramach fizyki klasycznej?

14. Czy własności efektu fotoelektrycznego są konsekwencją falowej, czy raczej korpuskularnej (cząstkowej) natury promieniowania?

15. Praca wyjścia sodu, żelaza i molibdenu wynosi odpowiednio: $2{,}5\,\mathrm{eV}$, $3{,}9\,\mathrm{eV}$ i $4{,}2\,\mathrm{eV}$. Który z tych metali po oświetleniu światłem będzie emitował foto-

elektrony o długości fali 400 nm?

6.3 Efekt Comptona

16. Przedyskutuj podobieństwa i różnice między efektem fotoelektrycznym a efektem Comptona.

17. Czy większa jest energia fotonu z zakresu ultrafioletowego czy podczerwonego?

18. Czy zmiana natężenia monochromatycznej wiązki światła ma wpływ na pęd pojedynczych fotonów? Czy zmiana ta wpływa na wartość pędu niesionego przez wiązkę?

19. Czy da się zaobserwować efekt Comptona dla światła widzialnego?

20. Czy możliwe jest zaobserwowanie w efekcie Comptona rozproszonych fal o długości mniejszej niż długość fali padającej?

21. Wykaż, że comptonowska długość fali ma odpowiedni wymiar.

22. Pod jakim kątem przesunięcie Comptona równe jest comptonowskiej długości fali?

6.4 Model atomu wodoru Bohra

23. Wyjaśnij, dlaczego jasne linie w widmie emisyjnym mają takie samo położenie jak ciemne linie w widmie absorpcyjnym danego pierwiastka.

24. Jak myślisz, dlaczego serię Balmera odkryto przed seriami Lymana i Paschena?

25. Podczas badania spektrum absorpcyjnego wodoru w temperaturze pokojowej obserwuje się linie z serii Lymana, ale nie obserwuje się linii z serii Balmera. Co możemy na tej podstawie powiedzieć o stanie energetycznym atomów wodoru w temperaturze pokojowej?

26. Przedyskutuj podobieństwa i różnice między modelami atomu wodoru Thomsona i Bohra.

27. Jaki eksperyment świadczy o tym, że model Thomsona nie opisuje poprawnie atomu wodoru?

28. Czy jeśli w atomie wodoru elektron przejdzie na orbitę o większym promieniu, to jego energia się zwiększy czy zmniejszy?

29. W jaki sposób energia jest zachowana, gdy atom przechodzi ze stanu o wyższej energii do stanu o niższej energii?

30. Załóżmy, że elektron w atomie wodoru przechodzi z orbity $(n + 1)$ na orbitę n. Czy długość fali fotonu będzie większa dla większych, czy mniejszych wartości n?

31. Czy atom wodoru może zaabsorbować foton o energii większej niż 13,6 eV?

32. Dlaczego szkło jest przezroczyste, a na przykład drewno nie?

33. Czy oddziaływanie grawitacyjne ma istotny wpływ na poziomy energetyczne w atomie?

34. Wykaż, że stała Plancka ma wymiar momentu pędu.

6.5 Fale de Broglie’a

35. Jaki rodzaj promieniowania nadaje się najlepiej do obserwacji dyfrakcji na kryształach: fale radiowe, światło widzialne czy promieniowanie rentgenowskie? Uzasadnij odpowiedź.

36. Czy do obserwowania dyfrakcji na krysztale zamiast promieniowania rentgenowskiego można byłoby użyć światła widzialnego?

37. Elektron i proton poruszają się z tą samą prędkością. Fala de Broglie’a stowarzyszona z którą z tych cząstek ma mniejszą długość?

38. Jak zmienia się długość fali de Broglie’a wraz ze wzrostem prędkości cząstki?

39. Dlaczego nie obserwuje się na co dzień zjawisk związanych z falową naturą materii?

40. Dlaczego układ doświadczalny w eksperymencie Davissona-Germera musi być umieszczony wewnątrz komory próżniowej?

6.6 Dualizm korpuskularno-falowy

41. Podaj przykłady zjawisk, w których światło wykazuje własności falowe, i takich, w których zachowuje się jak strumień fotonów.

42. Przedyskutuj, w jaki sposób interferencja fal na wodzie różni się od interferencji elektronów, a w czym są one podobne.

43. Jakie argumenty świadczą o falowej naturze materii?

44. Jakie argumenty świadczą o korpuskularnej naturze promieniowania?

45. Wyjaśnij znaczenie eksperymentu Younga z dwiema szczelinami.

46. Czy zasada Heisenberga dopuszcza sytuację, w któ-

rej cząstka spoczywałaby w określonym miejscu w przestrzeni?

47. Czy można zmierzyć dokładnie długość fali de Broglie'a?

48. Wyjaśnij główne różnice w działaniu mikroskopów elektronowych SEM i TEM.

ZADANIA

6.1 Promieniowanie ciała doskonale czarnego

49. Dwustuwatowy grzejnik emituje promieniowanie o długości fali $1{,}5\,\mu\mathrm{m}$.
a. Jaka jest wartość kwantu energii tego promieniowania?
b. Zakładając, że ciepło właściwe ciała o masie $4\,\mathrm{kg}$ wynosi $3{,}5\,\mathrm{kJ}\,/\,(\mathrm{kg}\,\mathrm{K})$, jak dużo tych fotonów musi być przez to ciało zaabsorbowane, aby jego temperatura wzrosła o $2\,\mathrm{K}$?
c. Jak długo będzie trwał proces podgrzewania w podpunkcie (b), zakładając, że całe promieniowanie emitowane przez grzejnik jest absorbowane przez to ciało?

50. Generator fal mikrofalowych w kuchence o mocy $900\,\mathrm{W}$ emituje fale o częstotliwości $2560\,\mathrm{MHz}$.
a. Ile kwantów energii emituje on w ciągu sekundy?
b. Ile tych kwantów musi zostać zaabsorbowanych przez podgrzewane danie, aby jego temperatura wzrosła o $45\,\mathrm{K}$? Załóż, że danie to ma masę $0{,}5\,\mathrm{kg}$, a jego ciepło właściwe wynosi $3{,}8\,\mathrm{kJ}\,/\,(\mathrm{kg}\,\mathrm{K})$;
c. Zakładając, że wszystkie wyemitowane kwanty absorbowane są przez to danie, oblicz, jak długo trzeba czekać, aby było gotowe.

51. Odpowiedz na poniższe pytania.
a. W jakiej temperaturze maksimum promieniowania ciała doskonale czarnego przypada na fale o długości $400\,\mathrm{nm}$?
b. Fale o jakiej długości niosą promieniowanie o największej energii, gdy ciało doskonale czarne ma temperaturę $800\,\mathrm{K}$?

52. Wolframowe włókno żarówki osiąga temperaturę ok. $3200\,\mathrm{K}$. Z jaką częstością emituje ono maksimum energii?

53. Przestrzeń międzygwiezdna wypełniona jest promieniowaniem o długości fali $970\,\mu\mathrm{m}$. Jest ono uważane za pozostałość Wielkiego Wybuchu. Jaka jest temperatura promieniowania ciała doskonale czarnego o tej długości fali?

54. Energia promieniowania wysyłanego przez Słońce osiąga maksimum dla fal o długości $500\,\mathrm{nm}$. Jaka jest w przybliżeniu temperatura powierzchni Słońca?

6.2 Efekt fotoelektryczny

55. Jaka jest częstotliwość i długość fali promieniowania, jeśli fotony tego promieniowania mają energię $20\,\mathrm{keV}$?

56. Długość fali światła widzialnego wynosi między $400\,\mathrm{nm}$ a $750\,\mathrm{nm}$. W jakim zakresie mieści się energia fotonów takiego światła?

57. Jaka jest maksymalna długość fali promieniowania, które może wybić fotoelektron ze srebra? Czy mieści się ona w zakresie widzialnym?

58. Jaka jest maksymalna długość fali promieniowania, które może wybić fotoelektron z potasu? Praca wyjścia z potasu wynosi $2{,}24\,\mathrm{eV}$. Czy jest to promieniowanie widzialne?

59. Oszacuj pracę wyjścia elektronów w magnezie, wiedząc, że krytyczna długość fali wynosi $337\,\mathrm{nm}$.

60. Praca wyjścia dla potasu wynosi $2{,}26\,\mathrm{eV}$. Jaka jest częstotliwość progowa, gdy fotoelektroda zbudowana jest z tego metalu? Jakie jest napięcie hamowania, gdy padające promieniowanie ma częstotliwość $1200\,\mathrm{THz}$?

61. Oszacuj pracę wyjścia dla aluminium, wiedząc, że fala o długości $304\,\mathrm{nm}$ jest najdłuższą falą, która wybić może fotoelektron z fotoelektrody aluminiowej.

62. Jaka jest maksymalna energia kinetyczna fotoelektronów wybitych z sodu przez padającą falę o długości $450\,\mathrm{nm}$?

63. Promieniowanie ultrafioletowe (UV) o długości fali $120\,\mathrm{nm}$ pada na elektrodę pokrytą złotem. Jaka jest maksymalna energia kinetyczna fotoelektronów?

64. Fioletowe światło o długości fali $400\,\mathrm{nm}$ wybija z elektrody sodowej fotoelektrony o maksymalnej energii kinetycznej $0{,}86\,\mathrm{eV}$. Jaka jest praca wyjścia dla sodu?

65. Światło o długości fali $600\,\mathrm{nm}$ pada na fotoelektrodę i wybija z niej elektrony o maksymalnej energii $0{,}17\,\mathrm{eV}$. Wyznacz
a. pracę wyjścia;
b. częstotliwość progową.
c. Jakie będzie napięcie hamowania, gdy tę fotoelektrodę oświetlimy światłem o długości $400\,\mathrm{nm}$?

66. Progowa długość fali, powodująca emisję fotoelektronów z pewnej powierzchni, wynosi $500\,\mathrm{nm}$. Znajdź maksymalną energię kinetyczną fotoelektronów, gdy na powierzchnię tę pada światło o długości fali równej $600\,\mathrm{nm}$.

67. Wyznacz długość fali promieniowania zdolnego

wybić elektrony o energii $2\,\text{eV}$ z elektrody wapniowej. Praca wyjścia z wapnia wynosi $2{,}71\,\text{eV}$. Z jakiego zakresu jest to promieniowanie?

68. Wyznacz długość fali promieniowania zdolnego wybić elektrony o energii $0{,}1\,\text{eV}$ z elektrody potasowej. Praca wyjścia dla potasu wynosi $2{,}24\,\text{eV}$. Z jakiego zakresu jest to promieniowanie?

69. Wyznacz maksymalną prędkość fotoelektronów wybitych przez promieniowanie o długości fali $80\,\text{nm}$, jeśli praca wyjścia z metalu, z którego wykonana jest fotoeletroda, wynosi $4{,}73\,\text{eV}$.

6.3 Efekt Comptona

70. Ile wynosi pęd fotonu promieniowania o długości fali $589\,\text{nm}$?

71. Ile wynosi pęd fotonu promieniowania mikrofalowego o długości fali $4\,\text{cm}$?

72. Ile wynosi pęd fotonów z wiązki białego światła (składającego się z fal o długości od $400\,\text{nm}$ do $750\,\text{nm}$)?

73. Jaka jest energia fotonu o pędzie $3 \cdot 10^{-24}\,\text{kg m / s}$?

74. Ile wynosi długość fali
a. fotonu promieniowania rentgenowskiego o energii $12\,\text{keV}$;
b. fotonu promieniowania gamma o energii $2\,\text{MeV}$?

75. Wyznacz pęd i energię fotonu o długości fali $1\,\text{Å}$.

76. Wyznacz długość fali i energię fotonu o pędzie $5 \cdot 10^{-29}\,\text{kg m / s}$.

77. Foton promieniowania γ ma pęd $8 \cdot 10^{-21}\,\text{kg m / s}$. Ile wynoszą długość jego fali i energia?

78. a. Oblicz pęd fotonu promieniowania o długości fali $2{,}5\,\mu\text{m}$;
b. Jaka jest prędkość elektronu o takim samym pędzie?
c. Jaka jest energia kinetyczna takiego elektronu? Porównaj ją z energią opisanego fotonu.

79. Wykaż, że opisujące foton równania $p = h / \lambda$ oraz $E_\text{f} = h\nu$ zgodne są z relatywistycznym równaniem $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^2$.

80. Wykaż, że energia fotonu E wyrażona w eV dana jest wzorem: $E = 1{,}241 \cdot 10^{-6}\,\text{eV m} / \lambda$, gdzie λ jest długością jego fali, wyrażoną w metrach.

81. Porównaj przesunięcie Comptona dla fotonów rozproszonych pod kątem $30°$ oraz rozproszonych pod kątem $45°$.

82. Promieniowanie rentgenowskie o długości fali $12{,}5\,\text{pm}$ rozpraszane jest na tarczy węglowej. Jakie są długości fali fotonów rozproszonych pod kątem
a. $30°$;
b. $90°$;
c. $180°$?

6.4 Model atomu wodoru Bohra

83. Oblicz długość fali pierwszej linii w serii Lymana i sprawdź, czy linia ta znajduje się w zakresie ultrafioletowym.

84. Oblicz długość fali piątej linii w serii Lymana i sprawdź, czy linia ta znajduje się w zakresie ultrafioletowym.

85. Wyznacz zmiany energii w następujących przejściach w atomie wodoru:
a. z $n = 3$ na $n = 4$;
b. z $n = 2$ na $n = 1$;
c. z $n = 3$ na $n \longrightarrow \infty$.

86. Wyznacz długość fali trzeciej linii Balmera (przejście z $n = 5$ na $n = 2$).

87. Jaka jest częstotliwość zaabsorbowanego fotonu, który powoduje przejście atomu wodoru ze stanu podstawowego do stanu o $n = 4$?

88. Jaka jest największa i najmniejsza długość fali fotonów, którą atom w stanie podstawowym może zaabsorbować bez jonizacji?

89. Ile wynosi najmniejsza długość fali, którą może wyemitować atom wodoru znajdujący się w trzecim stanie wzbudzonym?

90. Ile wynosi największa długość fali, która może zjonizować atom wodoru w stanie podstawowym?

91. Elektron znajduje się w stanie $n = 2$ atomu wodoru. Wyznacz
a. jego moment pędu;
b. energię kinetyczną;
c. energię potencjalną;
d. energię całkowitą.

92. Wyznacz energię jonizacji atomu wodoru znajdującego się w trzecim stanie wzbudzonym.

93. W którym stanie znajdował się atom wodoru, jeśli do jego jonizacji trzeba było dostarczyć energię o wartości $0{,}85\,\text{eV}$?

94. Ile wynosi promień atomu wodoru będącego w pierwszym stanie wzbudzonym?

95. Wyznacz najmniejszą długość fali w linii Balmera. Do jakiej części widma należy ta linia?

96. Wykaż, że cała seria Paschena leży w podczerwonej części widma.

97. Czy serie Balmera i Lymana zachodzą na siebie? (Wskazówka: Wyznacz najmniejszą długość fali z serii Balmera i najdłuższą z serii Lymana).

98. Fala o długości $4{,}653\,\mu\mathrm{m}$ odpowiada przejściu ze stanu $n_f = 5$ do stanu n_i. Wyznacz n_i.

6.5 Fale de Broglie'a

99. Jaka jest prędkość elektronu, którego długość fali de Broglie'a wynosi $1\,\mathrm{m}$?

100. Jaka jest długość fali de Broglie'a elektronu poruszającego się z prędkością $5 \cdot 10^6\,\mathrm{m\,/\,s}$?

101. Jaka jest długość fali de Broglie'a elektronu rozpędzonego przez różnicę potencjałów $10\,\mathrm{keV}$?

102. Ile wynosi długość fali de Broglie'a protonu o energii kinetycznej
a. $2\,\mathrm{MeV}$;
b. $10\,\mathrm{MeV}$?

103. Jaka jest długość fali de Broglie'a piłkarza o masie $70\,\mathrm{kg}$ biegnącego z prędkością $8\,\mathrm{m\,/\,s}$?

104. a. Ile wynosi energia elektronu, którego fala de Broglie'a ma taką samą długość jak żółte światło ($590\,\mathrm{nm}$)?
b. Ile wynosi długość fali elektronu, którego energia jest równa energii niesionej przez kwant żółtego światła?

105. Fala de Broglie'a neutronu ma długość $0{,}01\,\mathrm{nm}$. Jaka jest jego prędkość?

106. Jaka jest długość fali elektronu poruszającego się z prędkością wynoszącą $3\,\%$ prędkości światła?

107. Przy jakiej prędkości długość fali protonu wynosi $6\,\mathrm{fm}$? Odpowiedź podaj w jednostkach c.

108. Z jaką prędkością musiałaby się poruszać kula bilardowa o masie $0{,}4\,\mathrm{kg}$, aby długość jej fali wynosiła $7{,}5\,\mathrm{fm}$?

109. Wyznacz długość fali protonu, którego prędkość wynosi $1\,\%$ prędkości światła (gdy $\beta = 0{,}01$).

6.6 Dualizm korpuskularno-falowy

110. Nadajnik radiowy wysyła promieniowanie o mocy $500\,\mathrm{kW}$ i częstotliwości $760\,\mathrm{kHz}$. Ile wysyła fotonów na sekundę?

111. Wyznacz czynnik Lorentza γ i długość fali de Broglie'a znajdującego się w akceleratorze elektronu o energii $50\,\mathrm{GeV}$.

112. Wyznacz czynnik Lorentza γ i długość fali de Broglie'a znajdującego się w akceleratorze protonu o energii $1\,\mathrm{TeV}$.

113. Ile wynosi energia kinetyczna elektronu o długości fali $0{,}01\,\mathrm{nm}$ w mikroskopie TEM?

114. Jeśli efekty dyfrakcyjne przy rozpraszaniu elektronów na krysztale mają być istotne, długość fali elektronu powinna być w przybliżeniu równa odległości d między atomami sieci. Przyjmując $d = 0{,}25\,\mathrm{nm}$, oszacuj różnicę potencjałów potrzebną do rozpędzenia elektronów do prędkości, przy których możemy obserwować dyfrakcję.

115. Promieniowanie słoneczne padające na atmosferę ziemską ma średnie natężenie $1{,}3\,\mathrm{kW} \big/ \mathrm{m}^2$. Załóżmy, że chcesz zbudować żagiel wykorzystujący to promieniowanie („wiatr słoneczny”) do rozpędzenia małego zabawkowego statku kosmicznego o masie $0{,}1\,\mathrm{kg}$, w przestrzeni pomiędzy Międzynarodową Stacją Kosmiczną a Księżycem. Żagiel zrobiony jest z materiału o pomijalnie małej masie i idealnie odbijającego promieniowanie słoneczne. Aby stwierdzić, czy takie zadanie jest wykonalne, odpowiedz na następujące pytania (zakładając, że promieniowanie pada tylko prostopadle do powierzchni żagla):
a. Jakie jest ciśnienie promieniowania padającego na żagiel?
b. Znając ciśnienie obliczone w punkcie (a), oblicz, jakie będzie przyspieszenie statku kosmicznego z żaglem o powierzchni $10\,\mathrm{m}^2$;
c. Jak szybko będzie się poruszał pojazd po $24\,\mathrm{h}$ od startu?

116. Traktując ludzkie ciało jak ciało doskonale czarne, wyznacz procentowy wzrost całkowitej mocy promieniowania, gdy jego temperatura wzrośnie z $36{,}6\,^{\circ}\mathrm{C}$ do $39\,^{\circ}\mathrm{C}$.

117. Pokaż, że prawo Wiena wynika z prawa Plancka. Wskazówka: Podstaw $x = hc\,/\,(\lambda k_{\mathrm{B}} T)$ i zapisz prawo Plancka w postaci: $I\,(x, T) = Ax^5 \big/ (e^x - 1)$, gdzie $A = 2\pi (k_{\mathrm{B}} T)^5 \big/ \left(h^4 c^3\right)$. Następnie dla ustalonego T wyznacz położenie maksimum $I\,(x, T)$ rozwiązując równanie $\mathrm{d}I\,(x, T)\,/\,\mathrm{d}x = 0$.

118. Udowodnij, że prawo Stefana wynika z prawa Plancka. Wskazówka: Aby wyznaczyć całkowitą moc promieniowania ciała doskonale czarnego, wyemitowanego we wszystkich długościach fal w danej temperaturze, scałkuj prawo Plancka po całym spektrum fal

$P(T) = \int_0^{\infty} I(\lambda, T)\, \mathrm{d}\lambda$. Dokonaj podstawienia $x = hc / (\lambda k_{\mathrm{B}} T)$ i skorzystaj z faktu, iż $\int_0^{\infty} x^3 / (e^x - 1)\, \mathrm{d}x = \pi^4 / 15$.

ZADANIA DODATKOWE

119. Wyznacz natężenie promieniowania na jednostkę długości fali, emitowanego przy długości fali $500\ \mathrm{nm}$ przez ciało doskonale czarne o temperaturze $10\,000\ \mathrm{K}$.

120. Cząsteczka HCl oscyluje z częstotliwością $87\ \mathrm{THz}$. Ile wynosi różnica (w eV) pomiędzy jej sąsiednimi poziomami energetycznymi?

121. Kwantowy oscylator harmoniczny drga z częstotliwością $250\ \mathrm{THz}$. Jaka jest minimalna energia promieniowania, którą może wyemitować?

122. Za około 5 miliardów lat Słońce stanie się czerwonym gigantem. Załóżmy, że temperatura jego powierzchni spadnie do około połowy dzisiejszej wartości, która wynosi $6000\ \mathrm{K}$, a jego promień z dzisiejszych $7 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$ zwiększy się do $1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$ (tyle wynosi odległość Ziemi od Słońca). Wyznacz stosunek całkowitej mocy promieniowania Słońca w fazie czerwonego giganta do całkowitej mocy promieniowania Słońca dziś.

123. Lampa sodowa emituje promieniowanie o mocy $2\ \mathrm{W}$, w większości o długości fali $589\ \mathrm{nm}$. Oszacuj liczbę fotonów wyemitowanych przez lampę w ciągu $1\ \mathrm{s}$.

124. Fotoelektrony wybijane są z fotoelektrody i rejestrowane w detektorze umieszczonym w odległości $2{,}5\ \mathrm{cm}$ od niej. Praca wyjścia z tej elektrody wynosi $2{,}71\ \mathrm{eV}$, a długość fali padającego promieniowania wynosi $420\ \mathrm{nm}$. Ile czasu potrzebuje fotoelektron na dotarcie do detektora?

125. Praca wyjścia z metalu wynosi $3{,}2\ \mathrm{eV}$. Ile wynosi maksymalna długość fali fotonu, który jest w stanie wybić fotoelektron z wykonanej z tego metalu fotoelektrody?

126. Ile wynosi maksymalna prędkość fotoelektronu, wyemitowanego z pewnej powierzchni pod wpływem padającego na nią światła o długości $450\ \mathrm{nm}$, jeśli praca wyjścia wynosi $2\ \mathrm{eV}$?

127. Wiązka światła laserowego o długości fali $400\ \mathrm{nm}$ pada na elektrodę wapniową. Moc lasera wynosi $2\ \mathrm{mW}$, a praca wyjścia z wapnia to $2{,}31\ \mathrm{eV}$.
a. Ile fotonów na sekundę wybija ta wiązka?
b. Jaka jest moc niesiona przez fotoelektrony?

128. a. Oblicz liczbę fotoelektronów na sekundę wybijanych z próbki sodu o powierzchni $1\ \mathrm{mm}^2$ przez promieniowanie o długości fali $500\ \mathrm{nm}$ o natężeniu $1{,}3\ \mathrm{kW} / \mathrm{m}^2$ (tyle wynosi natężenie światła słonecznego powyżej ziemskiej atmosfery);
b. Wiedząc, że praca wyjścia z tego metalu wynosi $2{,}28\ \mathrm{eV}$, określ, jaka jest moc niesiona przez fotoelektrony.

129. Praca wyjścia dla fotoelektrody wykonanej z baru wynosi $2{,}48\ \mathrm{eV}$. Wyznacz maksymalną energię kinetyczną wybitych fotoelektronów, gdy na powierzchnię pada
a. promieniowanie wyemitowane przez $100\ \mathrm{kW}$ radiostację, nadającą na częstotliwości $800\ \mathrm{kHz}$;
b. światło laserowe o długości fali $633\ \mathrm{nm}$, wyemitowane przez laser He-Ne;
c. światło o długości fali $434\ \mathrm{nm}$, wyemitowane przez lampę ze zjonizowanym wodorem (tak zwaną lampę wyładowczą).

130. a. Wyznacz długość fali fotonu, który porusza się z takim samym pędem co proton o prędkości równej $0{,}01c$;
b. Ile wynosi energia tego fotonu w MeV?
c. Ile wynosi energia tego protonu w MeV?

131. a. Wyznacz wartość pędu fotonu rentgenowskiego o energii $100\ \mathrm{keV}$;
b. Wyznacz prędkość neutronu o tym samym pędzie;
c. Jaka jest energia tego neutronu w eV?

132. Pęd światła podczas odbicia od lustra ulega dokładnemu odwróceniu pod warunkiem, że założymy, iż lustro nie ulega odrzutowi – tak jak w przypadku cząstek odbijających się od nieruchomej ściany. Załóżmy, że strumień światła o natężeniu $1\ \mathrm{kW} / \mathrm{m}^2$ pada na lustro o powierzchni $2\ \mathrm{m}^2$.
a. Wyznacz energię przekazaną do lustra w ciągu 1 s;
b. Jak jest pęd przekazany lustru?
c. Skorzystaj z drugiego prawa Newtona, aby wyznaczyć siłę działającą na lustro;
d. Czy założenie o braku odrzutu wydaje się uzasadnione?

133. Foton o energii $5\ \mathrm{keV}$ zderza się ze spoczywającym eletronem i rozprasza się pod kątem $60°$. Ile wynosi zmiana energii elektronu?

134. Foton o długości fali $0{,}75\ \mathrm{nm}$ zderza się ze spoczywającym elektronem. Prędkość elektronu po odbiciu wynosi $1{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{m} / \mathrm{s}$.
a. Wyznacz zmianę długości fotonu;
b. Wyznacz kąt rozproszenia fotonu.

135. Wyznacz maksymalną zmianę długości fali pro-

mieniowania rentgenowskiego w rozpraszaniu Comptona. Czy ta zmiana zależy od długości fali padającego promieniowania?

136. Foton o długości fali $700\,\mathrm{nm}$ pada na atom wodoru. Absorpcja tego fotonu powoduje jonizację atomu. Jaka mogła być najniższa orbita zajmowana przez elektron przed jonizacją?

137. Jaka jest maksymalna energia kinetyczna elektronu, przy której zderzenie tego elektronu ze spoczywającym atomem wodoru w stanie podstawowym na pewno będzie elastyczne?

138. Pojedynczo zjonizowany atom helu He^{1+} jest jonem wodoropodobnym.
a. Ile wynosi promień orbity w stanie podstawowym?
b. Oblicz energię jego czterech najniższych stanów energetycznych;
c. Powtórz te obliczenia w przypadku jonu Li^{2+}.

139. Potrójnie zjonizowany atom berylu Be^{3+} jest jonem wodoropodobnym. Gdy Be^{3+} jest w jednym ze stanów wzbudzonych, promień jego orbity jest taki sam jak promień pierwszej orbity w atomie wodoru. Wyznacz stopień wzbudzenia tego stanu i jego energię jonizacji.

140. W środowisku o ekstremalnie wysokiej temperaturze, takim jak korona słoneczna, atomy podlegają jonizacji na skutek zderzeń z innymi atomami. Jednym z przykładów występowania takiej jonizacji jest obecność w koronie słonecznej jonu C^{5+}, którego obecność wykryta została w widmie Fraunhofera.
a. O jaki czynnik zmieniają się energie stanów C^{5+} w stosunku do spektrum atomu wodoru?
b. Jaka jest długość pierwszej linii w serii Paschena dla C^{5+}?
c. W jakiej części widma znajdują się linie tej serii?

141. a. Wyznacz energię jonizacji dla He^{+};
b. Jaka jest najniższa częstotliwość fotonu, który może spowodować jonizację He^{+}?

142. Współcześnie przeprowadza się eksperymenty z ultrazimnymi neutronami, o bardzo małych prędkościach, nawet rzędu $1\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$. Znajdź długość fali takiego neutronu i jego energię kinetyczną.

143. Wyznacz prędkość i energię kinetyczną neutronu, którego długość fali wynosi $6\,\mathrm{fm}$ (energia spoczynkowa neutronu wynosi $E_0 = 940\,\mathrm{MeV}$).

144. Odległość między sąsiednimi płaszczyznami kryształu NaCl wynosi $0{,}281\,\mathrm{nm}$ i wyznaczona została przez dyfrakcję promieni rentgenowskich o długości fali $0{,}17\,\mathrm{nm}$. Ile wynosi energia neutronu w wiązce neutronowej tworzącej wzór dyfrakcyjny z maksimami w tych samych miejscach?

145. Ile wynosi długość fali elektronu przyspieszonego (ze stanu spoczynku) za pomocą różnicy potencjałów $30\,\mathrm{kV}$?

146. Wyznacz prędkość elektronu o długości fali $1\,\mathrm{\mu m}$ oraz różnicę potencjału, której użyto do rozpędzenia go do takiej prędkości ze stanu spoczynku.

147. W akceleratorze rozpędzono protony do prędkości $0{,}25c$. Jaka jest ich długość fali przy tej prędkości? Ile wynosi ich energia kinetyczna? Jaką trzeba by przyłożyć różnicę potencjałów, gdyby chciano rozpędzić protony do tej prędkości podczas jednego przejścia (energia spoczynkowa protonu wynosi $E_0 = 938\,\mathrm{MeV}$)?

148. Wyznacz długość fali de Broglie’a elektronu przyspieszonego ze stanu spoczynku przez różnicę potencjałów $100\,\mathrm{keV}$ (energia spoczynkowa elektronu wynosi $E_0 = 511\,\mathrm{keV}$).

149. Graniczna długość fali dla efektu fotoelektrycznego na pewnej powierzchni wynosi $500\,\mathrm{nm}$. Wyznacz maksymalną energię kinetyczną wybitych elektronów, gdy na powierzchnię tę skierujemy wiązkę światła o długości fali $450\,\mathrm{nm}$.

150. Porównaj zmianę długości fali fotonu rozproszonego na swobodnym elektronie ze zmianą długości fali podczas rozpraszania na protonie.

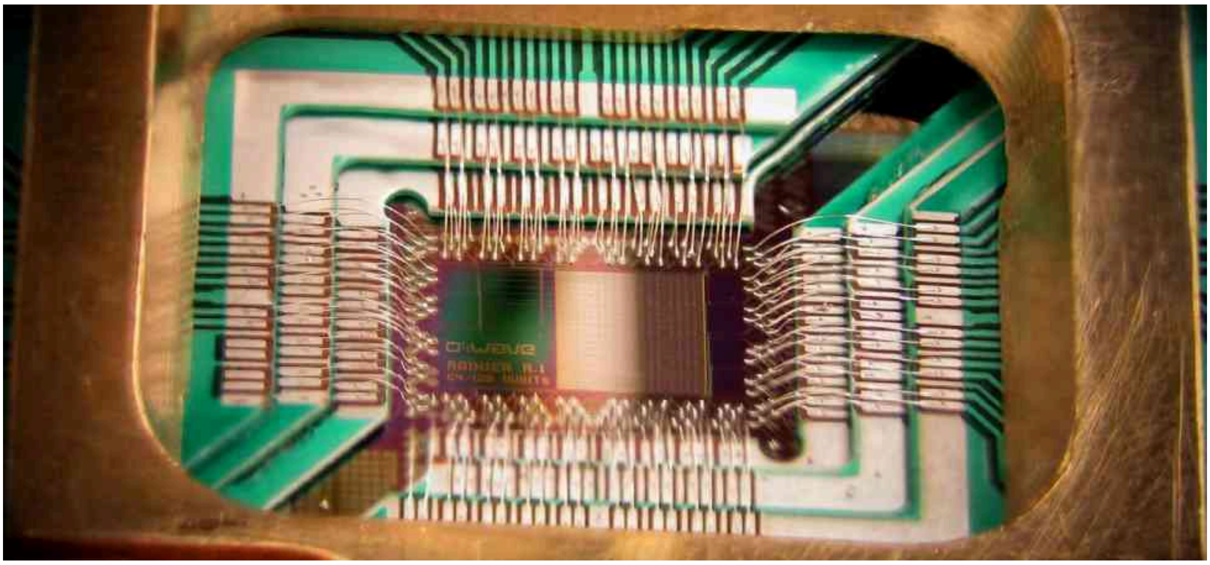
151. Spektrometr użyty do pomiaru długości fal rentgenowskich, rozproszonych w zjawisku Comptona, ma dokładność pomiaru $5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{nm}$. Jaki jest najmniejszy kąt rozproszenia, dla którego wciąż możemy rozróżnić fale rentgenowskie rozproszone na elektronie od tych rozproszonych na atomach?

152. Rozważ jon wodoropodobny, w którym elektron krąży wokół jądra o ładunku $q = +Ze$. Wyprowadź wzór na energię E_n elektronu na n-tej orbicie i promień tej orbity.

153. Załóż, że atom wodoru jest w $n = 2$ stanie wzbudzonym przez $10^{-8}\,\mathrm{s}$, zanim spadnie do stanu podstawowego. Ile razy elektron okrąży w tym czasie jądro? Ile czasu zajęłoby Ziemi okrążenie Słońca tyle samo razy?

154. Atom mionowy powstaje, gdy mion zostaje wychwycony przez proton. Mion ma taki sam ładunek jak elektron, ale jest od niego 207 razy cięższy. Wyznacz częstotliwość fotonu emitowanego przy przejściach ze stanu $n = 2$ do $n = 1$. Załóż, że mion krąży wokół spoczywającego protonu.

7 | MECHANIKA KWANTOWA



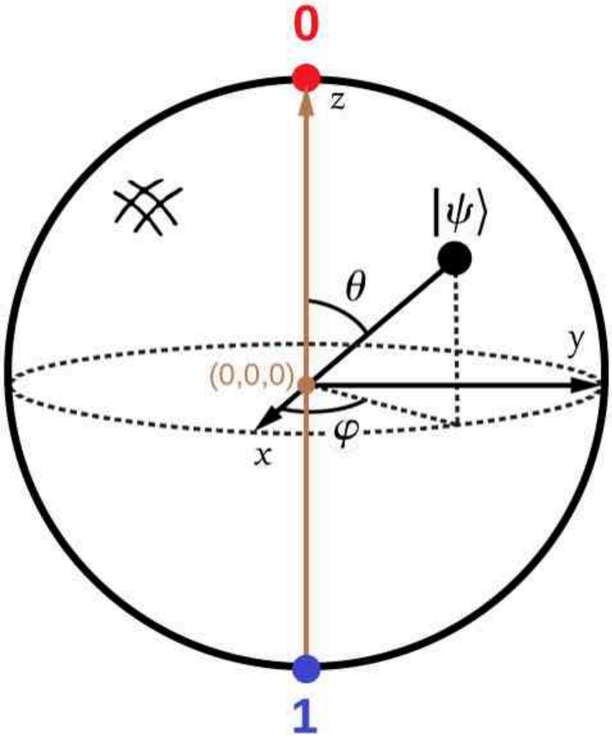
Rysunek 7.1 Procesor kubitowy opracowany przez firmę D-Wave – mózg komputera kwantowego, który wykorzystuje bity kwantowe do wykonywania złożonych obliczeń. Jest on oparty na nadprzewodzących złączach Josephsona. Złącze Josephsona to układ nadprzewodnik–izolator–nadprzewodnik, cechujący się nieliniową charakterystyką prądowo-napięciową. Źródło: D-Wave Systems Inc.

Treść rozdziału

Wstęp

Mechanika kwantowa jest potężnym narzędziem pomagającym w zrozumieniu ruchu i oddziaływań obiektów o niewielkich rozmiarach, takich jak atomy czy cząsteczki. Powstała w 1925 roku i do tej pory trwają dyskusje, czy jest ona teorią fundamentalną. Mechanika kwantowa wyjaśnia otrzymywane wyniki eksperymentalne. Jej podstawy często na pierwszy rzut oka wydają się dziwne i nieintuicyjne, bo przeczą faktom wynikającym z mechaniki klasycznej, z jaką mamy do czynienia w otaczającym nas świecie. Codzienne doświadczenia i związane z nimi prawa fizyki nie są w stanie wprowadzić nas w zagadnienia mechaniki kwantowej (według której na przykład moglibyśmy siedzieć jednocześnie na dwóch bardzo odległych krzesłach). Założeniem tego rozdziału jest wprowadzenie czytelnika do tego niezwykle interesującego świata. Na Rysunku 7.1 pokazano procesor komputera kwantowego. To urządzenie jest mózgiem nadprzewodzącego komputera kwantowego, który pracuje w temperaturach bliskich zera bezwzględnego ($T = 0\,\text{K} = -273{,}15\,°\text{C}$), a więc poniżej temperatury ciekłego helu ($T = 4{,}2\,\text{K} = -268{,}95\,°\text{C}$). W odróżnieniu od komputerów cyfrowych, które zapisują informacje za pomocą systemu binarnego (zera lub jedynki, czyli $q = 0$ lub $q = 1$), komputery kwantowe używają w tym celu **bitów kwantowych** (ang. **quantum bits**), zwanych **kubitami** (ang. **qubit**), będących stanem mieszanym zera i jedynki (na przykład dany stan jest w $30\,\%$ logicznym zerem i w $70\,\%$ logiczną jedynką). W tym sensie zachodzi tutaj analogia do klasycznej logiki rozmytej, gdzie nie ma jednoznacznego stanu zera lub jeden. Taka sytuacja zachodzi na przykład dla sztucznej sieci neuronowej rozpoznającej

symbole w zakłóconym obrazie, w przypadku której nigdy nie ma pewności, iż rozpoznany element jest prawidłowo zidentyfikowany. Wówczas stan rozpoznania może wynosić $q = 0{,}7$ (wartość prawdopodobieństwa). Aby odróżnić stany klasyczne (bity) od stanów kwantowych (kubitów), warto odwołać się do Rysunku 7.2. Tutaj stan kubitu jest przedstawiany w postaci punktów leżących na powierzchni trójwymiarowej sfery o stałym promieniu r. Położenie tych punktów jest określone za pomocą kątów θ i φ. Do opisu kubitu (jednostki kwantowej informacji) używamy dwóch liczb rzeczywistych, a nie jednej liczby naturalnej, jak w klasycznym bicie (jednostce klasycznej informacji).



Rysunek 7.2 Stan kubitu jest opisywany za pomocą trójwymiarowej sfery o środku w punkcie $x = y = z = 0$ (sfera Blocha), o stałym promieniu r (zazwyczaj ustalamy $r = 1$) i wyznaczają go kąty θ oraz φ. Kolory czerwony i niebieski odpowiadają stanom o wartościach $q = 0$ albo $q = 1$. Linia brązowa oznacza stan z logiki rozmytej, gdzie q należy do $\langle 0, 1 \rangle$.

7.1 | Funkcje falowe

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- o pochodzeniu równania Schrödingera oraz sposobie jego wykorzystania;
- opisywać funkcję falową cząstki kwantowo- mechanicznej;
- wykorzystywać funkcję falową do określania prawdopodobieństwa położenia cząstki;
- obliczać statystyczne wartości oczekiwane położenia, pędu i energii kinetycznej dla kwantowej cząstki.

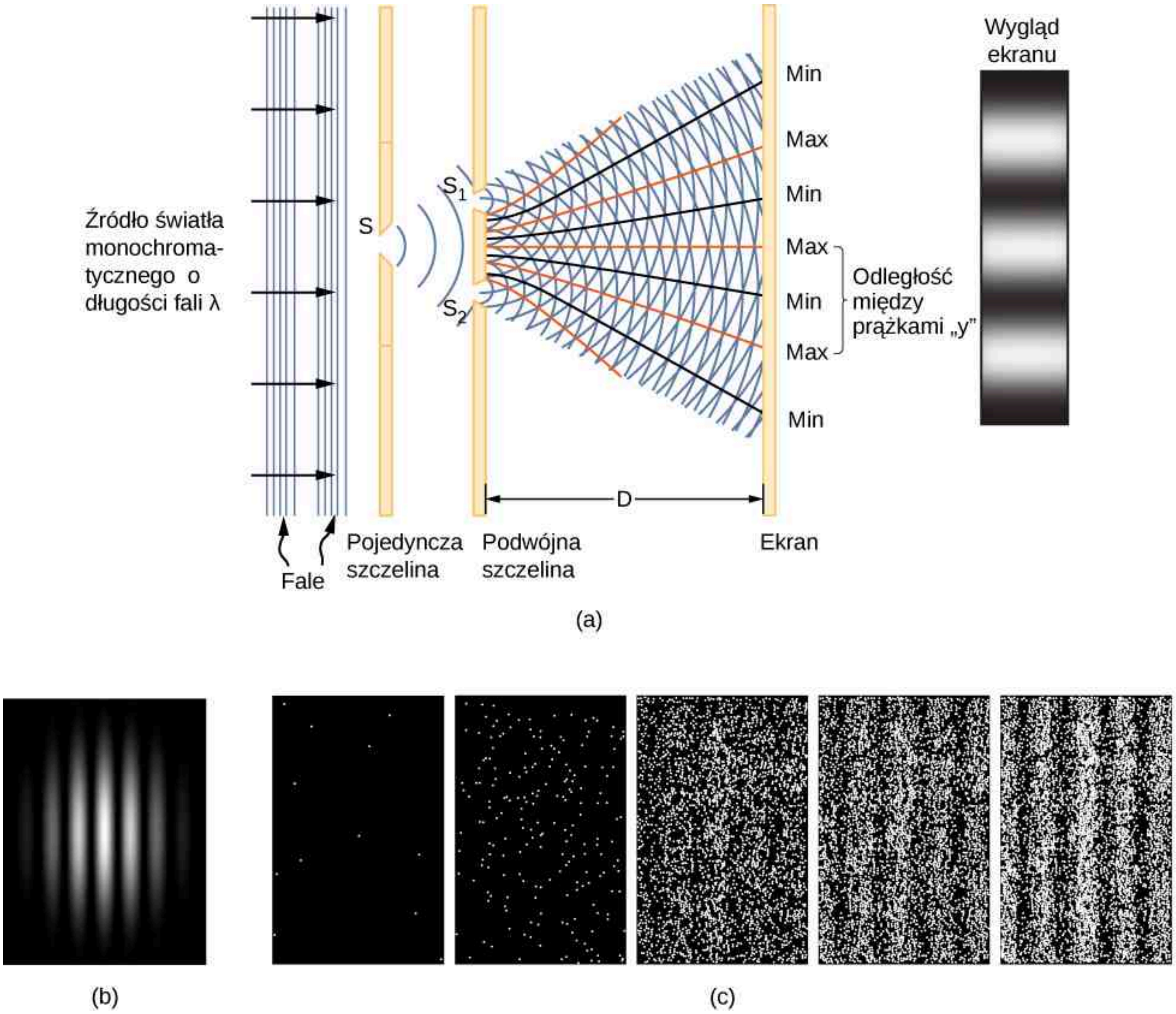
Co to naprawdę oznacza, że cząstka „zachowuje się jak fala”? Czym jest owo „falowanie”? Jakie prawa (zwane przez nas prawami fizyki) stanowią o tym, że w jakiś sposób zmienia się dana fala i jak się rozchodzi? Musimy stworzyć taką teorię, która pozwoli uwzględnić własności cząstkowe i własności falowe obiektów, takich jak foton czy elektron. Doprowadzi nas to do pojęcia funkcji falowej. Wówczas dowiemy się, jak możemy wykorzystać funkcje falowe do opisu konkretnych układów fizycznych. W przypadku amplitudy fali elektronowej danej jako funkcja czasu i położenia $\Psi(x, t)$, znanej w literaturze jako funkcja falowa, będziemy w stanie określić wszystkie wartości położenia x i ustalić, gdzie dokładnie znajduje się pojedynczy elektron w konkretnych momentach czasu. Wskazane zagadnienia oraz odpowiedzi na powyższe pytania znajdziemy w tym podrozdziale.

Wyprowadzenie i wykorzystywanie funkcji falowych

W poprzednim rozdziale omawialiśmy obiekty zachowujące się czasami jak cząstki, a czasami jak fale. Używaliśmy takich pojęć jak elektron czy foton. Elektron to niepodzielny obiekt przenoszący ładunek o pomijalnym rozmiarze, nieposiadający struktury wewnętrznej i obdarzony masą, tradycyjnie traktowany jako cząstka (w pierwszym wyobrażeniu to nieprzenikliwa i niedeformowalna kulka o promieniu r, masie m i ładunku q). Foton natomiast to cząstka światła będąca najmniejszym składnikiem fali elektromagnetycznej, nieposiadająca masy spoczynkowej, ale posiadająca pęd i zawsze poruszająca się z prędkością światła (nie istnieje dla niej układ współrzędnych, wobec którego spoczywa). Wskazówką do wyprowadzenia, a potem do zrozumienia znaczenia fizycznego funkcji falowej $\Psi(x, t)$ jest doświadczenie z **podwójną szczeliną** (ang. **two-slit interference**); Rysunek 7.3 – zobacz też Fale elektromagnetyczne (https://cnx.org/content/m65888/latest/) i Interferencja. Z fizyki klasycznej znamy równania Maxwella, które pozwalają stwierdzić, że w próżni rozchodzi się fala elektromagnetyczna, która jest rozchodzącym się w czasie i przestrzeni zaburzeniem pola elektrycznego i magnetycznego niosącym energię. Z poprzedniego rozdziału wiemy, że światło ma także pęd i wywiera ciśnienie fotonowe, gdy pada na powierzchnię. Zatem fala elektromagnetyczna ma zarówno cechy falowe, widoczne np. w interferencji, gdy fala przechodzi przez szczeliny i interferuje, jak i cechy korpuskularne (cząstkowe), gdy pada na inny obiekt i wywiera ciśnienie fotonowe. Ogólnie mówimy o cechach korpuskularno-falowych materii. W tym sensie pojęcie materii znane z czasów antycznych, jak np. u Demokryta, ulega rozmyciu. Materia (elektrony) i energia (fotony) mają podobną naturę falowo-korpuskularną. To szczególnie istotne, bo wnioski płynące z ogólnej teorii względności Einsteina pokazują równoważność energii i materii. Rozchodzenie się fali elektromagnetycznej w próżni opisane jest klasycznym równaniem falowym, gdzie występuje druga pochodna po czasie i po położeniu. Takie równanie ma tę własność, że suma dwóch rozwiązań jest również rozwiązaniem równań Maxwella (w ośrodkach liniowych takich jak próżnia). Mówimy zatem, że w przypadku liniowego równania różniczkowego superpozycja (suma) rozwiązań jest także rozwiązaniem tego równania.

Klasyczna **funkcja falowa** (ang. **wave function**) światła, jest dana wyrażeniem $E(x, t)$, a $|E|^2$ oznacza gęstość energii (E to natężenie pola elektrycznego). Właśnie gęstość energii jest miarą istnienia (intensywności) fali elektromagnetycznej lub inaczej – liczby cząstek światła. Energia pojedynczego fotonu zależy od jego częstotliwości $E_{\mathrm{f}} = hf$, a więc $|E|^2$ jest proporcjonalne do liczby fotonów. Gdy fale światła z obu szczelin interferują ze sobą, na ekranie w odległości D powstaje obraz interferencyjny (część (a) Rysunku 7.3). Jasne prążki odpowiadają miejscom, w których zaszła konstruktywna interferencja, ciemne prążki to interferencja destruktywna (część (b) Rysunku 7.3). Co ciekawe, taka interferencja zachodzi zarówno w przypadku elektronów, jak i światła (fotonów). Oczywiście z życia codziennego znamy interferencję zachodzącą dla światła.

Załóżmy, że początkowo na ekran nie pada światło. Jeżeli przepuścimy przez szczeliny bardzo słabą wiązkę światła, to obraz interferencyjny na ekranie będzie powstawał stopniowo (jak na Rysunku 7.3 (c) od lewej do prawej).



Rysunek 7.3 Interferencja fali światła na przegrodzie z dwiema szczelinami. (a) Schemat układu z podwójną szczeliną. (b) Obraz interferencyjny. (c) Stopniowe formowanie się obrazu interferencyjnego przy słabej intensywności wiązki światła. Takie samo zjawisko interferencji zachodzi w przypadku fali elektromagnetycznej padającej na dwie szczeliny oraz w przypadku wiązki elektronów (czy innych cząstek) padającej na przegrodę z dwiema szczelinami, i to nawet przy skrajnie niskiej intensywności wiązki elektronów. Pokazuje to, że istotnie natura falowa elektronu i fali elektromagnetycznej jest podobna i że w przypadku fotonu $|E(x,t)|^2$ oraz elektronu $|\Psi(x,t)|^2$ wielkości te są proporcjonalne do gęstości prawdopodobieństwa. Taka interpretacja jest nieunikniona przy bardzo małej intensywności strumienia elektronów lub strumienia kwantów promieniowania elektromagnetycznego i została potwierdzona doświadczalnie. Co więcej, jeżeli przez dwie szczeliny przechodzi fala reprezentująca elektron, to ostatecznie elektron znajdzie się w jednym miejscu na ekranie interferometru. Tak będzie, gdy dokonamy pomiaru. Jeśli tego nie zrobimy, wówczas otrzymamy pewien rozkład gęstości prawdopodobieństwa $|\Psi(x,t)|^2$ na ekranie interferometru. Zauważmy, że w przeciwieństwie do sytuacji badanej w odniesieniu do reguł fizyki klasycznej możemy jedynie określić prawdopodobieństwo występowania procesu fizycznego.

Zobacz tę symulację interaktywną (https://openstaxcollege.org/l/21intquawavint) , aby dowiedzieć się więcej o interferencji fal kwantowych.

Uderzenie pojedynczego fotonu rejestrowane jest na ekranie jako jasny punkt. Natężenie takich punktów powinno być największe w miejscu, gdzie funkcja falowa osiągnie największą intensywność. Innymi słowy, prawdopodobieństwo (mierzone dla jednostki powierzchni) uderzenia fotonu w dany punkt ekranu jest proporcjonalne do pierwiastka z całkowitego natężenia pola elektrycznego $|E|^2$ w tym punkcie. W odpowiednich warunkach dla cząstek posiadających masę powstanie taki sam obraz interferencyjny jak dla elektronów. To pokazuje, że zarówno dla elektronów (cząstek prawdziwej materii), jak i fotonów (cząstek pól fizycznych przenoszących oddziaływanie) stosuje się podobne prawa, znane później jako prawa mechaniki kwantowej. Zjawisko to stanowiło inspirację dla jej twórców. Raz

jeszcze rozpatrzmy analogię poruszającej się fali elektromagnetycznej w próżni do poruszającego się w próżni elektronu. Z mechaniki klasycznej wiemy, że nie można jednocześnie określić położenia i wektora falowego dla danej fali. Ów fakt zostanie później uwzględniony w mechanice kwantowej jako zasada nieoznaczoności dla położenia i pędu.

W obu podejściach powinna obowiązywać zasada zachowania energii i być uwzględniona falowa natura obiektów. Kwadrat modułu amplitudy powinien być proporcjonalny do liczby poruszających się w danym kierunku cząstek. Z drugiej strony musi być dozwolone zarówno dodawanie się wzajemne dwóch fal elektronu, jak i dodawanie się do siebie dwóch fal elektromagnetycznych. A więc superpozycja (dodawanie się) fal jest także falą. Teraz dochodzimy chyba do najistotniejszego faktu. W klasycznym równaniu falowym fali elektromagnetycznej występuje druga pochodna po czasie (czyli operator $\mathrm{d}^2 / \mathrm{d}t^2$) i po przestrzeni ($\mathrm{d}^2 / \mathrm{d}x^2$). Czy coś takiego powinno występować w równaniu falowym elektronu? Jednym ze sposobów, by ten postulat wcielić w życie, jest wprowadzenie reprezentacji operatorowej dla obserwabli wielkości fizycznych (obserwablą jest np. pęd lub położenie elektronu). Stan cząstki (przykładowo elektronu) reprezentuje zespolona skalarna funkcja falowa $\Psi(x, t)$. W wyniku działania operatora A, reprezentującego obserwablę (np. pęd), na funkcję własną $\Psi(x, t)$ uzyskujemy iloczyn wartości własnej i danej funkcji własnej. Jest to postulat mechaniki kwantowej. Zapisujemy go schematycznie w postaci

$$A\,\Psi(x, t) = a\,\Psi(x, t). \tag{7.1}$$

W powyższym równaniu A to operator, a to wartość własna operatora A, a $\Psi(x, t)$ to stan własny dla operatora A. Na ogół operatory A możemy przedstawiać w postaci kwadratowych macierzy, wartości własne a – jako liczby rzeczywiste, a stany własne $\Psi(x, t)$ – jako wektory zespolonych funkcji. W najprostszym przypadku $\Psi(x, t)$ jest zespoloną funkcją skalarną i tak będziemy przyjmować w tym rozdziale. Przejdźmy do sformułowania równania Schrödingera dla elektronu. W przypadku elektronu poruszającego się w próżni przyjmujemy zasadę zachowania pędu p oraz zasadę zachowania energii w układzie. Zakładamy, że pęd jest reprezentowany przez operator $p_x = -i\hbar \cdot \mathrm{d} / \mathrm{d}x$, a położenie przez operator położenia x. Tym samym funkcja falowa dla elektronu poruszającego się w próżni ze stałym pędem p_x spełnia równanie

$$p_x\,\psi(x) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \psi(x), \tag{7.2}$$

które ma rozwiązanie w postaci fali płaskiej $\psi(x) = A_1 \exp(ixp_x / \hbar)$, gdzie A_1 to liczba zespolona. W ten sposób otrzymujemy funkcję falową dla cząstki (np. elektronu) poruszającej się po linii prostej ze stałym pędem.

Zastanówmy się teraz, czy funkcja falowa zmienia się w czasie? Musimy wiedzieć, że jedną z wielkości, które nie zmieniają się w czasie ruchu elektronu w próżni pod nieobecność pola magnetycznego jest całkowita energia mechaniczna (hamiltonian układu H), będąca sumą energii kinetycznej E_k i energii potencjalnej V. Wielkość, która nie zmienia się w czasie ruchu nazywa się całką ruchu. Zgodnie z postulatem mechaniki kwantowej hamiltonian H ($H = E_\mathrm{k} + V(x) = E$) jest reprezentowany w postaci operatorowej jako $-i\hbar \cdot \mathrm{d} / \mathrm{d}t$. Dla elektronu poruszającego się w próżni możemy napisać następujące równanie

$$H\,\Psi(x, t) = E\,\psi(t) = -i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \psi(t). \tag{7.3}$$

Jego rozwiązanie ma postać $\psi(t) = A_0 \exp(itE / \hbar)$, gdzie A_0 jest liczbą zespoloną. Widzimy zatem, że faza funkcji falowej ewoluuje wraz z czasem przy stałej wartości energii elektronu, a amplituda funkcji falowej się nie zmienia.

Skoro potrafimy już opisać zachowanie się elektronu w jednorodnej przestrzeni, możemy przejść do opisu elektronu w niejednorodnym potencjale, np. pomiędzy okładkami kondensatora, gdzie panuje próżnia.

Wykorzystując zasadę zachowania energii ($H = \left[1 / (2m)\right] \cdot p^2 + V(x, t)$), gdzie $H = E$, możemy zapisać równanie Schrödingera w następujący sposób

$$\begin{aligned} H\,\Psi(x, t) = E\,\Psi(x, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) &= \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V(x, t)\right] \Psi(x, t) \\ = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + V(x, t)\right] \Psi(x, t) &= \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x, t)\right] \Psi(x, t). \end{aligned} \tag{7.4}$$

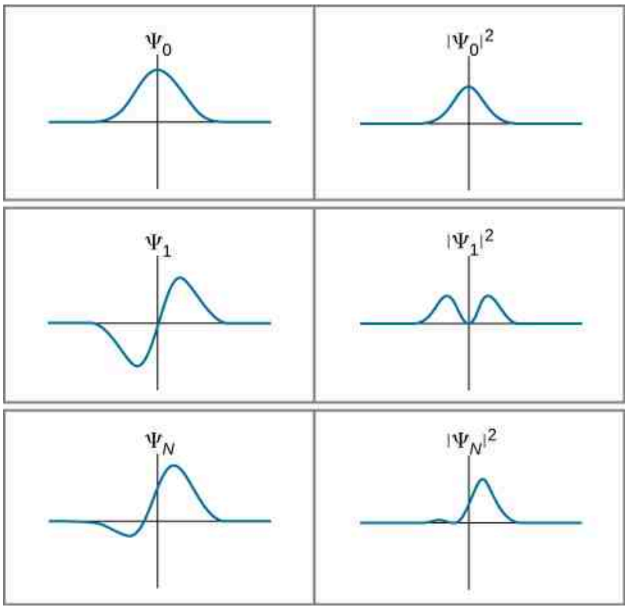
Kwadrat funkcji falowej $|\Psi|^2$ w przypadku jednowymiarowym ma znaczenie podobne do znaczenia kwadratu pola elektrycznego $|E|^2$. Mianowicie określa on prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w pewnym miejscu i czasie na jednostkę długości i nazywany też bywa **gęstością prawdopodobieństwa** (ang. **probability density**). Prawdopodobieństwo (P) znalezienia cząstki w przedziale $(x, x + \mathrm{d}x)$ w czasie t jest dane wzorem

$$P(x, x + \mathrm{d}x) = |\Psi(x, t)|^2\,\mathrm{d}x. \tag{7.5}$$

Zgodnie z otrzymanymi rozwiązaniami Równania 7.1, Równania 7.2, Równania 7.3 funkcja falowa ma wartości zespolone, czego nie można powiedzieć o wartościach pola elektrycznego $E(x, y, z, t)$ czy magnetycznego $B(x, y, z, t)$, które są liczbami rzeczywistymi. Zespolone wartości funkcji falowej są konsekwencją rozwiązania równania Schrödingera (Równanie 7.4), z którego otrzymujemy kwantowo-mechaniczą funkcję falową. Tym razem naszą intuicją fizyczną jest wiara w słuszność równania Schrödingera. Cząstka może istnieć z pewnym prawdopodobieństwem w bardzo różnych miejscach („siedzieć na dwóch bardzo odległych krzesłach”), co jest szokujące dla osoby, która odbyła kurs fizyki klasycznej, w której punkt materialny porusza się w polu sił po jednoznacznie określonej trajektorii. To, co musimy zapamiętać, to fakt, że kwadrat modułu kwantowo-mechanicznej funkcji falowej jest proporcjonalny do gęstości prawdopodobieństwa. Podobnie jak mechanika statystyczna fizyka kwantowa nie wskazuje na deterministyczną (w pełni przewidywalną) ewolucję układu fizycznego, a jedynie określa prawdopodobieństwa zajścia pewnych zjawisk. W tym sensie istnieje pewna analogia pomiędzy klasyczną fizyką statystyczną a mechaniką kwantową, ale zgłębienie tego zagadnienia wykracza poza zakres tej książki.

To probabilistyczne ujęcie funkcji falowej związane jest z **postulatem Borna** (ang. **Born interpretation**). Mówi on, że same funkcje falowe cząstki nie są mierzone, ale mierzone jest spektrum wartości wielkości fizycznych (obserwabli, takich jak energia, pęd czy położenie) otrzymywanych z rozwiązań równania Schrödingera, w tym ich wartość średnia. W ujęciu Borna funkcja falowa nie jest niczym realnym, a jedynie narzędziem pomocniczym służącym określeniu własności cząstek mikroświata.

Przykłady funkcji falowych, będących rozwiązaniami równania Schrödingera (Równanie 7.4) dla różnych $V(x)$ i ich kwadratów przedstawione zostały na Rysunku 7.4.



Rysunek 7.4 Przykłady funkcji falowych, będących rozwiązaniami równania Schrödingera dla różnych wartości potencjałów (lewa część rysunku) wraz z odpowiadającymi im kwadratami modułów funkcji falowych (prawa część rysunku), wyrażający prawdopodobieństwo znalezienia cząstki. Uzyskane rozkłady prawdopodobieństwa są nieintuicyjne z punktu widzenia mechaniki klasycznej.

Jeżeli funkcja falowa zmienia się wolno w wąskim przedziale Δx, to prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w tym przedziale $(x, x + \Delta x)$ jest w przybliżeniu równe

$$P(x, x + \Delta x) \approx |\Psi(x, t)|^2 \Delta x. \tag{7.6}$$

Kwadrat modułu funkcji falowej zapewnia dodatnią gęstość prawdopodobieństwa, podobnie jak kwadrat pola elektrycznego zapewnia dodatnią wartość energii. W przypadku ogólnym (dla wolno- lub szybkozmiennej funkcji falowej) niezbędne jest zastosowanie całki

$$P(x, x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} |\Psi(x, t)|^2 \, dx. \tag{7.7}$$

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki jest więc równe polu pod wykresem funkcji $|\Psi(x, t)|^2$ w zakresie od x do $x + \Delta x$, co oczywiście wynika z faktu, że $|\Psi(x, t)|^2$ jest gęstością prawdopodobieństwa. Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w dowolnym miejscu (**warunek normalizacji**, ang. **normalization condition**) wynosi

$$P(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 \, \mathrm{d}x = 1. \quad (7.8)$$

W przypadku dwuwymiarowym całkujemy po powierzchni, co wymaga podwójnego całkowania. W trzech wymiarach całkujemy po objętości, a całka jest potrójna. Na razie pozostaniemy jednak przy przypadku jednowymiarowym.

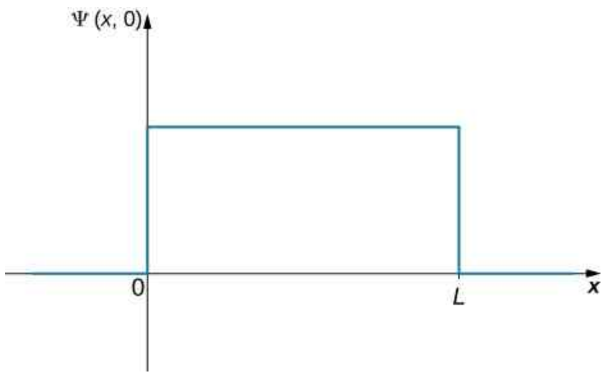
Przykład 7.1

Gdzie jest kulka? (część I)

Kulka porusza się po linii prostej wewnątrz rurki o długości L. Prawdopodobieństwo znalezienia kulki w dowolnym punkcie w rurze w danym czasie jest jednakowe. Jakie jest prawdopodobieństwo zaobserwowania kulki w lewej połowie rury? (Oczywiście wynik to $50\,\%$, ale w jaki sposób otrzymamy takie rozwiązanie, korzystając z równania funkcji falowej?)

Strategia rozwiązania

Pierwszym krokiem będzie znalezienie funkcji falowej kulki. Prawdopodobieństwo zaobserwowania kulki w dowolnym miejscu w rurze jest takie samo, więc możemy przedstawić stan kulki za pomocą stałej funkcji falowej (patrz Rysunek 7.5). Warunek normalizacji może być wykorzystany do obliczenia wartości funkcji, a scałkowanie po połowie długości pozwoli na uzyskanie ostatecznej odpowiedzi.



Rysunek 7.5 Funkcja falowa kulki w rurze o długości L.

Rozwiązanie

Funkcję falową kulki (uzyskaną przy założeniach dużego L i energii kinetycznej dążącej do zera oraz stałości potencjału) możemy zapisać jako $\Psi(x, t) = C$, gdzie $0 < x < L$, C jest stałą, a $\Psi(x, t) = 0$ dla innych wartości x. Stałą C możemy obliczyć, stosując warunek normalizacyjny (dla ułatwienia przyjmujemy $t = 0$)

$$P(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} |C|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

Całkę możemy podzielić na trzy części: (1) od minus nieskończoności do zera, (2) od zera do L i (3) od L do plus nieskończoności. Kulka może poruszać się jedynie w rurze, a więc w pierwszym i ostatnim przedziale $C = 0$, a co za tym idzie – całka jest równa zero. Powyższe równanie możemy zapisać w następujący sposób

$$P(0, L) = \int_0^L |C|^2 \, \mathrm{d}x = 1.$$

Wartość C nie zależy od x i może zostać wyciągnięta przed znak całki

$$|C|^2 \int_0^L \mathrm{d}x = 1.$$

Rozwiązaniem całki jest

$$C = \sqrt{\frac{1}{L}}.$$

Aby obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia kulki w pierwszej połowie rury, musimy zmienić granice przedziału całkowania

$$P(0, L/2) = \int_0^{L/2} \left|\sqrt{\frac{1}{L}}\right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{L} \cdot \frac{L}{2} = 0{,}5.$$

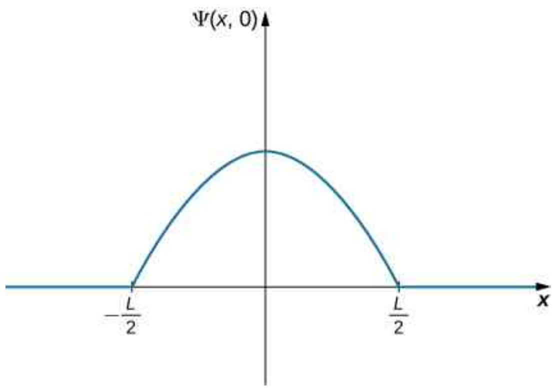
Znaczenie

Prawdopodobieństwo znalezienia kulki w pierwszej połowie rury wynosi $50\,\%$, jak przewidywaliśmy. Warto zauważyć dwa fakty. Po pierwsze, wynik ten odpowiada polu pod stałą funkcją dla przedziału od $x = 0$ do $x = L/2$. Po drugie, obliczenia te wymagają całkowania kwadratu funkcji falowej. Częstym błędem jest całkowanie funkcji falowej bez uprzedniego podniesienia jej do drugiej potęgi.

Przykład 7.2

Gdzie jest kulka? (część II)

Znów mamy do czynienia z kulką, która może poruszać się jedynie wewnątrz rury o długości L. Tym razem najbardziej prawdopodobne jest znalezienie kulki pośrodku rury. Jej funkcję falową możemy przedstawić jako zwykłą funkcję cosinus (Rysunek 7.6). Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia kulki w ostatniej ćwiartce rury?



Rysunek 7.6 Funkcja falowa kulki w rurze o długości L, gdzie największe prawdopodobieństwo znalezienia kulki jest pośrodku rury.

Strategia rozwiązania

Wykorzystamy strategię z poprzedniego przykładu. W tym przypadku funkcja falowa ma dwa nieznane parametry – jeden jest związany z długością fali, a drugi to amplituda fali. Amplitudę możemy wyznaczyć, korzystając z warunków brzegowych funkcji, a długość fali za pomocą warunku normalizacji. Ostateczny wynik otrzymamy, całkując kwadrat funkcji falowej. Dla uproszczenia obliczeń jako wierzchołek funkcji falowej ustalamy początek osi x.

Rozwiązanie

Zapiszmy równanie funkcji falowej

$$\Psi(x, 0) = A\cos(kx), -L/2 < x < L/2,$$

gdzie A jest amplitudą funkcji falowej, a $k = 2\pi/\lambda$ jest jej liczbą falową. Poza określonym przedziałem amplituda funkcji wynosi zero, ponieważ ruch kulki jest ograniczony rozmiarami rury. Warunek wygaszenia funkcji falowej na prawym końcu rury prowadzi do następującej zależności

$$\Psi\left(\frac{L}{2}, 0\right) = 0.$$

Podstawiwszy ją w równaniu funkcji falowej w punkcie $x = L/2$, otrzymamy

$$A\cos\left(k\frac{L}{2}\right) = 0.$$

To równanie jest spełnione dla argumentów funkcji cosinus równych całkowitym wielokrotnościom $\pi/2$, $3\pi/2$, $5\pi/2$ itd. W tym przypadku mamy

$$\frac{kL}{2} = \frac{\pi}{2}$$

lub

$$k = \frac{\pi}{L}.$$

Stosując warunek normalizacji, otrzymujemy $A = \sqrt{2/L}$, a więc funkcja falowa kulki dana jest wzorem

$$\Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), -L/2 < x < L/2.$$

Aby określić prawdopodobieństwo znalezienia kulki w ostatniej ćwiartce rury, podnosimy funkcję falową do kwadratu i całkujemy ją po odpowiednim przedziale

$$P\left(\frac{L}{4}, \frac{L}{2}\right) = \int_{L/4}^{L/2} \left|\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right|^2 \mathrm{d}x = 0{,}091.$$

Znaczenie

Prawdopodobieństwo znalezienia kulki w ostatniej ćwiartce rury wynosi $9{,}1\,\%$. Kulka ma określoną długość fali ($\lambda = 2L$). Jeśli długość rury jest wielkością makroskopową ($L = 1\,\mathrm{m}$), to pęd kulki będzie wynosił

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2L} \sim 10^{-36}\,\mathrm{m/s}.$$

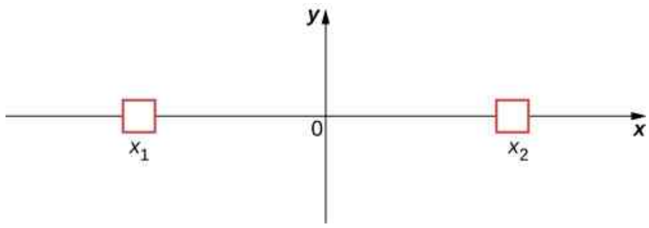
Wielkość ta jest zbyt mała, żeby mogła zostać zmierzona.

Interpretacja statystyczna funkcji falowej

Jesteśmy już w stanie odpowiedzieć na pytania postawione na początku tego rozdziału. Po pierwsze: Czym jest funkcja falowa (falowanie) cząstki opisanej równaniem $\Psi(x,t) = A \sin(kx - \omega t)$? Biorąc pod uwagę powyższą dyskusję, jest to funkcja matematyczna opisująca m.in. prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w danym miejscu w momencie dokonania pomiaru. Po drugie: W jaki sposób możemy wykorzystać funkcję falową do obliczenia prawdopodobieństwa położenia? Jeżeli chcemy obliczyć prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w pewnym przedziale, najpierw należy podnieść moduł funkcji falowej do kwadratu, a następnie scałkować po tym przedziale. Niedługo dowiemy się, że funkcja falowa może dostarczyć także wielu innych informacji.

Po trzecie: Jeżeli falę materii określa funkcja falowa $\Psi(x,t)$, to gdzie dokładnie znajduje się cząstka? Znamy dwie odpowiedzi: gdy cząstka nie jest obserwowana (mierzona), jej położenie jest rozmyte, czyli cząstka znajduje się wszędzie: $x \in (-\infty, +\infty)$. Natomiast gdy cząstka jest obserwowana, „wskakuje” w określone położenie $(x, x + \mathrm{d}x)$ z prawdopodobieństwem $P(x, x + \mathrm{d}x) = |\Psi(x,t)|^2\, \mathrm{d}x$. W drugim przypadku proces ten nazywamy redukcją funkcji falowej do pewnego stanu własnego (**redukcją stanów**, ang. **state reduction**). Takie podejście określa się mianem **interpretacji kopenhaskiej** (ang. **Copenhagen interpretation**) funkcji falowej lub mechaniki kwantowej.

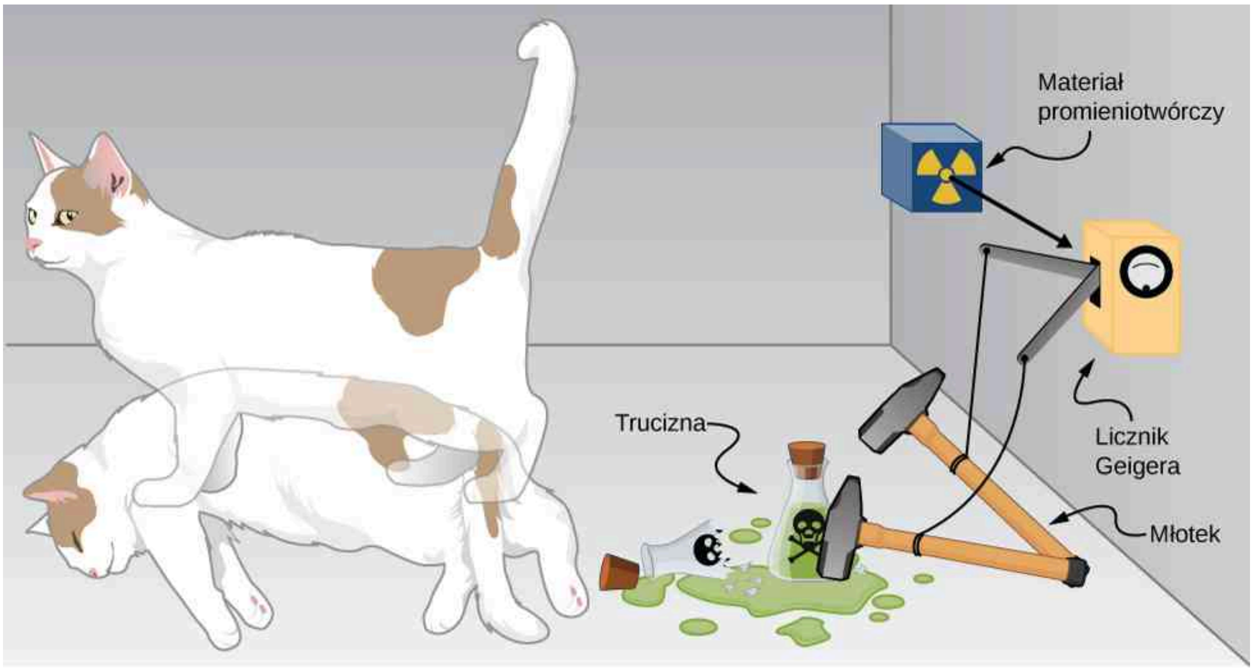
Aby lepiej zrozumieć tę interpretację, rozważmy prosty przypadek cząstki, która może znajdować się w pudełku oznaczonym jako x_1 lub x_2 (Rysunek 7.7). Zgodnie z regułami fizyki klasycznej zakładamy, że dana cząstka może znajdować się tylko w jednym z pudełek, nawet gdy jej nie obserwujemy. Natomiast według mechaniki kwantowej cząstka ma rozmyte położenie i może znajdować się zarówno w pudełku x_1 , jak i x_2 do momentu obserwacji, kiedy musi wybrać jeden ze stanów. Tak więc założenie, że w danym czasie cząstka może znajdować się tylko w jednym miejscu, jest błędne z punktu widzenia mechaniki kwantowej. Taką samą zależność zaobserwujemy w przypadku innych mierzalnych wielkości, takich jak pęd czy energia.



Rysunek 7.7 Układ dwóch możliwych stanów cząstki.

Te nieintuicyjne konsekwencje kopenhaskiej interpretacji mechaniki kwantowej możemy zobrazować za pomocą prostego eksperymentu myślowego sformułowanego przez **Erwina Schrödingera (1887–1961)** – Rysunek 7.8.

Powołamy się na eksperyment myślowy z 1935 roku: w pudełku znajdują się kot, licznik Geigera, fiolka z trucizną, młotek i materiał promieniotwórczy. Gdy materiał radioaktywny ulega rozpadowi, licznik Geigera wykrywa zmianę i zwalnia młotek, który uderza w fiolkę, roztrzaskując ją i uwalniając truciznę. Uwolnienie trucizny powoduje śmierć kota. Rozpad promieniotwórczy jest zdarzeniem losowym (obarczonym pewnym prawdopodobieństwem) i nie ma pewności, kiedy dokładnie zajdzie. Fizyk powiedziałby, że atom materiału promieniotwórczego znajduje się w stanie superpozycji – istnieje jednocześnie jako atom, który uległ rozpadowi, i jako atom, który rozpadowi nie uległ. Do momentu otwarcia pudełka obserwator nie może być pewien, czy kot w środku jest żywy, czy martwy, gdyż jego los związany jest ze stanem atomu. Zatem (według interpretacji kopenhaskiej) kot w pudełku jest jednocześnie żywy i martwy do momentu otwarcia pudełka.



Rysunek 7.8 **Kot Schrödingera** (ang. **Schrödinger's cat**)

Za pomocą eksperymentu z kotem Schrödinger chciał uwidocznić absurdalne konsekwencje interpretacji kopenhaskiej – to, że kot może być zarazem żywy i martwy. Dość podobnie wygląda sytuacja w trakcie rzutu monetą. Przed dokonaniem pomiaru, czyli stwierdzeniem orzeł lub reszka, jej stan jest superpozycją stanów. Po dokonaniu pomiaru i stwierdzeniu np. orzeł następuje redukcja do stanu orła.

Jednak interpretacja ta pozostaje najpopularniejszym podejściem do mechaniki kwantowej w dydaktyce.

Układy dwustanowe (prawe i lewe pudełko, atom ulegający lub nie ulegający rozpadowi itd.) są często wykorzystywane do wyjaśnienia podstaw mechaniki kwantowej. Takie systemy mają też zastosowanie w naturze, jak w przypadku spinu elektronu czy stanów rozmytych cząstek, atomów, a nawet molekuł. Możemy też je wykorzystać w komputerach kwantowych, o czym wspomnieliśmy na początku rozdziału. **Kubity** (ang. **quantum bits**), które w komputerach kwantowych pełnią funkcję tradycyjnych bitów, nie przyjmują czystych stanów zero-jedynkowych jak ich cyfrowe odpowiedniki, ale są rozmyte. Jeżeli zgromadzilibyśmy dużą liczbę kubitów w tym samym stanie kwantowym, pojedynczy kubit przyjąłby wartość zero z prawdopodobieństwem p i jeden z prawdopodobieństwem $q = 1 - p$. Wielu naukowców uważa komputery kwantowe za przyszłość komputerów.

Sprzężenia

W dalszej części rozdziału dowiemy się, w jaki sposób za pomocą funkcji falowych opisać cząstki swobodne, cząstki w potencjale efektywnym $V(x)$ lub cząstki związane z innymi cząstkami siłami wyrażonymi przez odpowiedni potencjał wzajemnego oddziaływania $V(x_1, x_2)$ cząstki 1 i 2. Potencjał oddziaływania wzajemnego w przypadku wielu cząstek można niekiedy przybliżyć przez potencjal efektywny $V(x)$. Postać funkcji falowej zależy od właściwości układu. W mechanice kwantowej często spotkamy się z **funkcjami zespolonymi** (ang. **complex function**). Funkcją zespoloną nazwiemy taką, która zawiera co najmniej jedną liczbę urojoną $i = \sqrt{-1}$. Eksperymentalnie jesteśmy w stanie zmierzyć jedynie liczby rzeczywiste (nieurojone), a więc musimy nieco zmienić nasze podejście do funkcji falowych. W takim przypadku powiemy, że prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w wąskim przedziale $(x, x + \mathrm{d}x)$ w momencie t jest dane wzorem

$$P(x, x + \mathrm{d}x) = |\Psi(x, t)|^2 \,\mathrm{d}x = \Psi^*(x, t)\,\Psi(x, t)\,\mathrm{d}x, \tag{7.9}$$

gdzie $\Psi^*(x, t)$ jest funkcją sprzężoną do funkcji falowej. Sprzężenie funkcji możemy otrzymać przez zamianę każdego wystąpienia $i = \sqrt{-1}$ na $-i$. W ten sposób eliminujemy wszystkie liczby zespolone z rozwiązania, ponieważ wynikiem działania $\Psi^*(x, t)\,\Psi(x, t)$ jest zawsze liczba rzeczywista.

7.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jeżeli $a = 3 + 4i$, to jaki będzie wynik mnożenia $a^* a$?

Rozważmy cząstkę poruszającą się wzdłuż osi x, jak to było rozważane wcześniej (Równanie 7.2). Nie działają na nią żadne siły zewnętrzne, a więc porusza się ona ze stałą prędkością i po linii prostej. Formalizm mechaniki kwantowej zakłada, że kwantowo-mechaniczna funkcja falowa cząstki swobodnej może posiadać zarówno część rzeczywistą, jak i urojoną. W przypadku cząstki swobodnej tę funkcję kwantowo-mechaniczną możemy przedstawić wzorem

$$\Psi(x, t) = A\cos(kx - \omega t) + iA\sin(kx - \omega t),$$

gdzie A jest amplitudą funkcji, k jej liczbą falową, a ω odpowiada częstości kątowej. Wykorzystując wzór Eulera $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$, możemy zapisać to równanie w następujący sposób

$$\Psi(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)} = Ae^{i\phi},$$

gdzie ϕ to kąt fazowy. Jeżeli mamy do czynienia z funkcją wolnozmienną w przedziale Δx, prawdopodobieństwo znalezienia cząstki jest równe

$$P(x, x + \Delta x) = \Psi^*(x, t)\Psi(x, t)\Delta x = Ae^{i\phi}A^*e^{-i\phi}\Delta x = A^*A\Delta x.$$

Jeżeli A jest liczbą zespoloną ($a + ib$, gdzie a i b są stałymi rzeczywistymi), to

$$A^*A = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2.$$

Zauważmy, że części urojone zniknęły. Tak więc

$$P(x, x + \Delta x) \approx |A|^2\Delta x$$

ma wartość rzeczywistą. Interpretacja $\Psi^*(x, t)\Psi(x, t)$ jako gęstości prawdopodobieństwa daje pewność, że przewidywania mechaniki kwantowej są mierzalne w rzeczywistym świecie.

7.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Załóżmy, że cząstka o energii E porusza się wzdłuż osi x i jest ograniczona do przedziału $0 \leq x \leq L$. Możliwą funkcją falową tej cząstki jest

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} Ae^{-iEt/\hbar}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right), & \text{dla } 0 \leq x \leq L, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases}$$

Określ stałą normalizacji.

Wartości oczekiwane obserwabli a równanie Schrödingera

W mechanice klasycznej rozwiązaniem równania ruchu jest funkcja pewnej mierzalnej wielkości, jak $x(t)$, gdzie x jest położeniem, a t odpowiada czasowi. Zauważmy, że jednej wartości t odpowiada tylko jedna wartość x, natomiast w mechanice kwantowej rozwiązaniem równania ruchu jest funkcja falowa $\Psi(x, t)$, a cząstka może mieć różne położenie dla każdej chwili t. Jedynym sposobem określenia położenia cząstki jest skorzystanie z gęstości prawdopodobieństwa $|\Psi(x, t)|^2$. Średnia wartość położenia dużej liczby cząstek o tej samej funkcji falowej wynosi

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xP(x, t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\Psi^*(x, t)\Psi(x, t)\,dx. \tag{7.10}$$

Zależność tę nazwiemy **wartością oczekiwaną** (ang. **expectation value**) położenia i zapiszemy jako

$$\langle x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)x\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x. \quad (7.11)$$

Sens tego zapisu zostanie niedługo objaśniony. Zgodnie z założeniami mechaniki kwantowej x nazwiemy **operatorem położenia** (ang. **position operator**).

Warto zaznaczyć, że funkcja falowa może być uzależniona od innych wielkości, jak prędkość (v), pęd (p) czy energia kinetyczna (E_k). Przykładowo wartość oczekiwaną pędu zapiszemy jako

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(p,t)p\Psi(p,t)\,\mathrm{d}p, \quad (7.12)$$

gdzie użyjemy $\mathrm{d}p$ zamiast $\mathrm{d}x$ dla oznaczenia nieskończenie małej zmiany pędu. W niektórych przypadkach, znając postać funkcji falowej $\Psi(x,t)$, będziemy chcieli obliczyć wartość oczekiwaną pędu. Zapiszemy to jako

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi(x,t)\,\mathrm{d}x, \quad (7.13)$$

gdzie wyrażenie w nawiasach pomiędzy funkcjami falowymi nazywamy **operatorem pędu** (ang. **momentum operator**). Operator pędu działa na funkcję falową po prawej stronie; przed całkowaniem niezbędne jest też pomnożenie otrzymanego wyniku przez funkcję sprzężoną. Operator ten może być zapisany jako

$$\widehat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}. \quad (7.14)$$

Operator pędu dla współrzędnych y i z wyprowadza się w analogiczny sposób. Te i inne operatory wchodzą w zakres zaawansowanej fizyki współczesnej. Jako przykład rozważmy operator energii kinetycznej

$$\widehat{E}_k = \frac{1}{2}m\left(\widehat{v}_x\right)^2 = \frac{\left(\widehat{p}_x\right)^2}{2m} = \frac{\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2}{2m} = \frac{-\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{-\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \quad (7.15)$$

Tak więc jeżeli chcemy obliczyć wartość oczekiwaną energii kinetycznej pewnej cząstki (problem ograniczamy do jednego wymiaru), niezbędne jest dwukrotne zróżniczkowanie funkcji przed jej scałkowaniem.

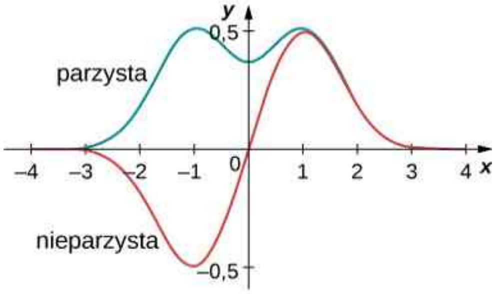
Obliczenia wartości oczekiwanych często są upraszczane dzięki wykorzystaniu symetrii funkcji falowych. Funkcja falowa może być symetryczna parzyście lub nieparzyście. **Parzystą** (ang. **even function**) nazwiemy funkcję spełniającą równanie

$$\psi(x) = \psi(-x). \quad (7.16)$$

Natomiast **funkcja nieparzysta** (ang. **odd function**) spełnia równanie

$$\psi(x) = -\psi(-x). \quad (7.17)$$

Przykłady funkcji parzystej i nieparzystej przedstawia Rysunek 7.9. Funkcja parzysta jest symetryczna względem osi y. Funkcja taka jest tworzona przez odbicie $\psi(x)$ dla $x > 0$ względem osi y. Dla porównania – funkcja nieparzysta jest tworzona przez odbicie względem osi y, a następnie osi x. Funkcja nieparzysta nazywana jest też **funkcją antysymetryczną** (ang. **anti-symmetric function**).



Rysunek 7.9 Przykłady funkcji parzystej i nieparzystej

Funkcja parzysta pomnożona przez funkcję parzystą da również funkcję parzystą. Dobrym przykładem takiej funkcji jest $x^2 \cdot e^{-x^2}$ (jest to iloczyn dwóch funkcji parzystych). Zauważamy, że iloczyn dwóch funkcji nieparzystych zawsze daje funkcję parzystą, na przykład $x \cdot \sin x$. Jednakże pomnożenie funkcji parzystej i nieparzystej w wyniku daje funkcję funkcję nieparzystą, jak w zwykłym mnożeniu $x \cdot e^{-x^2}$. Wartość całki z funkcji nieparzystej obliczona po całym przedziale (od $-a$ do a) jej wartości wynosi zero. Zatem jeśli obliczymy pole powierzchni ograniczonej wykresem funkcji (od $-a$ do a) to okaże się, że pole nad osią x jest równe polu pod osią x. Jak zobaczymy w następnym przykładzie, ta własność funkcji nieparzystych jest bardzo przydatna.

Przykład 7.3

Wartość oczekiwana (część I)

Znormalizowana funkcja falowa cząstki ma postać

$$\psi(x) = \frac{e^{-|x|/x_0}}{\sqrt{x_0}}.$$

Obliczmy wartość oczekiwaną położenia cząstki.

Strategia rozwiązania

Podstawimy funkcję falową do Równania 7.11. Operator położenia wymaga jedynie mnożenia.

Rozwiązanie

Najpierw pomnożymy, następnie scałkujemy

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x|\psi(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left| \frac{e^{-|x|/x_0}}{\sqrt{x_0}} \right|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2|x|/x_0} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Znaczenie

Funkcja pod całką ($xe^{-2|x|/x_0}$) jest nieparzysta, ponieważ stanowi iloczyn funkcji nieparzystej (x) i parzystej ($e^{-2|x|/x_0}$). Całka się zeruje, gdyż pole powierzchni nad osią x jest równe polu powierzchni pod osią x. Otrzymany wynik ($\langle x \rangle = 0$) nie jest zaskakujący, ponieważ funkcja gęstości prawdopodobieństwa jest symetryczna względem $x = 0$.

Przykład 7.4

Wartość oczekiwana (część II)

Zależna od czasu funkcja falowa cząstki, której ruch ograniczony jest do zakresu od 0 do L, dana jest wzorem

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right),$$

gdzie ω jest częstością kątową. (Zauważmy, że funkcja zmienia się podobnie jak sinus ze względu na ograniczenie położenia. Dla $x = 0$ funkcja sinus jest równa zero, a więc i funkcja falowa wynosi zero, co jest zgodne z warunkami brzegowymi funkcji). Obliczmy wartości oczekiwane położenia, pędu i energii kinetycznej.

Strategia rozwiązania

Musimy znormalizować funkcję, aby uzyskać wartość $|A|$. Następnie wykorzystujemy operatory do obliczenia wartości oczekiwanych.

Rozwiązanie

Obliczamy stałą normalizacji

$$1 = \int_0^L \Psi^* (x,t)\,\Psi (x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^L A^* e^{+i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot A e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$

$$= |A|^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = |A|^2 \frac{L}{2} \Rightarrow |A| = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Wartość oczekiwana położenia wynosi

$$\langle x \rangle = \int_0^L \Psi^* (x,t) x\,\Psi (x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^L A^* e^{+i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot x \cdot A e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x$$

$$= |A|^2 \int_0^L x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = |A|^2 \frac{L^2}{4} = \frac{L}{2}.$$

Wartość oczekiwana pędu w kierunku x również wymaga całkowania. Aby wyliczyć tę całkę, odpowiedni operator musi zadziałać na funkcję falową $\psi(x)$ po prawej od siebie

$$\widehat{p}_x \Psi (x,t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \Psi (x,t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left[A e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] = -i\frac{Ah}{2L} e^{-i\omega t} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Tym samym wartość oczekiwana pędu jest równa

$$\langle p \rangle = \int_0^L \Psi^* (x,t) \widehat{p}_x \Psi (x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^L A^* e^{+i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \left[-i\frac{Ah}{2L} e^{-i\omega t} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] \mathrm{d}x$$

$$= -i\frac{|A|^2 h}{4L} \int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Funkcja podcałkowa to sinus, a długość fali jest równa szerokości studni L, a więc jest funkcją nieparzystą, wyliczaną w punkcie $x = L / 2$. Powoduje to, że całka wynosi zero.

Aby otrzymać wartość oczekiwaną energii kinetycznej w kierunku osi x, należy zadziałać operatorem energii na funkcję falową

$$\widehat{E}_\mathrm{k} \Psi (x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \Psi (x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \left[A e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m} A e^{-i\omega t} \frac{\partial^2}{\partial^2 x} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{Ah^2}{8mL^2} e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

Po podstawieniu wartość oczekiwana energii kinetycznej wynosi

$$\langle E_\mathrm{k} \rangle = \int_0^L \Psi^* (x, t) \widehat{E}_\mathrm{k} \Psi(x, t)\,\mathrm{d}x = \int_0^L A^* e^{+i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \left[\frac{Ah^2}{8mL^2} e^{-i\omega t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] \mathrm{d}x$$

$$= \frac{|A|^2 h^2}{8mL^2} \int_0^L \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{|A|^2 h^2}{8mL^2} \cdot \frac{L}{2} = \frac{h^2}{8mL^2}.$$

Znaczenie

Wartość średnia położenia dużej liczby cząstek w danym stanie jest równa $L / 2$. Średnia wartość pędu wynosi zero, ponieważ dana cząstka może poruszać się z jednakowym prawdopodobieństwem w lewo i w prawo. Jednakże cząstka nie znajduje się w spoczynku, gdyż jej średnia energia kinetyczna jest różna od zera. Ostatecznie gęstość prawdopodobieństwa wynosi

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

i osiąga maksimum w punkcie $L / 2$, a zero przyjmuje dla $x = 0$ i $x = L$. Zauważmy, że wyniki te nie zależą w sposób jawny od czasu.

7.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Oblicz prawdopodobieństwo znalezienia cząstki z powyższego przykładu w przedziale od 0 do $L / 4$.

Mechanika kwantowa prowadzi do zaskakujących wniosków. Jednak w 1920 roku **Niels Bohr (1885–1962)** (założyciel Instytutu Nielsa Bohra w Kopenhadze, od którego pochodzi określenie „interpretacja kopenhaska”) zapewnił, że przewidywania mechaniki kwantowej i klasycznej muszą się zgadzać w przypadku układów makroskopowych, jak planety, piłki, krzesła czy sprężyny. Ta **zasada korespondencji** (ang. **correspondence principle**) jest dziś ogólnie akceptowana. Zakłada ona, że reguły mechaniki klasycznej są przybliżeniem reguł mechaniki kwantowej dla układów o dużych energiach i o dużej skali (liczba cząstek dąży do nieskończoności). Mechanika kwantowa dotyczy zarówno systemów mikro-, jak i makroskopowych, natomiast mechanika klasyczna jedynie systemów makroskopowych. Należy zaznaczyć, że za pomocą mechaniki kwantowej jesteśmy w stanie opisać w praktyce tylko małe systemy fizyczne, jak atomy czy cząstki. Większe systemy fizyczne wymagają zazwyczaj zbyt skomplikowanych równań i być może dopiero w przyszłości uda się je zgłębić dzięki mechanice kwantowej.

7.2 | Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- jakie jest znaczenie nieoznaczoności pędu i położenia w mechanice kwantowej;
- jakie jest źródło zasady nieoznaczoności w mechanice kwantowej;
- jakie jest znaczenie nieoznaczoności energii i czasu oraz uogólnienia zasady nieoznaczoności.

Zasada nieoznaczoności Heisenberga (ang. **Heisenberg’s uncertainty principle**) występuje w mechanice kwantowej. Z historycznego punktu widzenia analogiczne zasady występują w klasycznej teorii fal, gdzie niemożliwe jest określenie z pełną dokładnością położenia i prędkości rozchodzącej się fali. Możemy też odnieść się do fizyki klasycznej: w sytuacji, gdy nie da się dokładnie określić położenia i pędu satelity orbitującego wokół dużego ciała, np. Ziemi. Fotografując z użyciem lampy błyskowej w pewnych przedziałach czasu bądź używając radaru, zaburzamy wektor pędu satelity. Dzieje się tak, gdyż podczas fotografowania czy korzystania z radaru używamy źródła fotonów mających pewien pęd, który jest częściowo absorbowany, a częściowo odbijany przez orbitującego satelitę (jego powierzchnię), co bardzo nieznacznie zmienia wektor jego pędu. Zdobywając informację o położeniu, w pewnym stopniu tracimy informację o pędzie. Aby zyskać informację o układzie, musimy wejść z nim w pewne oddziaływanie, co oznacza, że stan tego układu zostaje zaburzony. Z reguły, oddziałując na układ, wprowadzamy do niego niewielkie zaburzenie,

perturbacyjnie związane z oddziaływaniem tego układu z urządzeniem pomiarowym. W mechanice kwantowej istnieją pojęcia słabego i mocnego pomiaru. Zanim dokonamy pomiaru, układ kwantowo-mechaniczny jest w superpozycji kilku stanów. Dokonanie pomiaru redukuje (zmienia) zazwyczaj układ do superpozycji mniejszej ich liczby lub nawet ogranicza do jednego stanu. Zmiany te są nieodwracalne. Odnieśmy się teraz do przykładu elektronu poruszającego się w próżni po linii prostej. Taki układ przedstawialiśmy w poprzednim podrozdziale. Postarajmy się tutaj sformułować zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Ogólnie głosi ona, że im więcej wiemy o położeniu cząstki (niepewność pomiaru położenia dąży do zera), to tym mniej wiemy o jej pędzie (niepewność pomiaru pędu może być dowolnie duża) i vice versa. Zasada nieoznaczoności istnieje też dla innych wielkości fizycznych, takich jak energia i czas. Można powiedzieć, że zachodzi ona dla dwóch nieprzemiennych (niekomutujących) zmiennych fizycznych a i b (np. położenia i pędu), dla których operatory reprezentujące te zmienne (np. macierze kwadratowe A i B) nie są przemienne, tzn. iloczyn macierzy A i B nie jest równy iloczynowi B i A ($AB \neq BA$). Oczywiście z matematyki zasadniczo wiemy, że iloczyn macierzy A i B nie jest wyrażeniem równym B i A. Warto tutaj zaznaczyć, że macierze A i B (odpowiadające dwóm mierzonym wielkościom fizycznym) są hermitowskie, tzn. że $A_{ij} = A^*_{ji}$. Symbole i oraz j stanowią indeksy elementów macierzy, będące liczbami naturalnymi, podczas gdy same elementy macierzy, czyli A_{ij} i B_{ij}, są liczbami zespolonymi.

Najpopularniejsze postaci zasady nieoznaczoności Heisenberga znane w literaturze to zasada nieoznaczoności pędu i położenia oraz zasada nieoznaczoności energii i czasu. Obie będziemy omawiać oddzielnie, choć ich źródło leży w podstawach mechaniki kwantowej i jest związane z nieprzemiennością obserwabli (wielkości fizycznych) reprezentowanych przez operatory.

Pęd i położenie

Aby zobrazować zasadę nieoznaczoności pędu i położenia, rozważmy cząstkę swobodną poruszającą się wzdłuż osi x. Cząstka ta przemieszcza się ze stałą prędkością v i pędem $p = mv$. Według hipotezy de Broglie'a $p = \hbar k$, a $E = \hbar\omega$. Jak zostało to wyprowadzone w poprzednim podrozdziale, funkcja falowa tej cząstki jest dana wzorem

$$\Psi(x, t) = A\left[\cos(\omega t - kx) - i\sin(\omega t - kx)\right] = Ae^{-i(\omega t - kx)} = Ae^{-i\omega t}e^{ikx}, \tag{7.18}$$

a gęstość prawdopodobieństwa $|\Psi(x, t)|^2 = A^2$ jest jednorodna, czyli niezależna od położenia w przestrzeni, i niezależna od czasu. Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki jest takie samo wzdłuż całej osi x, ale cząstka ma określoną liczbę falową, wyrażoną długością fali, a co za tym idzie pęd. Niepewność położenia jest dowolnie duża, bo cząstka może mieć dowolną wartość x (nawet nieskończoną), a niepewność określenia pędu wynosi zero (gdyż założyliśmy, że znamy wektor falowy k), co oznacza, że wiemy, jaki pęd ma cząstka (jest wyrażony przez k), ale nie mamy danych na temat jej położenia. Sytuacja ta to jedna z możliwości dopuszczalnych przez zasadę nieoznaczoności Heisenberga.

Podobne spostrzeżenia mogą dotyczyć zlokalizowanej cząstki. W teorii kwantowej, będącej konsekwencją rozwiązań równania Schrödingera (liniowego równania różniczkowego, cząstkowego lub zwyczajnego), cząstka zlokalizowana jest cząstką opisywaną za pomocą liniowej superpozycji fal opisujących cząstkę swobodną. Warto tutaj zauważyć, że dwie fale biegnące w przeciwnych kierunkach mogą tworzyć falę stojącą. Przykłady fal stojących znamy chociażby z rezonatora. Zbiór fal biegnących w jedną stronę i będących rozwiązaniem równania Schrödingera nazywamy **paczką falową** (ang. **wave packet**). Przykład paczki falowej pokazuje Rysunek 7.10. Mogą ją charakteryzować różne długości falowe, a co za tym idzie różne pędy. Taką cząstkę wyróżnia także wiele wartości położenia, chociaż związana jest z przedziałem Δx. Cząstka może być lepiej zlokalizowana (niepewność Δx może być mniejsza), jeśli zwiększymy Δp. Jest to zgodne z zasadą nieoznaczoności Heisenberga.

Zasada nieoznaczoności Heisenberga

Wprowadźmy definicję nieoznaczoności położenia Δx i nieoznaczoności pędu Δp. Musimy zdać sobie sprawę z tego, że w mechanice kwantowej dana wielkość fizyczna podlega rozkładowi statystycznemu i jest zmienną losową. Odchylenie standardowe zmiennej losowej jest właściwością badanego zjawiska. Daje się ono obliczyć na podstawie ścisłych informacji o rozkładzie zmiennej losowej, jaką jest np. położenie elektronu w przestrzeni, oznaczane przez x. Odchylenie standardowe zmiennej losowej x jest zdefiniowane jako

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}, \tag{7.19}$$

a odchylenie standardowe zmiennej losowej p definiujemy jako

$$\Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2}. \tag{7.20}$$

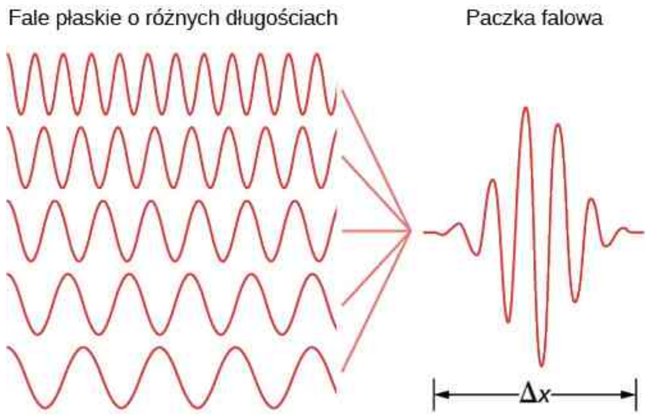
Tutaj $\langle x^2 \rangle$ i $\langle x \rangle$ to odpowiednio wartości średnie zmiennej x^2 i x. Podobnie $\langle p^2 \rangle$ i $\langle p \rangle$ to odpowiednio wartości średnie zmiennej p^2 i p. Sformułowawszy defincje Δx i Δp, przechodzimy do sformułowania zasady nieoznaczoności dla położenia i pędu. Wyraża się ona przez nierówność

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \tag{7.21}$$

Zatem iloczyn niepewności pomiaru położenia cząstki i pomiaru położenia pędu nie może być mniejszy niż połowa zredukowanej stałej Plancka $\hbar$. Ta zależność opisuje zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Nakłada ona ograniczenie na to, ile możemy się dowiedzieć o danej cząstce podczas jednoczesnego pomiaru jej pędu i położenia. Jeżeli niepewność Δx jest duża, wówczas Δp jest mała i vice versa. Heisenberg w swojej oryginalnej pracy stwierdził, że zazwyczaj wartość iloczynu niepewności położenia i prędkości jest większa niż wartość określona przez dolną granicę podanej nierówności.

Warto tutaj zauważyć, że obserwable x i p_x nie komutują, tzn. nie są przemienne. Aby to uogólnić, definiujemy komutator zmienny x i p_x jako $[x, p_x] = xp_x - p_x x$. Mechanika kwantowa zakłada, że $[x, p_x] = i\hbar$, gdzie i to symbol urojony.

Podobną zasadę nieoznaczoności można wprowadzić dla dwóch dowolnych niekomutujących zmiennych. Wynika ona z postulatów mechaniki kwantowej (obserwabli odpowiada operator) i jednoczesnej niewspółmierzalności dwóch zmiennych.



Rysunek 7.10 Dodanie do siebie kilku fal o różnych długościach może spowodować powstanie fali zlokalizowanej.

Zauważmy, że zasada nieoznaczoności nie odnosi się bezpośrednio do dokładności urządzeń, za pomocą których dokonujemy pomiarów. Nawet w przypadku mierników idealnych zasada nieoznaczoności funkcjonuje bez zmian, ponieważ ma ona swoje źródło w falowej naturze materii, reprezentowanej przez mechanikę kwantową. Dokładna wartość iloczynu $\Delta x \Delta p$ zależy od funkcji falowej. Co ciekawe, w sytuacji, gdy funkcja falowa jest funkcją Gaussa, iloczyn $\Delta x \Delta p$ osiąga wartość minimalną, która wynosi $\Delta x \Delta p = \hbar / 2$.

Przykład 7.5

Zasada nieoznaczoności – duże i małe wartości

Określmy minimalną wartość niepewności położenia następujących ciał, jeżeli wiemy, że ich prędkości były zmierzone z dokładnością do $10^{-3}\ \mathrm{m/s}$:

a. elektronu;
b. kuli do kręgli o masie $6\ \mathrm{kg}$.

Strategia rozwiązania

Znając niepewność prędkości $\Delta v = 10^{-3}\ \mathrm{m/s}$, musimy najpierw obliczyć niepewność pędu $\Delta p = m\Delta v$, a następnie przekształcić Równanie 7.21, aby obliczyć szukaną niepewność położenia $\Delta x = \hbar / (2\Delta p)$.

Rozwiązanie

a. W przypadku elektronu

$$\Delta p = m\Delta v = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 10^{-3}\,\text{m} / \text{s} = 9{,}1 \cdot 10^{-34}\,\text{kg}\,\text{m} / \text{s},$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p} = 5{,}8\,\text{cm}\,.$$

b. W przypadku kuli do kręgli

$$\Delta p = m\Delta v = 6\,\text{kg} \cdot 10^{-3}\,\text{m} / \text{s} = 6 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}\,\text{m} / \text{s},$$

$$\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p} = 8{,}8 \cdot 10^{-33}\,\text{m}.$$

Znaczenie

W przeciwieństwie do elektronu niepewność położenia kuli do kręgli jest niezmiernie mała. Dzieje się tak ze względu na bardzo małą wartość stałej Plancka. Ograniczenia nakładane przez zasadę nieoznaczoności nie są więc zauważalne w przypadku układów makroskopowych, takich jak kula do kręgli.

Przykład 7.6

Zasada nieoznaczoności i atom wodoru

Oszacujmy energię stanu podstawowego atomu wodoru, wykorzystując zasadę nieoznaczoności Heisenberga. Wskazówka: Za rozmiar wodoru przyjmiemy $0{,}1\,\text{nm}$.

Strategia rozwiązania

Cząstka umieszczona w jednowymiarowym pudełku o długości $L = 0{,}1\,\text{nm}$ jest dobrym modelem elektronu związanego z atomem wodoru. Funkcja falowa stanu podstawowego tego układu jest falą połówkową, jak ta w Przykładzie 7.1. Jest to największa fala, jaka może się zmieścić w pudełku. Funkcja ta odpowiada stanowi o najniższej energii. Zauważmy, że ma ona kształt zbliżony do krzywej Gaussa (funkcji dzwonowej). Średnią energię E cząstki opisanej taką funkcją możemy przyjąć za dobre przybliżenie energii stanu podstawowego (E_0). Średnia energia cząstki jest związana z kwadratem średniego pędu, który z kolei łączymy z niepewnością pędu.

Rozwiązanie

Aby rozwiązać to zagadnienie, musimy dokładnie określić, co oznaczają niepewność położenia i niepewność pędu. Możemy przyrównać niepewność położenia (Δx) do odchylenia standardowego położenia (σ_x), a niepewność pędu (Δp) do odchylenia standardowego pędu (σ_p). Dla funkcji Gaussa iloczyn niepewności wynosi

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2},$$

gdzie

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 \text{ oraz } \sigma_p^2 = \overline{p^2} - \overline{p}^2\,.$$

Cząstka z równym prawdopodobieństwem może poruszać się w lewo i w prawo, a więc $\overline{p} = 0$ (p to tutaj składowa x pędu, wobec czego $p_x = p$). Co więcej, niepewność położenia jest porównywalna z rozmiarami pudełka, więc $\sigma_x = L$. Szacowana wartość energii stanu podstawowego wynosi zatem

$$E_0 = E_{\text{Gaussian}} = \frac{\overline{p^2}}{m} = \frac{\sigma_p^2}{2m} = \frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\hbar}{2\sigma_x}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{8mL^2}.$$

Mnożąc uzyskany wynik przez c^2, otrzymujemy

$$E_0 = \frac{(\hbar c)^2}{8mc^2L^2} = \frac{(197{,}3\,\text{eV nm})^2}{8\cdot 0{,}511\cdot 10^6\,\text{eV}\cdot(0{,}1\,\text{nm})^2} = 0{,}952\,\text{eV} \approx 1\,\text{eV}\,.$$

Znaczenie

Bazując na przyjętym rozmiarze atomu wodoru i zasadzie nieoznaczoności, można stwierdzić, że energia stanu podstawowego wodoru jest rzędu jedności eV. Energia jonizacji elektronu w stanie podstawowym wynosi ok. $10\,\text{eV}$, a więc nasze szacunki możemy uznać za poprawne (zauważ, że iloczyn $\hbar c$ jest bardzo użyteczny w obliczeniach z zakresu mechaniki kwantowej).

Energia i czas

Druga **zasada nieoznaczoności** Heisenberga (ang. **energy-time uncertainty principle**) dotyczy niepewności jednoczesnego pomiaru energii stanu kwantowego i czasu jego życia

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}, \tag{7.22}$$

gdzie ΔE jest niepewnością pomiaru energii (ΔE – odchylenie standardowe przy pomiarze energii), a Δt – analogicznie – niepewnością pomiaru czasu (Δt – odchylenie standardowe w pomiarze czasu). Ogólne znaczenie tej zasady przypomina relację pędu i położenia. Cząstka w pewnym stanie kwantowym i o krótkim czasie życia nie może mieć dokładnie określonej wartości energii. Dzieje się tak, ponieważ częstotliwość danego stanu jest odwrotnie proporcjonalna do czasu, a energia stanu kwantowego zależy bezpośrednio od częstotliwości, przez co, aby dokładnie zmierzyć energię danego stanu, niezbędna jest obserwacja wielu cykli cząstki.

Aby zobrazować to zagadnienie, rozważmy stany wzbudzone pewnego atomu. Skończony czas istnienia tych stanów może być oszacowany na podstawie linii spektralnych promieniowania atomów. Za każdym razem, gdy stan wzbudzony ulega rozpadowi, rejestrowana energia emitowana z atomu trochę się zmienia. Analizując statystycznie te zmiany, możemy przyporządkować energię i częstości pewnym charakterystycznym szerokościom spektralnym. Średnia energia emitowanego fotonu odpowiada teoretycznej wartości energii stanu wzbudzonego i dostarcza informacji o pozycji piku na widmie. Stany o krótkim czasie istnienia mają duże szerokości widmowe, a te o dłuższym czasie życia – mniejsze.

Przykład 7.7

Przejścia atomowe

Atom znajduje się w stanie wzbudzonym średnio przez $\Delta t = 10^{-8}\,\text{s}$. Oszacujmy niepewność $\Delta\nu$ częstotliwości emitowanych fotonów, gdy atom przechodzi ze stanu wzbudzonego w stan podstawowy z jednoczesną emisją fotonu ze średnią częstotliwością $\nu = 7{,}1\cdot 10^{14}\,\text{Hz}$. Czy emitowana fala jest monochromatyczna?

Strategia rozwiązania

Przekształcamy Równanie 7.22, aby otrzymać wyrażenie na niepewność energii $\Delta E \approx \hbar\,/\,(2\Delta t)$, a następnie łączymy ze wzorem na energię fotonu $E_\text{f} = h\nu$, aby otrzymać $\Delta\nu$. W celu określenia, czy fala będzie monochromatyczna, musimy obliczyć $\Delta\nu\,/\,\nu$.

Rozwiązanie

Zakres energii fotonu wynosi $\Delta E_\text{f} = h\Delta\nu$. A zatem

$$\Delta E_\text{f} \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow h\Delta\nu \approx \frac{\hbar}{2\Delta t} \Rightarrow \Delta\nu \approx \frac{1}{4\pi\Delta t} = \frac{1}{4\pi\cdot 10^{-8}\,\text{s}} = 8\cdot 10^6\,\text{Hz}\,,$$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu} = \frac{8 \cdot 10^6\ \text{Hz}}{7{,}1 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}} = 1{,}1 \cdot 10^{-8}.$$

Znaczenie

Ponieważ emitowane fotony są zgodne co do $1{,}1 \cdot 10^{-8}$ części średniej częstotliwości, emitowane promieniowanie będzie można uznać za monochromatyczne.

7.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Atom sodu przechodzi z pierwszego stanu wzbudzonego do stanu podstawowego, emitując foton o długości fali 589 nm i energii $2{,}105\ \text{eV}$. Wiedząc, że czas, jaki atom spędza w stanie wzbudzonym, wynosi $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ s, określ, jaka jest niepewność energii w tym stanie.

7.3 | Równanie Schrödingera

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, jaką rolę w mechanice kwantowej odgrywa równanie Schrödingera;
- wyjaśniać różnicę między równaniem Schrödingera zależnym i niezależnym od czasu;
- interpretować rozwiązania równania Schrödingera.

W tym podrozdziale postaramy się opisać kompletną i sformalizowaną teorię mechaniki kwantowej. Uczyniliśmy to już częściowo w podrozdziale Funkcje falowe, w ramach ogólnego wprowadzenia do zagadnienia. W poprzednich dwóch podrozdziałach omówiliśmy, w jaki sposób w mechanice kwantowej powstało pojęcie funkcji falowej i jakich założeń wymagało, jak możemy wykorzystać funkcję falową i zasadę nieoznaczoności Heisenberga występującą w mechanice kwantowej. Raz jeszcze przywołajmy klasyczną teorię falową światła. W przypadku fali świetlnej pole elektryczne $E\,(x, t)$ spełnia następujące równanie

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}, \tag{7.23}$$

gdzie c jest prędkością światła, a symbol ∂ przedstawia pochodną cząstkową (przypomnienie z Drgania (https://cnx.org/content/m65825/latest/) – pochodna cząstkowa jest ściśle związana z normalną pochodną, ale dotyczy funkcji o więcej niż jednej zmiennej; gdy różniczkujemy po jednej zmiennej, pozostałe traktowane są jako stałe). Na falę światła składa się bardzo duża liczba fotonów, a więc wielkość $|E\,(x, t)|^2$ może być interpretowana jako prawdopodobieństwo znalezienia pojedynczego fotonu w konkretnym miejscu (np. na ekranie projektora).

Istnieje wiele rozwiązań tego równania. Jednym szczególnie ważnym jest

$$E\,(x, t) = A \sin\,(kx - \omega t), \tag{7.24}$$

gdzie A jest amplitudą natężenia pola elektrycznego, k liczbą falową, a ω to częstość kątowa. Łącząc to równanie z Równaniem 7.23, otrzymujemy

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}. \tag{7.25}$$

Według równań de Broglie'a $p = \hbar k$ i $E_\text{f} = \hbar\omega$, gdzie E_f to energia fotonu, p to jego pęd, a k to jego wektor falowy (długość). Podstawiając te zależności do Równania 7.25, uzyskujemy

$$p = \frac{E_\text{f}}{c}, \tag{7.26}$$

czyli energia fotonu E_f jest proporcjonalna do jego pędu p

$$E_{\mathrm{f}} = pc. \tag{7.27}$$

A zatem, biorąc pod uwagę zależność między energią a pędem ustaloną przez Einsteina (m68240 (https://cnx.org/content/m68240/1.4/#fs-id1167794292182)), Równanie 7.23 opisuje cząstkę o zerowej masie spoczynkowej. To zgadza się z naszą wiedzą o fotonach.

Kierunek przeprowadzanej analizy myślowej może być odwrócony. Możemy np. zacząć od postulowania zależności między energią a pędem i dopiero zastanowić się, jakie równanie fali do niej pasuje. Równanie opisujące zależność energia–pęd cząstki nierelatywistycznej w jednym wymiarze zapisuje się jako

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x, t), \tag{7.28}$$

gdzie p odpowiada pędowi, m jest masą, V to energia potencjalna cząstki, a H to hamiltonian, czyli suma energii kinetycznej i potencjalnej (niekiedy oznaczana jako E). W przedstawionym równaniu występujące wielkości są skalarami. Możemy jednak postulować, by V, p i H były operatorami działającymi na jakiś stan będący funkcją falową. Wówczas każdy z operatorów generowałby swoją wartość własną razy dany stan kwantowy, czyli razy kwantowomechaniczną funkcję falową. Równanie funkcji falowej pasującej do tej operatorowej zależności jest niezwykle ważne w mechanice kwantowej i nazywane **równaniem Schrödingera zależnym od czasu** (ang. **Schrödinger's time-dependent equation**). Równanie Schrödingera zależne od czasu to równanie opisujące energię i pęd funkcji falowej. Jest ono znane jako ogólne równanie Schrödingera.

Równanie Schrödingera zależne od czasu

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \Psi(x, t)}{\mathrm{d}x^2} + V(x, t)\, \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\mathrm{d}\Psi(x, t)}{\mathrm{d}t}, \tag{7.29}$$

gdzie $i\hbar \cdot \mathrm{d}/\mathrm{d}t$ to operator reprezentujący cały hamiltonian $H(t)$, a operator $-\hbar^2 / (2m) \left(\mathrm{d}^2 / \mathrm{d}x^2\right)$ reprezentuje energię kinetyczną, natomiast $V(x, t)$ energię potencjalną i jest w istocie mnożeniem przez liczbę rzeczywistą $V(x, t)$. Równanie 7.29 daje dwa równania na stany własne, które można zapisać jako

$$i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi(x, t) = H(t)\, \Psi(x, t) \tag{7.30}$$

oraz

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x, t)\right] \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Psi(x, t). \tag{7.31}$$

Te równania to równanie Schrödingera zapisane w dwóch równoważnych postaciach i zależne od czasu. W szczególności Równanie 7.31 daje się zazwyczaj rozwiązać analitycznie przez separację zmiennych x i t, tzn. jawnie zakładamy, że $\Psi(x, t) = \psi_1(x, t_1) f(t_1, t)$, a zatem oddzielamy ewolucję układu kwantowego w czasie od położenia. Jest to możliwe, gdy H nie zależy od x. Stosując to założenie, otrzymujemy rozwiązanie w postaci iloczynu funkcji zależnej od położenia, stałej (i zależnej od chwili początkowej), i funkcji zależnej od czasu. Jest to wyrażone następująco

$$\Psi(x, t) = \psi_1(x) f(t_1, t) = \psi_1(x, t_1) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t} H(t')\, \mathrm{d}t'\right]. \tag{7.32}$$

Ustaliwszy t_1 (chwilę początkową), rozpoznajemy funkcję $f(t_1, t)$ jako będącą ewolucją fazy z czasem w równaniu Schrödingera i otrzymujemy funkcję falową w chwili późniejszej t. Wraz z upływem czasu $t - t_1$ faza funkcji falowej zmienia się o czynnik $f(t_1, t)$, wyrażony jako

$$f(t_1, t) = f(t - t_1) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_2}^{t} H(t')\, \mathrm{d}t'\right]. \tag{7.33}$$

Funkcja $f\left(t-t_1\right)$ to operator ewolucji funkcji falowej w czasie od chwili t_1 do chwili t. Mnoży się wówczas funkcję falową z chwili t_1 przez $f\left(t-t_1\right)$ i uzyskuje funkcję falową w nowej chwili: $H\left(t\right)=H=E=\text{const}$, czyli nie zależy od czasu. Wtedy

$$f\left(t_1,t\right)=f\left(t-t_1\right)=\exp\left[-\frac{i}{\hbar}E\left(t-t_1\right)\right]. \tag{7.34}$$

W przypadku, gdy energia potencjalna $V\left(x,t\right)=V\left(x\right)$ jest niezależna od czasu, otrzymujemy niezależne od czasu równanie Schrödingera – wówczas $H\left(t\right)=H=E=\text{const}$ (nie zależy od czasu) i zachodzi równanie

$$\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V\left(x\right)\psi\left(x\right)=E\psi\left(x\right). \tag{7.35}$$

Jak wiadomo z analiz właściwych fizyce klasycznej, obecność energii potencjalnej zależnej w czasie i przestrzeni $V\left(x,t\right)$ wywołuje zależne od czasu i położenia siły działające na daną cząstkę klasyczną. Uwzględnia to w szczególności formalizm hamiltonowski, istotny przy formułowaniu mechaniki kwantowej. Jak opisane zostało w Energia potencjalna i zasada zachowania energii (https://cnx.org/content/m65775/latest/) , siła $F_x=F$ działająca na cząstkę w jednym wymiarze x jest opisywana przez następujące równanie

$$F=-\frac{\mathrm{d}V\left(x,t\right)}{\mathrm{d}x}. \tag{7.36}$$

Równanie 7.31 odgrywa w mechanice kwantowej rolę podobną do drugiej zasady dynamiki Newtona w mechanice klasycznej. Gdy określimy energię potencjalną cząstki lub, równie dobrze, gdy określimy siłę działającą na cząstkę, możemy sformułować równanie różniczkowe. Rozwiązanie tego równania różniczkowego w jednym wymiarze jest funkcją $x\left(t\right)$, która określa położenie ciała w danym czasie t. Rozwiązanie równania Schrödingera zależnego od czasu daje narzędzie – funkcję falową, która może być wykorzystana do określenia, gdzie cząstka może się znajdować w danym czasie. Nasze rozważania mogą być rozszerzone do dwóch czy trzech wymiarów. Wtedy zamiast potencjału $V\left(x,t\right)$ występuje potencjał V zależny od x, y i z w postaci $V\left(x,y,z,t\right)$ oraz operator $-\hbar^2/\left(2m\right)\left(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2\right)$, zastąpiony przez operator

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\right) \tag{7.37}$$

w przypadku trójwymiarowym. W dwóch wymiarach przestrzennych pomijamy współrzędną z i występuje tylko $V\left(x,y,t\right)$ oraz

$$-\left(\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\right). \tag{7.38}$$

Zazwyczaj łatwo jest otrzymać rozwiązania w jednym wymiarze, trudniej jest takie rozwiązanie uzyskać dla dwóch, a najtrudniej dla trzech czy N wymiarów.

Rozważmy szczególny przypadek cząstki swobodnej. Cząstka taka nie odczuwa działania żadnej siły w żadnym z trzech kierunków. Dla jednego rozważanego wymiaru mamy $F=0\,\mathrm{N}$. Biorąc pod uwagę Równanie 7.36, musimy uwzględnić

$$V\left(x,t\right)=V_0=\text{const}. \tag{7.39}$$

Dla ułatwienia ustalmy $V_0=0$. Wtedy równanie Schrödingera upraszcza się do postaci

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\Psi\left(x,t\right)}{\mathrm{d}x^2}=i\hbar\frac{\mathrm{d}\Psi\left(x,t\right)}{\mathrm{d}t}. \tag{7.40}$$

Rozwiązaniem tego równania będzie

$$\Psi\left(x,t\right)=Ae^{i\left(kx-\omega t\right)}. \tag{7.41}$$

Nie jest zaskakujące, że rozwiązanie zawiera liczbę urojoną ($i=\sqrt{-1}$), ponieważ samo równanie różniczkowe posiada część urojoną. Jednak, na co zwróciliśmy uwagę wcześniej, mechanika kwantowa opiera swoje przewidywa-

nia wyłącznie na $|\Psi(x,t)|^2$, które daje tylko rzeczywiste wartości. Zauważmy, że rzeczywiste rozwiązania dotyczące fal płaskich, $\Psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t)$ i $\Psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$, nie spełniają równania Schrödingera, ale rozwiązanie postaci

$$\Psi(x,t) = A\sin(kx - \omega t) + Ai\cos(kx - \omega t) = A\exp\left[i\left(kx - \omega t + \frac{3\pi}{2}\right)\right] \tag{7.42}$$

spełnia to równanie.

Istnienie części urojonej funkcji falowej uniemożliwia kuszącą perspektywę dotknięcia czy nawet zobaczenia jej w naturze. W teorii mechaniki kwantowej Schrödingera funkcja falowa jest jedynie narzędziem wykorzystywanym w obliczeniach.

Jeżeli energia potencjalna (V) nie zależy od czasu, to zależność

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}, \tag{7.43}$$

gdzie $\psi(x)$ jest funkcją niezależną od czasu, a $e^{-i\omega t}$ funkcją niezależną od położenia, spełnia równanie Schrödingera. Innymi słowy, funkcję falową można podzielić na dwa człony – zależny jedynie od czasu i zależny od położenia. Czynnik $e^{-i\omega t}$ nazywamy **czynnikiem zależnym od czasu** (ang. **time-modulation factor**). Według de Broglie'a energia fali materii jest dana wzorem $E = \hbar\omega$, gdzie E to energia całkowita. A zatem powyższe równanie może być również zapisane jako

$$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-iEt/\hbar}. \tag{7.44}$$

Każda kombinacja liniowa tych stanów (stan rozmyty energii lub pędu) jest rozwiązaniem powyższego równania. Stany takie mogą np. opisywać cząstkę zlokalizowaną (patrz Rysunek 7.10), której gęstość prawdopodobieństwa jest skupiona wokół jakiegoś punktu przestrzeni. Odpowiada ona intuicji klasycznej. Cząstka niezlokalizowana i rozproszona po całej przestrzeni lub posiadająca lokalizację w kilku miejscach w przestrzeni (kilka lokalnych maksimów) nie odpowiada tej intuicji, ale jest rozwiązaniem równania Schrödingera. Można to porównać do sytuacji, gdy dany człowiek siedzi na kilku oddalonych od siebie krzesłach, o czym była mowa we wstępie. Taki przykład pokazuje, że mechanika kwantowa rzadko kieruje się intuicją stosowaną w fizyce klasycznej. Jednak w pewnych sytuacjach ta klasyczna intuicja także obowiązuje.

7.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Cząstka o masie m porusza się wzdłuż osi x w potencjale harmonicznym określonym funkcją $V(x) = m\omega^2x^2/2$ (przypadek kwantowy kulki o masie m na sprężynie, gdzie siła działająca na kulkę jest proporcjonalna do wielkości wychylenia od położenia równowagi). Obliczyć wartość średnia $\langle x\rangle$ dla n–tego poziomu energetycznego wyrażona całką od $-\infty$ do $+\infty$ względem x z wyrażenia $\psi_n^*(x)V(x)\psi_n(x)$, gdzie $\psi_n(x)$ to funkcja falowa n–tego poziomu energetycznego kwantowego oscylatora harmonicznego. Odpowiedź wyraź w zależności od n. Jakie jest spektrum energii oscylatora harmonicznego?

Łącząc Równanie 7.29 i Równanie 7.43, zależne od czasu równanie Schrödingera upraszcza się do

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x), \tag{7.45}$$

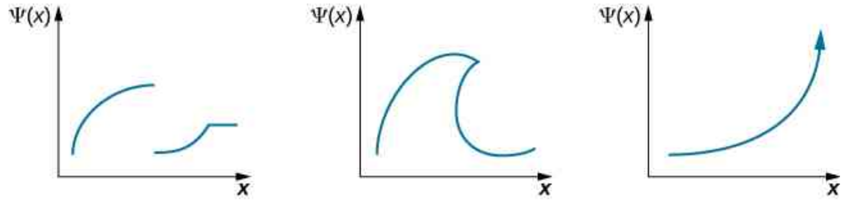
gdzie E jest energią całkowitą cząstki (liczba rzeczywista). Tę zależność nazwiemy **równaniem Schrödingera niezależnym od czasu** (ang. **Schrödinger's time-independent equation**). Zauważ, że stosujemy duże psi (Ψ) do oznaczenia funkcji falowej zależnej od czasu, a małe psi (ψ) do oznaczenia funkcji falowej niezależnej od czasu. Rozwiązanie tego równania musi być pomnożone przez czynnik zależny od czasu, aby można było uzyskać funkcję zależną od t.

W następnych podrozdziałach rozwiążemy niezależne równanie Schrödingera dla trzech przypadków: cząstki kwantowej w pudle potencjału, prostego oscylatora harmonicznego i bariery potencjału. Dzięki rozwiązaniu tych podstawowych przykładów powinieneś z łatwością podołać nawet trudniejszym zagadnieniom. Niezależne od czasu funkcje $\psi(x)$ muszą spełniać trzy warunki:

- $\psi(x)$ musi być funkcją ciągłą;
- pierwsza pochodna $\psi(x)$ po przestrzeni $\mathrm{d}\psi(x)/\mathrm{d}x$ musi być ciągła, co wynika z ciągłości prądu prawdo-podobieństwa;
- $\psi(x)$ nie może być rozbieżna (wybuchać) dla żadnego x.

Pierwszy warunek zapobiega nagłym skokom i dziurom w funkcji falowej oraz zapewnia ciągłość gęstości prawdopodobieństwa odnalezienia cząstki w przestrzeni w położeniu x. Drugi warunek gwarantuje, że funkcja jest gładka we wszystkich punktach oprócz szczególnych przypadków (w bardziej zaawansowanej mechanice kwantowej piki potencjału o nieskończonej głębokości lub wysokości są nazywane deltami Diraca i wykorzystywane np. do modelowania ciał stałych). Trzeci warunek zakłada normalizację funkcji falowej i zapewnia, że $|\psi(x)|^2$ jest skończoną liczbą, którą możemy wykorzystać do obliczeń prawdopodobieństwa. Przypadek gęstości prawdopodobieństwa wybuchającej do plus nieskończoności dla współrzędnej położenia x świadczyłby o tym, że nie mamy do czynienia z realną sytuacją fizyczną. Takie rozwiązania należy odrzucać.

7.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Wskaż, która z następujących funkcji falowych może być rozwiązaniem równania Schrödingera. Odpowiedź uzasadnij.



7.4 | Cząstka kwantowa w pudełku

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- w jaki sposób opisywać zagadnienie z wartościami granicznymi stacjonarnego równania Schrödingera;
- dlaczego energia cząstki kwantowej w pudełku przyjmuje dyskretne wartości;
- rozumieć znaczenie fizyczne stacjonarnego rozwiązania równania Schrödingera i jego powiązanie z zależnymi od czasu stanami kwantowymi;
- wyjaśniać fizyczne znaczenie zasady korespondencji Bohra.

W tym podrozdziale wykorzystamy równanie Schrödingera do opisu cząstki zamkniętej w jednowymiarowym pudełku. Ten szczególny przypadek uwzględnia stany związane i pozwala na zrozumienie bardziej skomplikowanych zagadnień. Energia cząstki jest skwantowana ze względu na pojawienie się stanu fali stojącej w rozwiązaniu równania Schrödingera dla cząstki w pudełku przy określonych warunkach brzegowych (ściany pudełka). Przypomina to sytuację fali stojącej dla pola elektromagnetycznego we wnęce rezonansowej (metalowym pudełku). W obydwu przypadkach wartość funkcji falowej równania Schrödingera pozwoli określić, czy pole elektryczne we wnęce musi znikać poza pudełkiem oraz wynosić zero na ściankach (pudełka lub wnęki) i czy jest niezerowe w pudełku.

Rozważmy cząstkę o masie m (np. elektron), która może się poruszać jedynie wzdłuż osi x, a jej ruch jest ograniczony do obszaru między ścianami znajdującymi się w $x = 0$ i $x = L$ (Rysunek 7.11). Pomiędzy ścianami cząstka porusza się swobodnie. Taki układ nazwiemy **nieskończoną studnią kwantową** (ang. **infinite square well**), opisaną przez funkcję potencjału

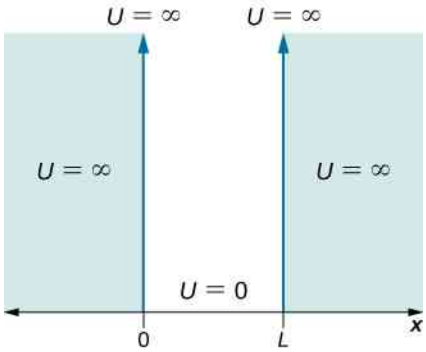
$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L, \\ \infty, & \text{w pozostałych przypadkach.} \end{cases} \tag{7.46}$$

Układ jest izolowany, a energia cząstki stała i niezmienna w czasie, a więc hamiltonian (suma energii kinetycznej i potencjalnej) jest stały w czasie. Łącząc tę zależność $V(x)$ z niezależnym od czasu równaniem Schrödingera, otrzymujemy

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x), \text{ dla } 0 \leq x \leq L. \tag{7.47}$$

Jakich rozwiązań się spodziewamy? Zasadniczo funkcja falowa może być zespolona. Dostrzegamy, że części rzeczywiste i urojone funkcji falowej spełniają powyższe równanie. Jest to równanie liniowego oscylatora harmonicznego i po lekturze poprzednich rozdziałów umiemy takie równania rozwiązywać. Będzie nim liniowa kombinacja funkcji sinus i cosinus z argumentem x mnożonym przez pewną stałą. Energia cząstki jest dodatnia, a więc jeżeli wartość funkcji falowej jest dodatnia (prawa strona równania), to jej druga pochodna jest ujemna (lewa strona równania).

Podobnie, jeżeli wartość funkcji jest ujemna, krzywizna będzie wówczas dodatnia, czyli funkcja będzie wypukła. Takie warunki spełnia oscylująca funkcja falowa, jak sinus czy cosinus. Ponieważ fale te są ograniczone przez rozmiary pudełka, spodziewamy się fal stojących, z końcami zamocowanymi w punktach $x = 0$ i $x = L$.



Rysunek 7.11 Funkcja potencjału, który zamyka cząstkę w jednowymiarowym pudełku.

Rozwiązania $\psi(x)$ tego równania można interpretować statystycznie. Kwadrat $|\psi(x)|^2$ odpowiada gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w pewnym miejscu x. Funkcja ta musi zostać scałkowana w celu obliczenia prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w pewnym przedziale przestrzennym (obszarze w dwóch i trzech wymiarach). Szukamy więc rozwiązania, które spełnia warunek normalizacji

$$\int_0^L dx|\psi(x)|^2 = 1. \tag{7.48}$$

Ściany są sztywne i nieprzepuszczalne, co oznacza, że cząstka nigdy nie znajdzie się poza nimi. Matematycznie oznacza to, że rozwiązanie musi zanikać na ścianach

$$\psi(0) = \psi(L) = 0. \tag{7.49}$$

Spodziewamy się rozwiązania w postaci oscylującej funkcji, tak więc najbardziej ogólnym rozwiązaniem tego równania harmonicznego jest

$$\psi_k(x) = A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx), \tag{7.50}$$

gdzie k jest stałą i niezależną od x liczbą rzeczywistą (wektorem falowym), a A_k i B_k są również stałe. Możemy to sprawdzić, obliczając

$$-\frac{\hbar^2}{2mE} \cdot \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2mE}\psi(x) = \psi(x), \tag{7.51}$$

co wyznacza relację

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2mE} = 1, \tag{7.52}$$

a zatem

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{7.53}$$

Stosując warunek brzegowy przedstawiony w Równaniu 7.49, otrzymamy

$$\psi_k(0) = A_k \cos(k \cdot 0) + B_k \sin(k \cdot 0) = A_k = 0. \tag{7.54}$$

Ponieważ dowiedliśmy, że $A_k = 0$, rozwiązanie ma postać

$$\psi_k(x) = B_k \sin(kx). \tag{7.55}$$

Jeżeli B_k równe jest zero, to $\psi_k(x) = 0$ dla wszystkich wartości x, a przez to warunek normalizacji (Równanie 7.48) nie jest spełniony. Założywszy, że $B_k \neq 0$, i po podstawieniu $x = L$ (z Równania 7.49), uzyskamy

$$0 = B_k \sin(kL) \Rightarrow \sin(kL) = 0 \Rightarrow kL = n\pi, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.56}$$

Odrzucamy $n = 0$, ponieważ $\psi(x)$ dla tej liczby kwantowej (liczby naturalnej parametryzującej k i energię cząstki) wynosiłoby zero dla każdego x i znów otrzymalibyśmy wynik, którego nie można znormalizować. Zatem otrzymujemy kwantyzację energii (w rzeczywistości dla energii kinetycznej, bo potencjalna wynosi $0\,\mathrm{J}$) cząstki w pudle potencjału

$$E = E_\mathrm{k} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \tag{7.57}$$

Ta kwantyzacja wektora falowego k_n czy energii E_n wynika z warunków brzegowych!

Według de Broglie'a $p = \hbar k$, a więc

$$\frac{\hbar^2}{2m} p_n^2 = E_n, \tag{7.58}$$

czyli pęd cząstki w pudełku też jest skwantowany.

To wyrażenie implikuje wniosek, że energia całkowita jest równa energii kinetycznej, co zgadza się z założeniem, że cząstka może się swobodnie poruszać. Łącząc rozwiązania Równania 7.56 i Równania 7.58, otrzymamy

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.59}$$

Co ciekawe, cząstka zamknięta w jednowymiarowym pudełku może przyjmować jedynie dyskretne (skwantowane) wartości. Co więcej, cząstka nie może mieć zerowej energii kinetycznej; oznacza to, że niemożliwe jest, żeby zamknięta w pudełku była w spoczynku. Stan związany zawsze posiada niezerową energię, czego nie musimy spotykać w fizyce klasycznej.

Aby oszacować dozwolone funkcje falowe, które odpowiadają tym energiom, należy określić stałą normalizacyjną B_n. Nakładamy warunek normalizacji na funkcję falową

$$\psi_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \tag{7.60}$$

$$1 = \int_0^L |\psi_n(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^L B_n^2 \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = B_n^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = B_n^2 \frac{L}{2} \Rightarrow B_n = \sqrt{\frac{2}{L}}.$$

Tak więc szukane funkcje falowe można zapisać jako

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.61)$$

Dla najmniejszej energii, czyli **energii stanu podstawowego** (ang. **ground state energy**), mamy

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right). \qquad (7.62)$$

Każdy inny stan energii może być zapisany jako

$$E_n = n^2 E_1, \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \qquad (7.63)$$

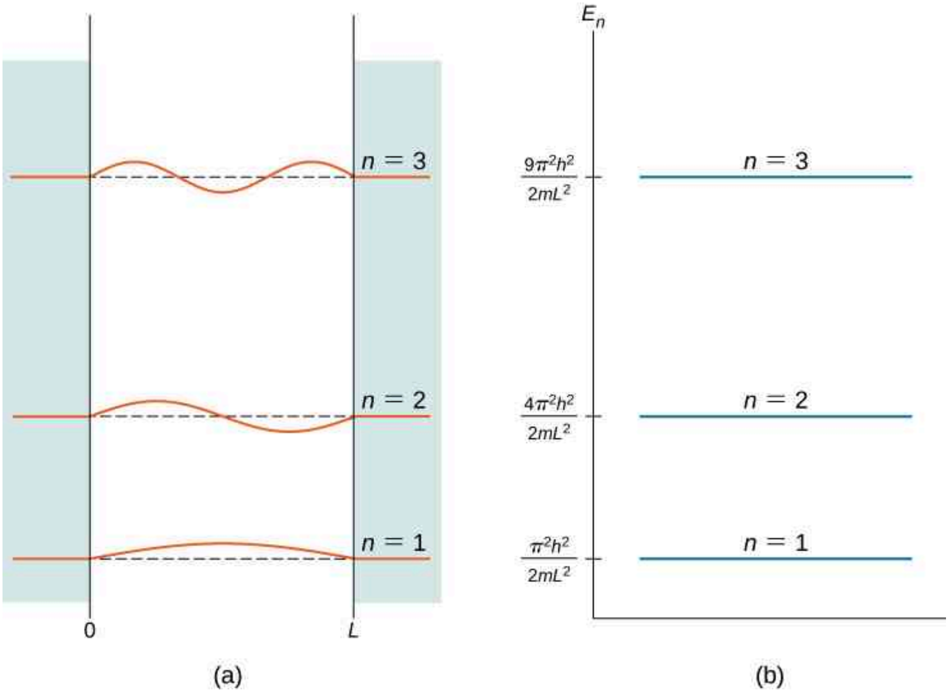
Indeks n nazywany jest **energetyczną** (ang. **energy quantum number**) lub **główną liczbą kwantową** (ang. **principal quantum number**). Stan o $n = 2$ nazwiemy pierwszym stanem wzbudzonym, stan o $n = 3$ to drugi stan wzbudzony itd. Pierwsze trzy stany kwantowe ($n = 1, 2, 3$) cząstki w pudełku przedstawione są na Rysunku 7.12.

Funkcje falowe przedstawione w Równaniu 7.63 są czasami nazywane „stanami o określonej energii”. O cząstkach znajdujących się w takich stanach kwantowych mówimy, że zajmują pewne **poziomy energetyczne** (ang. **energy levels**), które przedstawione są w formie poziomych linii na Rysunku 7.12. Poziomy energetyczne można opisać jako szczeble w drabinie, po której cząstki mogą się wspinać lub z której mogą spadać, zyskując lub tracąc energię w pewnych dyskretnych (skwantowanych) ilościach.

Funkcje falowe przedstawione w Równaniu 7.63 mogą być też nazywane **falami stojącymi** (ang. **standing wave state**). W sytuacji stałego w czasie efektywnego potencjału i efektywnego hamiltonianu w równaniu Schrödingera (sytuacji stacjonarnej) ich gęstość prawdopodobieństwa $|\psi(x, t)|^2$ również nie zmienia się w czasie. Wówczas wartość funkcji falowej oscyluje pomiędzy wartościami rzeczywistymi a urojonymi i jest opisana operatorem ewolucji w czasie. **Stany stacjonarne** (ang. **stationary state**) są stanami o określonej średniej energii i mogą powstawać jako liniowa superpozycja stanów o różnych energiach. Wówczas

$$E_n = n^2 E_1, \ \psi(x) = a(1)\psi_1(x) + a(2)\psi_2(x) + \ldots + a(n)\psi_n(x), \qquad (7.64)$$

gdzie $\psi_k(x)$ to funkcja falowa w k-tym stanie energetycznym (k wynosi od 1 do n) w przestrzeni położeń x i $|a(k)|^2$ to prawdopodobieństwo występowania stanu k-tego. Warunek normalizacji funkcji falowej ψ narzuca: $|a(1)|^2 + |a(2)|^2 + \ldots + |a(n)|^2 = 1$. Funkcje falowe $\psi_k(x)$ są ortonormalne, co oznacza, że $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_k^*(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x$ oraz iż w sytuacji k różnego od l zachodzi: $0 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l^*(x)\psi_k(x)\,\mathrm{d}x$.



Rysunek 7.12 Pierwsze trzy stany kwantowe cząstki w pudełku dla głównych liczb kwantowych $n = 1, 2, 3$: (a) fale stojące i (b) dozwolone stany energetyczne.

Kwantyzacja energii jest konsekwencją warunków brzegowych i to samo dotyczy wnęk rezonansowych w problemach elektromagnetycznych. Jeżeli mielibyśmy do czynienia z cząstką swobodną (nieograniczoną pudełkiem), dozwolone stany energetyczne miałyby charakter ciągły. Zatem funkcja falowa widzi ścianki pudełka i jest inna w momencie, gdy nie ma ścianek. Mówimy, że widmo energetyczne wartości własnych hamiltonianu cząstki swobodnej przyjmuje dyskretne wartości dodatnie w przypadku cząstki zamkniętej w pudle potencjału i wartości ciągłe dodatnie w przypadku cząstki swobodnej. Jednak w tym przypadku z pudełkiem mamy dostępne jedynie pewne energie (E_1 , $4E_1$, $9E_1$, …). Różnica energii sąsiednich poziomów energetycznych jest dana wzorem

$$\Delta E_{n+1,n} = E_{n+1} - E_n = (n+1)^2 E_1 - n^2 E_1 = (2n+1)E_1. \tag{7.65}$$

Zasada zachowania energii wymaga, aby w momencie, gdy zmienia się energia układu, różnica energii została przemieniona w inną jej formę. W szczególnym przypadku cząstki ograniczonej do pewnej małej objętości (jak atom) zmiany energii są często uwalniane w formie fotonów. Częstotliwości emitowanych fotonów dają nam informacje o różnicach energii (między poziomami) w układzie, a także o objętości (wymiarach) pudełka (patrz Równanie 7.62). Takim pudełkiem w ciele stałym bywają np. kropki kwantowe, które odgrywają dużą rolę w nanotechnologii.

Przykład 7.8

Prosty model jądra atomowego

Załóżmy, że proton zamknięty jest w pudełku o szerokości $L = 10^{-14}$ m (typowy promień jądra atomowego). Jakie są poziomy energetyczne stanu podstawowego i pierwszego stanu wzbudzonego? Jaką energię będzie miał foton emitowany podczas przejścia protonu z pierwszego poziomu wzbudzonego na poziom podstawowy?

Strategia rozwiązania

Jeżeli założymy, że proton zamknięty w jądrze atomowym może być modelowany jako cząstka kwantowa w pudełku, to jedyne, czego potrzebujemy do rozwiązania tego zagadnienia, to wykorzystać Równanie 7.59 do obliczenia energii E_1 i E_2 . Masa protonu wynosi $m = 1{,}76 \cdot 10^{-27}$ kg . Emitowany foton będzie miał energię równą różnicy $\Delta E = E_2 - E_1$. Do obliczenia jego częstotliwości możemy wykorzystać wzór $E_\mathrm{f} = hf$.

Rozwiązanie

Energia stanu podstawowego wynosi

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2 \left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(10^{-14}\,\mathrm{m}\right)^2} = 3{,}28 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J} = 2{,}05\,\mathrm{MeV}\,.$$

Energia pierwszego stanu wzbudzonego: $E_2 = 2^2 E_1 = 4 \cdot 2{,}05\,\mathrm{MeV} = 8{,}2\,\mathrm{MeV}$.
Energia emitowanego fotonu: $E_\mathrm{f} = \Delta E = E_2 - E_1 = 8{,}2\,\mathrm{MeV} - 2{,}05\,\mathrm{MeV} = 6{,}15\,\mathrm{MeV}$.
Częstotliwość emitowanego fotonu

$$\nu = \frac{E_\mathrm{f}}{h} = \frac{6{,}15\,\mathrm{MeV}}{4{,}14 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{MeV\,s}} = 1{,}49 \cdot 10^{21}\,\mathrm{Hz}\,.$$

Znaczenie

Otrzymana częstotliwość jest charakterystyczna dla promieniowania gamma emitowanego przez jądro atomowe. Energia tego fotonu jest 10 milionów razy większa od energii fotonu światła widzialnego.

Wartość oczekiwana położenia cząstki w pudełku jest dana wzorem

$$\langle x \rangle = \int_0^L \psi_n^* (x) x \psi_n (x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L x |\psi_n (x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^L x \frac{2}{L} \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = \frac{L}{2}. \tag{7.66}$$

Największe prawdopodobieństwo znalezienia cząstki istnieje w środku pudełka. Jest to przykład stanu zlokalizowanego.

Możemy też obliczyć wartość oczekiwaną pędu cząstki lub średni pęd dużej liczby cząstek w danym stanie (zauważmy, że w naszym przypadku $\psi_n^* (x) = \psi_n (x) = 2 / L \cdot \sin\left(n\pi x / L\right)$) i przy zastosowaniu całkowania przez części

$$\int_0^L f(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\, g(x)|_0^L - \int_0^L g(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{7.67}$$

otrzymać wyrażenie na średni pęd $\langle p \rangle$ w postaci

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_0^L \psi_n^* (x) \left[-i\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \psi_n (x)\right] \mathrm{d}x \\ &= -i\hbar \int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= -i\frac{2\hbar}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[\frac{n\pi}{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \mathrm{d}x \\ &= -i\frac{2n\pi\hbar}{L^2} \int_0^L \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \mathrm{d}x = -i\frac{n\pi\hbar}{L^2} \cdot \frac{L}{2n\pi} \int_0^{2\pi n} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -i\frac{\hbar}{2L} \cdot 0 = 0. \end{aligned} \tag{7.68}$$

A zatem w przypadku cząstki o określonej energii średnie położenie wypada pośrodku pudełka, a średni pęd ($\langle p \rangle$) wynosi zero – jak w przypadku cząstki klasycznej. Zauważmy, że chociaż energia minimalna cząstki klasycznej może wynosić zero, to minimum energii cząstki kwantowej jest niezerowe i równe energii stanu podstawowego. Energia cząstki w n–tym stanie kwantowym E_n wynosi

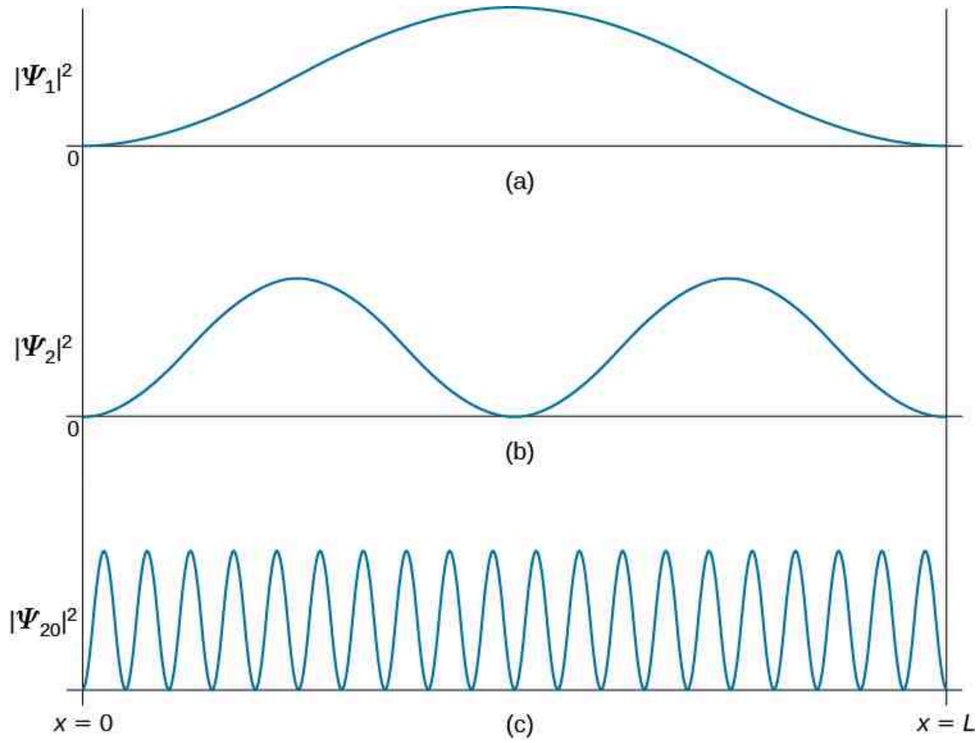
$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}. \tag{7.69}$$

Wynik dla $T = 0\,\mathrm{K}$ nie jest zaskakujący, ponieważ stan fali stojącej to stan o określonej energii i dla zera bezwzględnego możliwe jest jedynie $n = 1$, a wówczas $\langle E \rangle = E_1$. Pomiar stanu takiego układu zawsze daje ten sam wynik. Jednak w praktyce jest bez znaczenia, jak bardzo się zbliżamy do $T = 0\,\mathrm{K}$, ponieważ i tak $T > 0\,\mathrm{K}$. Wtedy n może być dowolnie duże, choć szansa zmierzenia cząstki o bardzo dużym n dla małej temperatury T jest niewielka. Jakikolwiek pomiar energii takiego układu musi dać wartość równą jednemu z dozwolonych poziomów energetycznych E_n. Ogólnie średnia energia układu wynosi $\langle E \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} p_n E_n$, gdzie p_n to prawdopodobieństwo obsadzenia stanu n, zależne od temperatury. W praktyce p_n szybko zanika wraz z dużymi n.

Nasza analiza zagadnienia cząstki w pudełku nie może być pełna bez omówienia zasady korespondencji Bohra. Mówi ona, że dla dużych liczb kwantowych prawa fizyki kwantowej muszą pozwalać na wyciągnięcie takich samych wniosków jak fizyka klasyczna. Aby zobrazować działanie tej zasady dla cząstki kwantowej w pudełku, musimy wykreślić rozkład gęstości prawdopodobieństwa

$$|\psi_n(x)|^2 = \frac{2}{L} \sin^2 \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{7.70}$$

znalezienia cząstki w stanie kwantowym ψ_n w pobliżu położenia x, pomiędzy ścianami pudełka. Rysunek 7.13 pokazuje te rozkłady dla stanu podstawowego, pierwszego stanu wzbudzonego i wysoce wzbudzonego stanu o bardzo dużej liczbie kwantowej. Możemy łatwo zauważyć, że gdy cząstka znajduje się w stanie podstawowym, najbardziej prawdopodobne jest znalezienie jej pośrodku pudełka, gdzie rozkład gęstości prawdopodobieństwa ma największą wartość. Inaczej dzieje się w przypadku pierwszego stanu wzbudzonego, ponieważ tam pośrodku pudełka gęstość prawdopodobieństwa wynosi zero, a więc nie ma szans na znalezienie cząstki w tym miejscu. Gdy cząstka znajduje się w pierwszym stanie wzbudzonym, rozkład prawdopodobieństwa ma dwa maksima i największe prawdopodobieństwo znalezienia jej istnieje właśnie w położeniach odpowiadających tym maksimom, co odbiega od praw fizyki klasycznej.



Rysunek 7.13 Rozkład gęstości prawdopodobieństwa $|\psi_n(x)|^2$ dla cząstki kwantowej w pudełku. (a) Stan podstawowy $n = 1$, (b) pierwszy stan wzbudzony $n = 2$ i (c) dziewiętnasty stan wzbudzony $n = 20$.

Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia klasycznej cząstki w przedziale od x do $x + \Delta x$ zależy od czasu Δt, jaki cząstka spędzi w tym przedziale. Zakładając, że jej prędkość v jest stała, czas ten wynosi $\Delta t = \Delta x / v$ i jest stały w całym przedziale. Gęstość prawdopodobieństwa znalezienia takiej cząstki jest więc jednakowa w całym przedziale, co oznacza, że nie istnieje preferowane miejsce znalezienia cząstki. Ten klasyczny punkt widzenia staje się bardzo

podobny do przypadku funkcji falowej o wysokiej liczbie kwantowej. Np. gdy cząstka kwantowa znajduje się na wysokim poziomie wzbudzenia, jak na rysunku Rysunku 7.13 (c), gęstość prawdopodobieństwa reprezentowana jest przez szybkozmienną funkcję, dla której prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w odpowiednio dużym przedziale Δx nie zależy od położenia tego przedziału między ścianami pudełka.

Przykład 7.9

Klasyczna cząstka w pudełku

Mały wózek o masie $0{,}4\ \mathrm{kg}$ odbija się pomiędzy dwoma zderzakami oddalonymi od siebie o $2\ \mathrm{m}$, poruszając się po torze powietrznym. Zakładamy, że wózek porusza się bez tarcia, a zderzenia są elastyczne. Wózek utrzymuje stałą prędkość $0{,}5\ \mathrm{m}\ /\ \mathrm{s}$. Traktując wózek jak cząstkę kwantową, oszacujmy wartość głównej liczby kwantowej, która odpowiada jego energii (w ujęciu klasycznym).

Strategia rozwiązania

Energię kinetyczną i stanu podstawowego obliczamy jak w przypadku cząstki kwantowej. Zakładamy, że energia całkowita wózka jest równa jego energii kinetycznej, a więc $E_\mathrm{k} = n^2 E_1$. Przekształcając równanie pod kątem liczby kwantowej, otrzymujemy $n = (E_\mathrm{k}\ /\ E_1)^{1/2}$.

Rozwiązanie

Energia kinetyczna wózka wynosi

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}4\ \mathrm{kg} \cdot (0{,}5\ \mathrm{m}\ /\ \mathrm{s})^2 = 0{,}05\ \mathrm{J}.$$

Energia stanu podstawowego to

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} = \frac{\pi^2 \left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot 0{,}4\ \mathrm{kg} \cdot (2\ \mathrm{m})^2} = 1{,}7 \cdot 10^{-68}\ \mathrm{J}.$$

A zatem $n = (E_\mathrm{k}\ /\ E_1)^{1/2} = \left[0{,}05\ \mathrm{J}\ /\ \left(1{,}7 \cdot 10^{-68}\ \mathrm{J}\right)\right]^{1/2} = 1{,}2 \cdot 10^{33}$.

Znaczenie

Pokazaliśmy, że energii układu klasycznego odpowiada bardzo wysoka liczba kwantowa. Zasada korespondencji Bohra dotyczy właśnie takich zagadnień. Możemy więc zastosować formalizm mechaniki kwantowej do dowolnego układu – kwantowego czy klasycznego – i wyniki będą poprawne w każdym z przypadków. Jest on jednak dużo bardziej skomplikowany niż formalizm klasyczny, który można z dobrym przybliżeniem stosować w przypadku układów o bardzo dużej liczbie kwantowej.

7.7 Sprawdź, czy rozumiesz.

a. Rozważ nieskończoną kwadratową studnię o ścianach w $x = 0$ i $x = L$ (Rysunek 7.11). Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia cząstki kwantowej w stanie podstawowym w przedziale od $x = 0$ do $x = L\ /\ 4$?

b. Powtórz obliczenia dla cząstki klasycznej.

Znając funkcje $\psi_n\,(x)$ i energie E_n po rozwiązaniu równania Schrödingera, możemy je wykorzystać do zapisania funkcji falowych $\Psi_n\,(x, t)$, które są rozwiązaniem równania Schrödingera zależnego od czasu. Dla cząstki w pudełku będą one miały postać

$$\Psi_n\,(x, t) = e^{-i\omega_n t} \psi_n\,(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-iE_n t/\hbar} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.71)$$

Model cząstki kwantowej w pudełku ma praktyczne zastosowanie w stosunkowo nowej dziedzinie optoelektroniki, która zajmuje się przekształcaniem sygnałów elektrycznych na sygnały optyczne. Model ten opisuje też zjawiska fizyczne w skali nano, np. nanocząstkę uwięzioną w niskim potencjale elektrycznym pomiędzy barierami wysokiego potencjału.

7.5 | Kwantowy oscylator harmoniczny

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać model kwantowego oscylatora kwantowego;
- określać różnice między klasycznym a kwantowym oscylatorem harmonicznym;
- wyjaśniać zagadnienia fizyczne, które są wspólne dla oscylatora klasycznego i kwantowego.

Przykłady oscylatorów możemy znaleźć z łatwością w naturze, będą to choćby fale elektromagnetyczne, drgające cząstki i lekko kołysząca się na wietrze gałąź. W poprzednich rozdziałach wykorzystywaliśmy mechanikę newtonowską do opisu makroskopowych oscylacji, jak klocek na sprężynie czy proste wahadło. W tym rozdziale zajmiemy się oscylacjami z punktu widzenia mechaniki kwantowej, a zaczniemy od przypomnienia klasycznego oscylatora harmonicznego.

Klasyczny oscylator harmoniczny

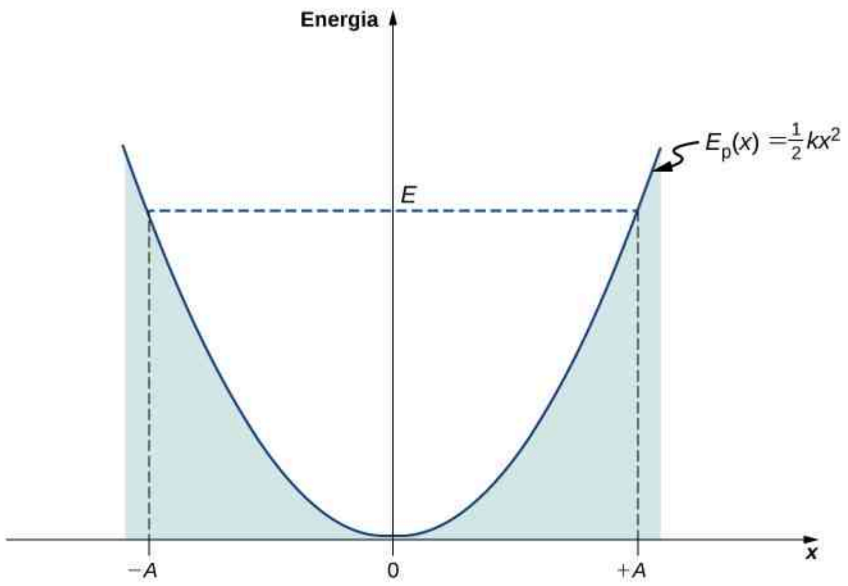
Prostym oscylatorem harmonicznym nazwiemy cząstkę lub układ, oscylujące harmonicznie wokół punktu równowagi, jak ciało na sprężynie. W tym podrozdziale będziemy się zajmować jedynie jednowymiarowymi oscylacjami. Rozważmy więc ciało oscylujące wokół pewnego punktu równowagi $x = 0$. W mechanice klasycznej na cząstkę działa siła sprężystości dana wzorem $F_x = -kx$, gdzie x jest przemieszczeniem cząstki względem punktu równowagi. Ruch odbywa się między dwoma maksymalnymi wychyleniami $x = \pm A$, gdzie A oznacza amplitudę drgań. Położenie ciała zmienia się okresowo w czasie z prędkością kątową $\omega = \sqrt{k / m}$, która zależy od masy m oscylatora i stałej sprężystości k. Zależność opisującą przemieszczenie możemy zapisać jako

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi). \tag{7.72}$$

Całkowita energia E oscylatora jest sumą jego energii kinetycznej $E_k = mv^2 / 2$ i energii potencjalnej $V(x) = kx^2 / 2$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{7.73}$$

W punktach maksymalnego wychylenia $x = \pm A$ prędkość oscylatora spada do zera, a więc energia oscylatora jest wtedy równa energii potencjalnej: $E = kA^2 / 2$. Graficzną reprezentacją energii potencjalnej w funkcji położenia jest parabola (Rysunek 7.14). Energia potencjalna jest funkcją kwadratową zależną od x, mierzoną w odniesieniu do punktu równowagi, w którym przyjmuje wartość równą zero. Na tym samym rysunku przerywaną linią zaznaczony jest przebieg całkowitej energii oscylatora. Możemy łatwo wydedukować, że energia kinetyczna będzie różnicą energii całkowitej i potencjalnej.



Rysunek 7.14 Studnia potencjału klasycznego oscylatora harmonicznego. Ruch oscylatora jest ograniczony do punktów przecięcia wykresów energii całkowitej i potencjalnej $x = -A$ i $x = +A$. Energia oscylacji wynosi $E = kA^2 / 2$.

Ruch klasycznego oscylatora harmonicznego jest ograniczony do przedziału, w którym energia kinetyczna przyjmuje wartości dodatnie. Oznacza to, że oscylator harmoniczny nigdy nie wychyli się dalej niż wynosi jego amplituda, od której zależy też jego maksymalna energia. Najmniejsza możliwa energia klasycznego oscylatora harmonicznego wynosi zero i odpowiada sytuacji, gdy ciało spoczywa w punkcie równowagi. Gdy ciało oscyluje, niezależnie od tego, czy są to duże, czy małe oscylacje, najdłużej znajduje się w punktach maksymalnego wychylenia, gdzie jego prędkość spada do zera, a następnie zmienia zwrot. Prawdopodobieństwo znalezienia ciała w tych punktach jest więc największe, a najmniejsze w punkcie równowagi, gdzie ciało ma największą prędkość (zauważmy, że to stwierdzenie nie odnosi się do minimalizacji energii, a do prędkości samego ciała).

Kwantowy oscylator harmoniczny

Model klasycznego oscylatora, choć prosty, nie jest uniwersalny. Nie możemy go wykorzystać np. do opisania drgań cząstek dwuatomowych, gdzie efekty kwantowe mają duże znaczenie. Pierwszym krokiem do formalizmu kwantowego jest wykorzystanie klasycznego wyrażenia $k = m\omega^2$, aby uniknąć sformułowania stałej sprężystości między atomami. Dzięki temu energia potencjalna może zostać zapisana jako

$$V(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2. \tag{7.74}$$

Łącząc to wyrażenie z zależnym od czasu równaniem Schrödingera, otrzymujemy

$$-\frac{\hbar}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x). \tag{7.75}$$

Do rozwiązania tego równania, a więc do znalezienia dozwolonych poziomów energetycznych E i odpowiadających im funkcji falowych $\psi(x)$, wymagamy symetrii funkcji falowych wokół $x = 0$ (dno studni potencjału) oraz aby były one możliwe do znormalizowania. Te warunki zapewniają skończoność gęstości prawdopodobieństwa $|\psi(x)|^2$ po scałkowaniu na przedziale od $-\infty$ do $+\infty$. Rozwiązanie tego równania wykracza poza program niniejszego podręcznika, przejdziemy więc od razu do gotowych rozwiązań

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \frac{2n+1}{2}\hbar\omega,\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{7.76}$$

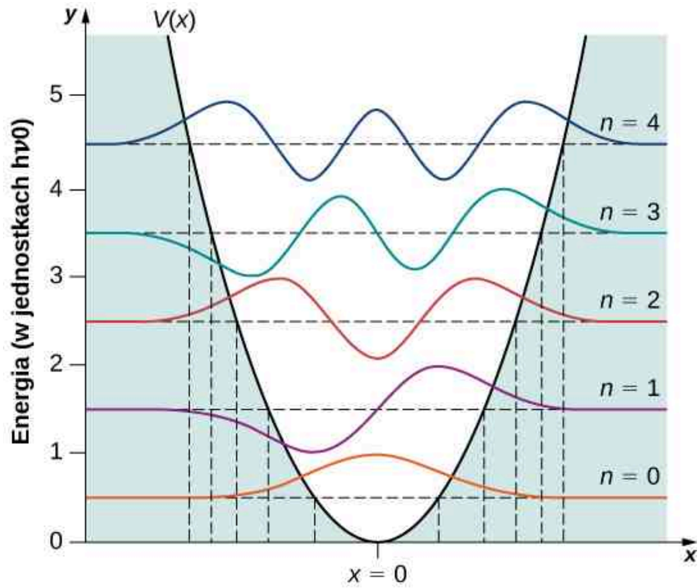
Funkcje falowe odpowiadające tym energiom (stany stacjonarne lub stany o określonej energii) wynoszą

$$\psi_n(x) = N_n e^{-\beta^2 x^2/2} H_n(\beta x),\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \tag{7.77}$$

gdzie $\beta = \sqrt{m\omega / \hbar}$, N_n jest stałą normalizacji, a $H_n(y)$ to wielomian stopnia n; wielomiany te nazywane są też wielomianami Hermite'a. Pierwsze wielomiany Hermite'a mają postać

$$H_0(y) = 1,$$
$$H_1(y) = 2y,$$
$$H_2(y) = 4y^2 - 2,$$
$$H_3(y) = 8y^3 - 12y.$$

Kilka przykładowych funkcji zostało zamieszczonych na Rysunku 7.15. Wraz ze wzrostem głównej liczby kwantowej rozwiązania oscylują między parzystymi i nieparzystymi funkcjami wokół $x = 0$.



Rysunek 7.15 Pierwsze pięć funkcji falowych kwantowego oscylatora harmonicznego. Klasyczne ograniczenia ruchu oscylatora oznaczone są pionowymi liniami odpowiadającymi maksymalnym wychyleniom klasycznego oscylatora $x = \pm A$ o takiej samej energii jak kwantowy oscylator o stanie oznaczonym na rysunku.

Przykład 7.10

Klasyczny przedział oscylacji harmonicznych

Obliczmy amplitudę A oscylacji klasycznego oscylatora harmonicznego o energii równej energii kwantowego oscylatora o liczbie kwantowej n.

Strategia rozwiązania

Aby obliczyć amplitudę, musimy przyrównać energię klasyczną $E = kx^2 / 2 = m\omega^2 A^2 / 2$ do energii kwantowej E_n.

Rozwiązanie

Otrzymujemy

$$E_n = m\omega^2 A_n^2 / 2 \Rightarrow A_n = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2} E_n} = \sqrt{\frac{2}{m\omega^2} \cdot \frac{2n+1}{2} \hbar\omega} = \sqrt{(2n+1)\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

Znaczenie

Wraz ze wzrostem liczby kwantowej energia oscylatora, a co za tym idzie także amplituda oscylacji rosną o pewną wartość. Dla dużych n amplituda staje się w przybliżeniu proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby kwantowej.

Z tego przykładu możemy wyciągnąć kilka ciekawych wniosków. W przeciwieństwie do klasycznego oscylatora zmierzone wartości energii oscylatora kwantowego mogą przyjmować jedynie określone wartości (Równanie 7.76). Co więcej, w przeciwieństwie do przypadku cząstki kwantowej w pudełku poziomy energetyczne są jednakowo od siebie oddalone

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{2(n+1)+1}{2}\hbar\omega - \frac{2n+1}{2}\hbar\omega = \hbar\omega = h\nu. \tag{7.78}$$

Gdy cząstka będąca częścią takiego układu przejdzie z wyższego poziomu energetycznego na niższy, najmniejsza porcja energii emitowanego fotonu wynosi $h\nu$. Podobnie gdy cząstka przechodzi z niższego na wyższy poziom energii, najmniejsza możliwa energia, jaką może ona zaabsorbować, jest równa $h\nu$. Kwantowy oscylator harmoniczny może absorbować i emitować jedynie wielokrotności tego kwantu energii. Jest to zgodne z przewidywaniami Plancka w związku z problemem promieniowania ciała doskonale czarnego.

Przykład 7.11

Energia drgań cząstki chlorowodoru

Dwuatomowa cząsteczka HCl składa się z jednego atomu chloru i jednego atomu wodoru. Ponieważ atom chloru jest 35 razy cięższy od atomu wodoru, drgania cząsteczki HCl można przybliżyć za pomocą modelu, w którym atom Cl jest nieruchomy, a atom H drga wokół niego. Oscylacje te spowodowane są istnieniem oddziaływania międzyatomowego, które podlega prawu Hooka. Na widmie drgań chlorowodoru w podczerwieni linia charakterystyczna o najmniejszej częstotliwości występuje dla $\nu = 8{,}88 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. Jakie są odległości pomiędzy poziomami energetycznymi drgań tej cząsteczki? Jaka jest stała sprężystości k tego układu?

Strategia rozwiązania

Linia charakterystyczna o najmniejszej częstotliwości odpowiada emisji fotonu o najniższej częstotliwości. Fotony te są emitowane, gdy molekuła przechodzi między sąsiednimi poziomami energetycznymi drgań. Zakładając, że poziomy energetyczne są równomiernie rozłożone, możemy wykorzystać Równanie 7.78 do obliczenia odległości między nimi. Przyjmujemy, że atom chloru jest nieskończenie ciężki, a atom wodoru o masie m oscyluje wokół niego. Traktując ten układ jak klasyczny oscylator, otrzymamy stałą sprężystości ze wzoru $k = m\omega^2$.

Rozwiązanie

Odległość między poziomami energetycznymi wynosi

$$\Delta E = h\nu = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s} \cdot 8{,}88 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz} = 0{,}368\,\mathrm{eV}.$$

Stała sprężystości jest równa

$$k = m\omega^2 = m(2\pi\nu)^2 = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2\pi \cdot 8{,}88 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}\right)^2 = 520\,\mathrm{N/m}.$$

Znaczenie

Oddziaływanie międzyatomowe w cząstce HCl jest niezwykle silne. Wartości energii fotonów uwalnianych podczas przejścia między poziomami odpowiadają energii promieniowania podczerwonego. Jak zobaczymy w dalszej części rozdziału, przejścia między poziomami drgań cząstki dwuatomowej często towarzyszą przejściom rotacyjnym.

7.8 Sprawdź, czy rozumiesz. Częstotliwość drgań dwuatomowej cząstki jodowodoru HI wynosi $6{,}69 \cdot 10^{13}$ Hz.

a. Jaka jest stała sprężystości siły wiążącej atomy jodu i wodoru?

b. Jaka jest najmniejsza możliwa częstotliwość emitowanego przez tę cząstkę fotonu?

Kwantowy oscylator różni się od klasycznego pod trzema względami:

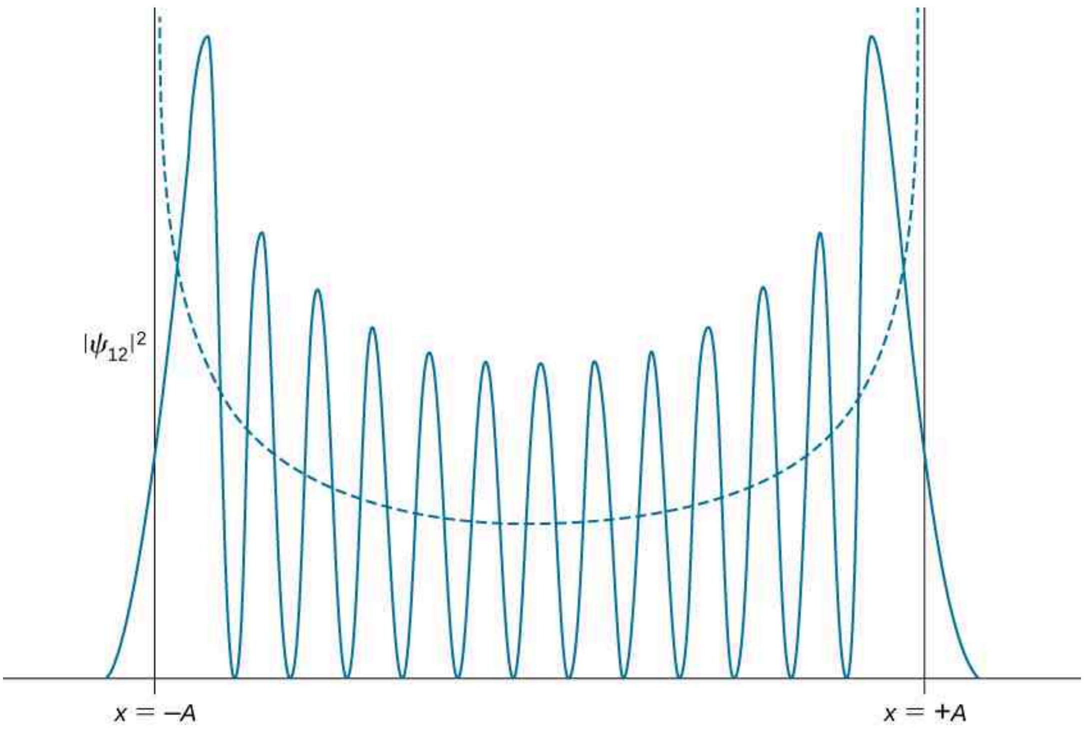
Po pierwsze, stan podstawowy kwantowego oscylatora wynosi $E_0 = \hbar\omega / 2$ (w jednym wymiarze, podczas gdy w dwóch i trzech wymiarach wynosi odpowiednio $\hbar\omega$ i $3\hbar\omega / 2$), a nie zero, jak w przypadku najniższej możliwej energii układu klasycznego. Energia sprężystości oscylatora dwu- i trójwymiarowego wynosi $1 / 2 \cdot k \left(x^2 + y^2\right)$ i $1 / 2 \cdot k \left(x^2 + y^2 + z^2\right)$. Podobnie energie kinetyczne wynoszą odpowiednio $1 / 2 \cdot m \left(v_x^2 + v_y^2\right)$ oraz $1 / 2 \cdot m \left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right)$.

Po drugie, cząstka w potencjale kwantowego oscylatora harmonicznego może być znaleziona z niezerowym prawdopodobieństwem poza przedziałem $-A \leq x \leq A$. W klasycznym przypadku jest to niemożliwe energetycznie. Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki kwantowej w stanie podstawowym, znajdującej się w przedziale wzbronionym, wynosi około $16\,\%$.

Po trzecie, rozkład gęstości prawdopodobieństwa kwantowego oscylatora w stanie podstawowym jest największy pośrodku studni ($x = 0$). Oznacza to, że cząstka spędza najwięcej czasu pośrodku studni, co daje odwrotną sytuację niż w przypadku klasycznego oscylatora, dla którego największe prawdopodobieństwo znalezienia cząstki istnieje w punktach maksymalnego wychylenia.

7.9 Sprawdź, czy rozumiesz. Oblicz wartość oczekiwaną położenia cząstki w stanie podstawowym oscylatora harmonicznego, wykorzystując symetrię.

Charakter rozkładów gęstości prawdopodobieństwa w układach kwantowych zmienia się dla stanów wzbudzonych, upodabniając się do rozkładów klasycznych wraz ze wzrostem liczby kwantowej. Zmiana ta jest widoczna już dla pierwszego stanu wzbudzonego kwantowego oscylatora, ponieważ jego rozkład rośnie w pobliżu punktów granicznych, a zanika w położeniu równowagi, jak widać na Rysunku 7.14. Zgodnie z zasadą korespondencji Bohra, przy warunku dużych liczb kwantowych, kwantowy opis oscylatora harmonicznego zgadza się z klasycznym modelem, co zostało przedstawione na Rysunku 7.16. Klasyczny rozkład gęstości prawdopodobieństwa odpowiadający energii układu o liczbie kwantowej $n = 12$ jest dobrym przybliżeniem kwantowego rozkładu gęstości prawdopodobieństwa oscylatora kwantowego w stanie wzbudzonym. Im bardziej wzbudzone stany, tym większa zgodność rozkładów.



Rysunek 7.16 Rozkład gęstości prawdopodobieństwa znalezienia kwantowego oscylatora harmonicznego w stanie odpowiadającym $n = 12$. Linia przerywana odpowiada rozkładowi gęstości prawdopodobieństwa klasycznego oscylatora harmonicznego o tej samej energii.

7.6 | Tunelowanie cząstek przez bariery potencjału

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, w jaki sposób cząstka kwantowa może tunelować przez bariery potencjału;
- określać parametry fizyczne, które wpływają na prawdopodobieństwo tunelowania;
- rozpoznawać zjawiska fizyczne, w których możemy zaobserwować tunelowanie;
- wyjaśniać, w jaki sposób tunelowanie cząstek jest wykorzystywane w nowoczesnych technologiach.

Tunelowanie kwantowe (ang. **quantum tunneling**) jest zjawiskiem fizycznym, które opisuje cząstki przenikające bariery potencjału o wysokości znacznie przekraczającej energię tych cząstek, jak pokazano na Rysunku 7.17. Zjawisko to jest niezwykle interesujące i ważne, ponieważ narusza zasady mechaniki klasycznej. Tunelowanie jest istotne w modelach Słońca i ma szeroki zakres zastosowań, jak skaningowy mikroskop tunelowy czy dioda tunelowa. W 1971 roku Nagrodę Nobla przyznano za empiryczne odkrycie zjawiska tunelowania w półprzewodnikach i nadprzewodnikach oraz za teoretyczne przewidzenie własności prądu nadprzewodnictwa płynącego przez barierę tunelową, w szczególności dla zjawisk, które są znane jako efekty Josephsona. Obecnie niektóre urządzenia elektroniczne, takie jak półprzewodnikowa dioda Esakiego, korzystają ze zjawisk tunelowania.

Tunelowanie a energia potencjalna

W celu zobrazowania zjawiska tunelowania rozważmy przypadek kulki toczącej się po powierzchni z energią $100\,\text{J}$. W pewnym momencie kulka napotyka wzniesienie. Energia potencjalna kulki na szczycie wzniesienia wynosi $10\,\text{J}$. A zatem kulka o energii kinetycznej równej $100\,\text{J}$ z łatwością wtoczy się na szczyt wzniesienia i będzie kontynuowała swój ruch. W mechanice klasycznej prawdopodobieństwo pokonania wzniesienia przez kulkę wynosi dokładnie 1, co oznacza, że w każdym przypadku kulka mija wzniesienie. Jeżeli jednak napotkałaby przeszkodę o większej wysokości, taką, że do jej pokonania niezbędna byłaby energia $200\,\text{J}$, wówczas kulka podtoczyłaby się jedynie do pewnej wysokości, a następnie zatrzymała i stoczyła z powrotem. Energia bariery znacznie przewyższa jej energię całkowitą.

Prawdopodobieństwo pokonania przeszkody wynosiłoby w tym przypadku 0. Istnienie kulki za barierą jest niemożliwe, bo jest energetycznie wzbronione. W świecie kwantowym nie ma jednak pełnego determinizmu wydarzeń, jakie nastąpią, istnieje jedynie wskazanie prawdopodobieństw ich nastąpienia. W przypadku fizyki kwantowej kulka (np. elektron) ma przypisaną sobie funkcję falową, zdefiniowaną na całej przestrzeni. Funkcja ta może być wysoce zlokalizowana (wtedy funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma jedno wyraźne maksimum w pewnym wąskim obszarze przestrzeni), ale zawsze będzie istniało niezerowe prawdopodobieństwo, że kulka napotykawszy przeszkodę, nagle znajdzie się po jej drugiej stronie. Co więcej, prawdopodobieństwo to jest znaczące, gdy paczka falowa kulki jest szersza od przeszkody.

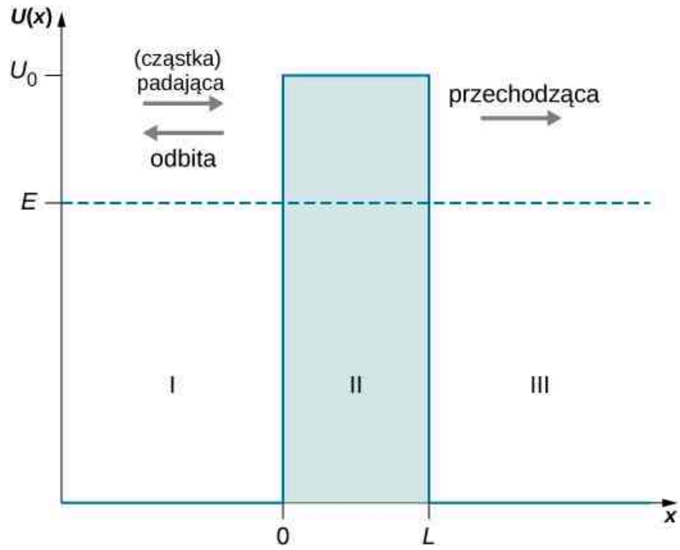
Oprócz tunelowania przedstawionego na Rysunku 7.17 w sytuacji kwantowo-mechanicznej zachodzi także inny proces, niespotykany w mechanice klasycznej. Jest nim niezerowe prawdopodobieństwo odbicia się cząstki poruszającej się od lewej do prawej, gdy przechodzi ona ponad barierą potencjału (mając energię większą niż wysokość bariery potencjału $E > 0\,\mathrm{J}$). Takie odbicie spowoduje, że cząstka skieruje się ponownie w lewą stronę, co nie zajdzie w sytuacji klasycznej. Zatem cząstka kwantowa czuje niejednorodność energii potencjalnej $V(x)$. Nie można tego powiedzieć o cząstce klasycznej, która w sytuacji $V < E$ porusza się po linii prostej i odbija się od bariery potencjału tylko wtedy, gdy $V > E$.

Zobacz tę interaktywną symulację (https://openstaxcollege.org/l/21intquatanvid) , aby dowiedzieć się więcej o zjawisku tunelowania.

W języku mechaniki kwantowej przeszkodę nazwiemy **barierą potencjału** (ang. **potential barrier**). Kwadratowa bariera potencjału o skończonej wysokości może być opisana jako

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0, \\ V_0, & \text{dla } 0 \le x \le L, \\ 0, & \text{dla } x > L. \end{cases} \tag{7.79}$$

Bariera potencjału przedstawiona jest na Rysunku 7.17. Gdy wysokość bariery V_0 jest nieskończona, wówczas paczka falowa odpowiadająca padającej cząstce kwantowej nie jest w stanie jej przeniknąć i odbija się od niej jak cząstka klasyczna. Gdy grubość bariery L jest nieskończona, a jej wysokość skończona, część paczki falowej może przejść do środka bariery, jednak ze względu na nieskończoną szerokość zanika w trakcie przejścia.



Rysunek 7.17 Bariera potencjału o wysokości V_0 tworzy trzy różne obszary, w których funkcje falowe odmiennie się zachowują. W pierwszym obszarze (I), dla $x < 0$, padająca paczka falowa (cząstka padająca) porusza się w obszarze o zerowym potencjale razem z paczką odbitą (cząstką odbitą). W drugim obszarze (II) część paczki falowej, która nie została odbita w $x = 0$, porusza się w potencjale $V(x) = +V_0$ i tuneluje do obszaru trzeciego (III) w $x = L$. W obszarze III, dla $x > L$, paczka falowa (cząstka przechodząca), która przeniknęła przez barierę potencjału, porusza się w obszarze o zerowym potencjale. Energia cząstki padającej jest przedstawiona w formie poziomej przerywanej linii.

Gdy zarówno szerokość L, jak i wysokość V_0 bariery są skończone, część paczki falowej padającej na jedną ze ścian bariery może przez nią przeniknąć i kontynuować swój ruch przez barierę, gdzie jest stopniowo osłabiana, aż do wyjścia z niej. O takiej cząstce powiemy, że dokonała tunelowania przez barierę potencjału. To, jaka część paczki falowej przedostanie się na drugą stronę bariery, zależy od szerokości L, wysokości V_0 i energii E cząstki kwantowej padającej na barierę.

Pokonywanie bariery potencjału przez kwantową funkcję falową zostało zbadane po raz pierwszy przez **Friedricha Hunda (1896–1997)** w 1927 roku, krótko po tym, jak Schrödinger opublikował noszące jego nazwisko równanie. W następnym roku **George Gamow (1904–1968)** wykorzystał formalizm mechaniki kwantowej do wyjaśnienia rozpadu α jądra atomowego jako zjawiska tunelowania. Wynalezienie diody tunelowej w 1957 r. udowodniło, że tunelowanie jest niezwykle istotne dla technologii półprzewodników. W 1962 roku wysunięto postulat złącza Josephsona jako układu nadprzewodnik–izolator–nadprzewodnik, w którym następuje tunelowanie z jednego do drugiego nadprzewodnika przez barierę izolatora. W 1963 roku doczekało się ono potwierdzenia eksperymentalnego i obecnie złącze Josephsona jest podstawowym elementem w elektronice nadprzewodzącej. We współczesnej nanotechnologii tunelowanie wykorzystywane jest także do manipulacji pojedynczymi atomami.

Tunelowanie i funkcja falowa

Załóżmy, że jednorodna i niezależna od czasu wiązka elektronów lub innych cząstek o energii E porusza się wzdłuż osi x (w kierunku dodatnim osi) i napotyka barierę potencjału opisaną Równaniem 7.79. Jakie jest prawdopodobieństwo tunelowania pojedynczej cząstki z wiązki przez barierę? Odpowiedź znajdziemy przez ustalenie warunków brzegowych występujących w niezależnym od czasu równaniu Schrödingera dla cząstki w wiązce. Ogólna postać tego równania dana jest wzorem

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\psi(x)}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\psi(x)=E\psi(x),\ -\infty<x<+\infty, \tag{7.80}$$

gdzie potencjał $V(x)$ dany jest wzorem z Równania 7.79. Zakładamy, że energia wiązki E jest mniejsza od energii bariery ($E < V_0$). Znając energię padających cząstek, musimy rozwiązać równanie Schrödingera, szukając funkcji $\psi(x)$, która jest ciągła i ma pierwsze pochodne ciągłe dla każdego x, co zapewnia gładkość przebiegu funkcji.

Dzielimy oś x na trzy obszary o granicach określonych funkcją potencjału $V(x)$ (przedstawioną na Rysunku 7.17) i przepisujemy Równanie 7.80 dla każdego z tych obszarów. Rozwiązania dla obszaru pierwszego $x < 0$ oznaczamy jako $\psi_{\mathrm{I}}(x)$, dla obszaru drugiego $0 \le x \le L$ – $\psi_{\mathrm{II}}(x)$ i dla trzeciego $x > L$ jako $\psi_{\mathrm{III}}(x)$.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\psi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x^2}=E\psi_{\mathrm{I}}(x),\ \text{w obszarze I:}\ -\infty<x<0, \tag{7.81}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\psi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2}+V_0\psi_{\mathrm{II}}(x)=E\psi_{\mathrm{II}}(x),\ \text{w obszarze II:}\ 0\le x\le L, \tag{7.82}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{\mathrm{d}^2\psi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x^2}=E\psi_{\mathrm{III}}(x),\ \text{w obszarze III:}\ L<x<+\infty. \tag{7.83}$$

Warunek ciągłości na granicy obszarów wymaga, aby

$$\psi_{\mathrm{I}}(0)=\psi_{\mathrm{II}}(0),\ \text{na granicy obszarów I i II}, \tag{7.84}$$

oraz

$$\psi_{\mathrm{II}}(L)=\psi_{\mathrm{III}}(L),\ \text{na granicy obszarów II i III}. \tag{7.85}$$

Do spełnienia warunku gładkości niezbędna jest ciągłość pierwszych pochodnych rozwiązania na granicach obszaru

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{I}}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0},\ \text{na granicy obszarów I i II}, \tag{7.86}$$

oraz

$$\left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L} = \left.\frac{\mathrm{d}\psi_{\mathrm{III}}(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=L}, \text{ na granicy obszarów II i III.} \tag{7.87}$$

Następnie musimy znaleźć funkcje $\psi_{\mathrm{I}}(x)$, $\psi_{\mathrm{II}}(x)$ i $\psi_{\mathrm{III}}(x)$.

W przypadku obszarów I i III możemy łatwo stwierdzić, że rozwiązania będą miały formę ogólną

$$\psi_{\mathrm{I}}(x) = Ae^{+ikx} + Be^{-ikx}, \tag{7.88}$$

$$\psi_{\mathrm{III}}(x) = Fe^{+ikx} + Ge^{-ikx}, \tag{7.89}$$

gdzie $k = \sqrt{2mE} / \hbar$ jest liczbą falową, a urojony wykładnik opisuje oscylacje

$$e^{\pm ikx} = \cos(kx) \pm i\sin(kx). \tag{7.90}$$

Stałe A, B, F i G mogą być liczbami zespolonymi. Rozwiązania te zostały przedstawione na Rysunku 7.17. W obszarze I występują dwie fale – jedna padająca (poruszająca się w prawo) i jedna odbita (poruszająca się w lewo), a więc stałe A i B nie mogą zaniknąć. W obszarze III jest tylko jedna fala (poruszająca się w prawo), która jest falą przechodzącą, a więc stała G musi być równa zero. Fali padającej możemy explicite przypisać funkcję $\psi_{\mathrm{pad}}(x) = Ae^{+ikx}$, fali odbitej funkcję $\psi_{\mathrm{odb}}(x) = Be^{-ikx}$, a fali przechodzącej funkcję $\psi_{\mathrm{prze}}(x) = Fe^{+ikx}$. Amplituda fali padającej wynosi

$$\left|\psi_{\mathrm{pad}}(x)\right|^2 = \psi^*_{\mathrm{pad}}(x)\psi_{\mathrm{pad}}(x) = \left(Ae^{+ikx}\right)^* Ae^{+ikx} = A^*e^{-ikx}Ae^{+ikx} = A^*A = |A|^2.$$

Podobnie amplituda fali odbitej będzie równa $|\psi_{\mathrm{odb}}(x)|^2 = |B|^2$, a amplituda fali przechodzącej: $\left|\psi_{\mathrm{prze}}(x)\right|^2 = |F|^2$. Wiemy z teorii fal, że kwadrat amplitudy fali jest wprost proporcjonalny do natężenia fali. Jeżeli chcemy wiedzieć, jak duża część fali przetuneluje przez barierę potencjału, musimy obliczyć kwadrat amplitudy fali przechodzącej. **Prawdopodobieństwo transmisji** (ang. **transmission probability**) lub inaczej **prawdopodobieństwo tunelowania** (ang. **tunneling probability**) cząstki jest stosunkiem natężenia fali przechodzącej do natężenia fali padającej

$$T(L,E) = \frac{\left|\psi_{\mathrm{prze}}(x)\right|^2}{\left|\psi_{\mathrm{pad}}(x)\right|^2} = \frac{|F|^2}{|A|^2} = \left|\frac{F}{A}\right|^2, \tag{7.91}$$

gdzie L jest szerokością bariery, a E energią całkowitą cząstki. Jest to prawdopodobieństwo przetunelowania pojedynczej cząstki z wiązki. Intuicyjnie rozumiemy, że prawdopodobieństwo musi zależeć od wysokości bariery V_0.

W obszarze II równanie Schrödingera możemy zapisać jako

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_{\mathrm{II}}(x)}{\mathrm{d}x^2} = \beta^2\psi_{\mathrm{II}}(x), \tag{7.92}$$

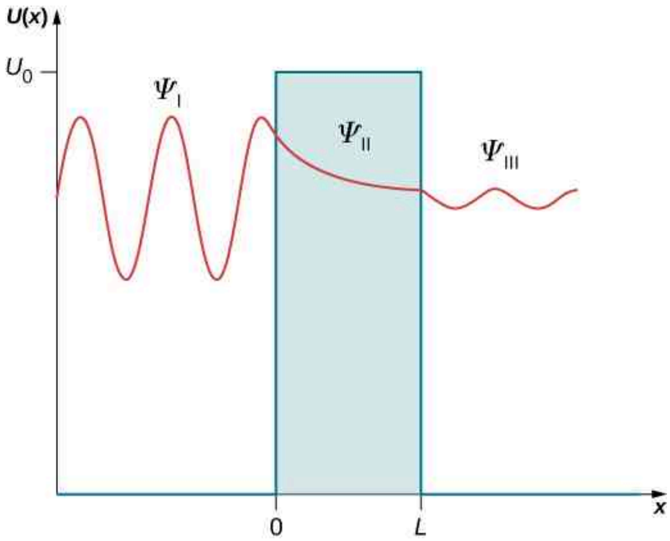
gdzie β^2 jest dodatnie, ponieważ $V_0 > E$, a parametr β to liczba rzeczywista

$$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E). \tag{7.93}$$

Rozwiązanie równania Schrödingera w obszarze II nie jest oscylacyjne (jak w przypadku innych obszarów) i przedstawiamy je wzorem

$$\psi_{\mathrm{II}}(x) = Ce^{-\beta x} + De^{+\beta x}. \tag{7.94}$$

Rozwiązania dla wszystkich trzech obszarów pokazane zostały na Rysunku 7.18.



Rysunek 7.18 Trzy rodzaje rozwiązania stacjonarnego równania Schrödingera dla zagadnienia tunelującej cząstki: o charakterze oscylującym w obszarze I i III, gdzie cząstka porusza się swobodnie, i zanikającym wykładniczo w obszarze II (bariery), gdzie cząstka porusza się w potencjale V_0 .

Wykorzystamy teraz warunki brzegowe do obliczenia nieznanych stałych. Podstawiając Równanie 7.88 i Równanie 7.94 do Równania 7.84, otrzymamy

$$A + B = C + D. \tag{7.95}$$

Podstawiając Równanie 7.94 i Równanie 7.89 do Równania 7.85, dostajemy

$$Ce^{-\beta L} + De^{+\beta L} = Fe^{+ikL}. \tag{7.96}$$

Podobnie podstawiamy Równanie 7.88 i Równanie 7.94 do Równania 7.86, różniczkujemy i otrzymujemy

$$-ik(A - B) = \beta(D - C). \tag{7.97}$$

Następnie podchodzimy do warunku brzegowego z Równania 7.87

$$\beta\left(De^{+\beta L} - Ce^{-\beta L}\right) = -ikFe^{+ikL}. \tag{7.98}$$

Mamy więc cztery równania z pięcioma nieznanymi stałymi. Ponieważ szukamy współczynnika transmisji F/A, możemy każdą z szukanych stałych podzielić przez A, otrzymując w ten sposób jedynie cztery niewiadome: B/A, C/A, D/A i F/A, z których trzy możemy wykorzystać do obliczenia F/A. Obliczenia prowadzące do ostatecznego wyniku są długie, ale możemy wykonać je ręcznie lub za pomocą komputera. Współczynnik transmisji wynosi więc

$$\frac{F}{A} = \frac{e^{-ikL}}{\cosh(\beta L) + i(\gamma/2)\sinh(\beta L)}. \tag{7.99}$$

Dla ułatwienia wykorzystujemy podstawienia $\gamma \equiv \beta/k - k/\beta$, $\cosh y = \left(e^y + e^{-y}\right)/2$, $\sinh y = \left(e^y - e^{-y}\right)/2$. Podstawiamy równanie na współczynnik transmisji do wzoru opisującego prawdopodobieństwo tunelowania i otrzymujemy

$$T(L,E) = \left(\frac{F}{A}\right)^* \frac{F}{A} = \frac{e^{+ikL}}{\cosh(\beta L) - i(\gamma/2)\sinh(\beta L)} \cdot \frac{e^{-ikL}}{\cosh(\beta L) + i(\gamma/2)\sinh(\beta L)}$$

lub inaczej

$$T(L,E) = \frac{1}{\cosh^2(\beta L) + (\gamma/2)^2 \sinh^2(\beta L)}, \tag{7.100}$$

gdzie

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1-E\,/\,V_0}{E\,/\,V_0} + \frac{E\,/\,V_0}{1-E\,/\,V_0} - 2\right).$$

Dla przypadku szerokiej bariery można tę zależność przybliżyć jako

$$T(L,E) = 16\frac{E}{V_0}\left(1-\frac{E}{V_0}\right)e^{-2\beta L}. \tag{7.101}$$

Czy skorzystamy z pełnego, czy z uproszczonego wzoru, łatwo możemy zauważyć, że tunelowanie wyraźnie zależy od szerokości bariery L. W warunkach laboratoryjnych jesteśmy w stanie dopasować zarówno wysokość bariery potencjału V_0, jak i jej szerokość L do projektowania nanourządzeń z wybranym współczynnikiem transmisji.

Przykład 7.12

Współczynnik transmisji

Dwa miedziane nanodruty są izolowane nanodrutem wykonanym z tlenku miedzi, co powoduje powstanie bariery potencjału o wysokości $10\,\mathrm{eV}$. Oszacuj prawdopodobieństwo tunelowania elektronów o energii $7\,\mathrm{eV}$ przez nanodrut z tlenku miedzi o szerokości $5\,\mathrm{nm}$. Ile wyniosłoby ono, gdyby szerokość zmniejszono do $1\,\mathrm{nm}$? Ile, jeśli energia elektronów wzrosłaby do $9\,\mathrm{eV}$?

Strategia rozwiązania

Traktujemy izolującą warstwę tlenków jako barierę potencjału o skończonej wysokości, dlatego używamy Równania 7.101. Wtedy $V_0 = 10\,\mathrm{eV}$, $E_1 = 7\,\mathrm{eV}$, $E_2 = 9\,\mathrm{eV}$, $L_1 = 5\,\mathrm{nm}$, $L_2 = 1\,\mathrm{nm}$. Stosujemy Równanie 7.93 do wyliczenia wykładnika, podstawiając masę spoczynkową elektronu jako $m_e = 511\,\mathrm{keV}\,/\,c^2$ i stałą Plancka jako $\hbar = 0{,}1973\,\mathrm{keV\,nm}\,/\,c$. Nie jest niczym niezwykłym przy takiego rodzaju przybliżeniach, że liczone wielkości są za małe nawet dla kalkulatorów podręcznych. Aby właściwie przybliżyć rząd wielkości, stosujemy podstawienie $e^y = 10^{y/\ln 10}$.

Rozwiązanie

Wartości stałych wynoszą

$$\frac{2m}{\hbar^2} = \frac{2\cdot 511\,\mathrm{keV}\,/\,c^2}{(0{,}1973\,\mathrm{keV\,nm}\,/\,c)^2} = 26\,254\,\mathrm{keV^{-1}\,nm^{-2}} = 26{,}254\,\mathrm{eV^{-1}\,nm^{-2}},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)} = \sqrt{26{,}254\,\mathrm{eV^{-1}\,nm^{-2}}\cdot(10\,\mathrm{eV} - E)}.$$

Dla elektronów o niższej energii $E_1 = 7\,\mathrm{eV}$

$$\beta_1 = \sqrt{26{,}254\,\mathrm{eV^{-1}\,nm^{-2}}\cdot(10\,\mathrm{eV} - E_1)} = \sqrt{26{,}254\,\mathrm{nm^{-2}}\cdot(10-7)} = 8{,}875\,\mathrm{nm^{-1}},$$

$$T(L,E_1) = 16\frac{E_1}{V_0}\left(1-\frac{E_1}{V_0}\right)e^{-2\beta_1 L} = 16\frac{7}{10}\left(1-\frac{7}{10}\right)e^{-17{,}75\,\mathrm{nm^{-1}}\,L} = 3{,}36e^{-17{,}75\,\mathrm{nm^{-1}}\,L}.$$

Dla elektronów o wyższej energii $E_2 = 9\,\mathrm{eV}$

$$\beta_2 = \sqrt{26{,}254\,\mathrm{eV}^{-1}\,\mathrm{nm}^{-2} \cdot (10\,\mathrm{eV} - E_2)} = \sqrt{26{,}254\,\mathrm{nm}^{-2} \cdot (10 - 9)} = 5{,}124\,\mathrm{nm}^{-1}\,,$$

$$T(L, E_2) = 16\frac{E_2}{V_0}\left(1 - \frac{E_2}{V_0}\right)e^{-2\beta_2 L} = 16\frac{9}{10}\left(1 - \frac{9}{10}\right)e^{-5{,}12\,\mathrm{nm}^{-1}\,L} = 1{,}44e^{-5{,}12\,\mathrm{nm}^{-1}\,L}.$$

Dla bariery o większej szerokości $L_1 = 5$ nm

$$T(L_1, E_1) = 3{,}36e^{-17{,}75\,\mathrm{nm}^{-1}\,L_1} = 3{,}36e^{-17{,}75\,\mathrm{nm}^{-1}\cdot 5\,\mathrm{nm}} = 3{,}36e^{-88} = 3{,}36 \cdot 6{,}2 \cdot 10^{-39} = 2{,}1\,\% \cdot 10^{-36},$$

$$T(L_1, E_2) = 1{,}44e^{-5{,}12\,\mathrm{nm}^{-1}\,L_1} = 1{,}44e^{-5{,}12\,\mathrm{nm}^{-1}\cdot 5\,\mathrm{nm}} = 1{,}44e^{-25{,}6} = 1{,}44 \cdot 7{,}62 \cdot 10^{-12} = 1{,}1\,\% \cdot 10^{-9}.$$

Dla bariery o mniejszej szerokości $L_2 = 1$ nm

$$T(L_2, E_1) = 3{,}36e^{-17{,}75\,\mathrm{nm}^{-1}\,L_2} = 3{,}36e^{-17{,}75\,\mathrm{nm}^{-1}\cdot 1\,\mathrm{nm}} = 3{,}36e^{-17{,}75} = 3{,}36 \cdot 5{,}1 \cdot 10^{-7} = 1{,}7\,\% \cdot 10^{-4},$$

$$T(L_2, E_2) = 1{,}44e^{-5{,}12\,\mathrm{nm}^{-1}\,L_2} = 1{,}44e^{-5{,}12\,\mathrm{nm}^{-1}\cdot 1\,\mathrm{nm}} = 1{,}44e^{-5{,}12} = 1{,}44 \cdot 5{,}98 \cdot 10^{-3} = 0{,}86\,\%.$$

Znaczenie

Na podstawie powyższych wyników możemy łatwo wywnioskować, że na prawdopodobieństwo tunelowania znacznie bardziej wpływa szerokość bariery niż energia tunelujących cząstek. We współczesnych zastosowaniach mamy możliwość manipulacji pojedynczymi atomami na podłożach metalicznych w celu stworzenia barier potencjału o szerokości ułamka nanometra i tym samym osiągania mierzalnych prądów tunelowych. Jednym z zastosowań dla tej technologii jest omawiany później skaningowy mikroskop tunelowy.

7.10 Sprawdź, czy rozumiesz. Proton o energii kinetycznej 1 eV pada na kwadratową barierę potencjału o wysokości 10 eV. Jeżeli dla protonu istniałoby takie samo prawdopodobieństwo transmisji co dla elektronu o identycznej energii, to jaki musiałby być stosunek szerokości barier napotykanych przez te cząstki?

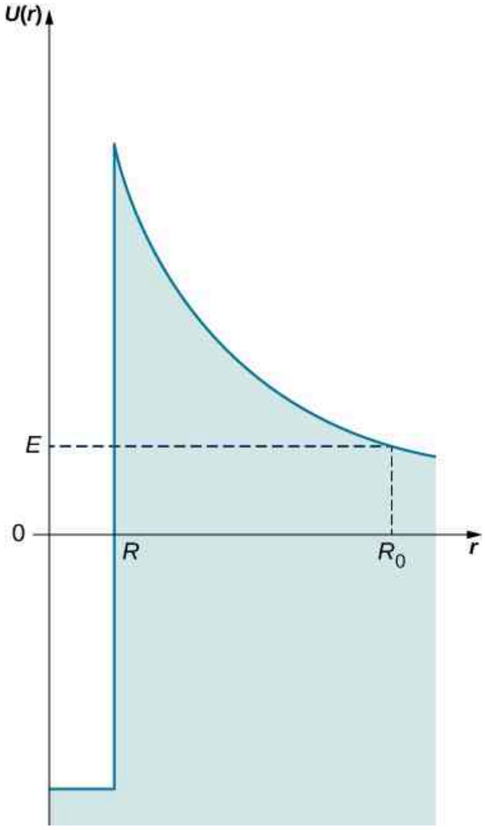
Rozpad promieniotwórczy

W 1928 roku Gamow stwierdził, że tunelowanie kwantowe jest odpowiedzialne za rozpad promieniotwórczy jąder atomowych. Zaobserwował on, że niektóre izotopy toru, uranu i bizmutu ulegają rozpadowi z emisją cząstek α (które są zjonizowanymi atomami helu lub prościej – jądrami helu). Podczas emitowania cząstek α jądro atomowe zmienia się w inne jądro, o liczbach neutronów i protonów mniejszych o dwa. Cząstki α emitowane przez ten sam izotop mają w przybliżeniu takie same energie kinetyczne. Jeśli chodzi o energie cząstek α różnych izotopów, to wahają się one od 4 MeV do 9 MeV, a więc są one tego samego rzędu wielkości. Jednak na tym kończą się podobieństwa izotopów.

Gdy przyjrzymy się okresom półtrwania (jest to czas, w którym radioaktywna cząstka traci połowę liczby jąder atomowych) różnych izotopów, bardzo się one od siebie różnią. Jako przykład weźmy okres półtrwania polonu-214, który wynosi 160 μs, i uranu, wynoszący 4,5 miliarda lat. Gamow wyjaśniał istnienie tych różnic przez wprowadzenie modelu jądra atomowego jako sferycznego pudełka, w którym cząstki α mogą odbijać się między ścianami jak cząstki swobodne. Pudełko tworzy niezwykle silna sferyczna bariera potencjału. Jednak grubość bariery nie jest nieskończona, a więc istnieje niezerowe prawdopodobieństwo przeniknięcia cząstek przez ściany pudełka. Gdy cząstka opuści jądro, zaczyna działać na nią odpychająca siła elektrostatyczna Coulomba i cząstka oddala się od jądra. To zagadnienie zilustrowano na Rysunku 7.19. Szerokość bariery potencjału zależy od energii kinetycznej E cząstki i jest odległością między promieniem jądra oznaczonym jako E a punktem R_0, w którym cząstka α przechodzi przez barierę, wobec czego $L = R_0 - R$. W odległości R_0 energia kinetyczna musi przynajmniej równoważyć elektrostatyczną energię odpychania $E = e^2 / (4\pi\varepsilon_0) \cdot Z / R_0$, gdzie $+Ze$ jest ładunkiem jądra atomowego. W ten sposób możemy oszacować szerokość bariery

$$L = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Z}{E} - R.$$

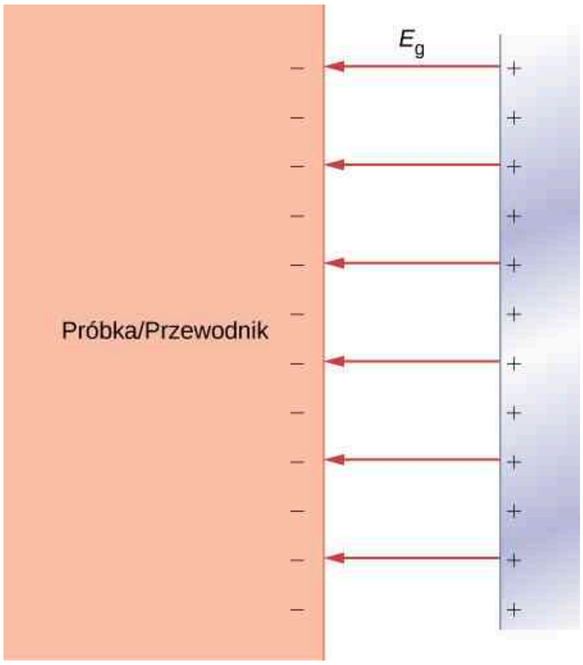
Łatwo zauważyć, że im większa jest energia cząstki α, tym węższa jest bariera, przez którą musi przetunelować. Wiemy też, że szerokość bariery jest najważniejszym czynnikiem wpływającym na prawdopodobieństwo tunelowania. A zatem cząstki α o znacznej energii kinetycznej mają dużą szansę na opuszczenie jądra atomowego, a co za tym idzie, okres ich połowicznego rozpadu jest krótszy. Zauważmy, że proces ten nie jest liniowy, co oznacza, że mała zmiana w energii cząstki α znacząco wpływa na prawdopodobieństwo jej tunelowania i skrócenie okresu półtrwania. To tłumaczy, dlaczego okres półtrwania polonu o energii $8\ \mathrm{MeV}$ jest diametralnie krótszy niż w przypadku uranu, który emituje cząstki o energii $4\ \mathrm{MeV}$.



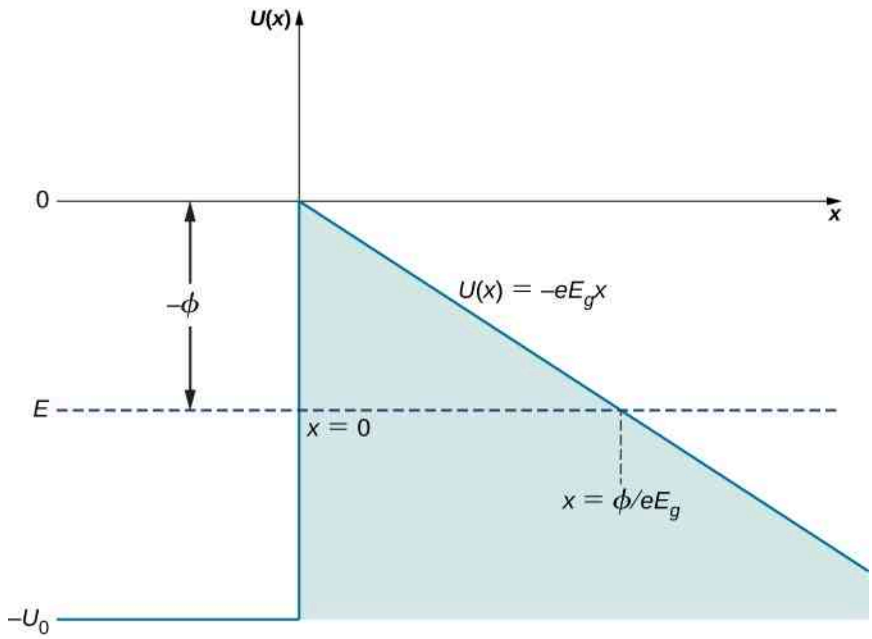
Rysunek 7.19 Bariera potencjału dla cząstki α związanej w jądrze atomowym. Aby wydostać się z jądra, cząstka α o energii E musi przetunelować przez barierę potencjału z punktu odległego o R do punktu odległego o R_0 od środka jądra.

Emisja polowa

Emisja polowa (ang. **field emission**) jest procesem związanym z emisją elektronów z przewodzących powierzchni, w obecności silnych zewnętrznych pól elektrycznych przyłożonych w kierunku normalnym do powierzchni (Rysunek 7.20). Jak wiemy z wcześniejszych rozdziałów o polach elektrycznych, pod wpływem zewnętrznego pola elektrycznego elektrony w przewodniku poruszają się w kierunku jego powierzchni i zostają tam, dopóki przykładane pole elektryczne nie jest zbyt silne. W takim przypadku mówimy, że elektron w przewodniku cechuje pewien stały potencjał $V(x) = -V_0$, gdzie x odnosi się do wnętrza przewodnika. W sytuacji przedstawionej na Rysunku 7.20, gdzie zewnętrzne pole elektryczne jest jednorodne i wynosi E_g, jeśli elektron znalazłby się poza przewodnikiem w odległości x od jego powierzchni, jego energia potencjalna będzie wynosiła $V(x) = -eE_g x$; w tym przypadku x opisuje odległość od powierzchni przewodnika. Przyjmując dla powierzchni przewodnika wartość zero ($x = 0$), możemy przedstawić energię potencjalną elektronów przewodnictwa w metalu jako barierę potencjału pokazaną na Rysunku 7.21. Przy braku zewnętrznego pola elektrycznego energia potencjalna zamienia się w barierę schodkową opisaną przez $V(x \le 0) = -V_0$ i $V(x > 0) = 0\ \mathrm{V}$.



Rysunek 7.20 Zewnętrzne pole elektryczne przyłożone w kierunku normalnym do powierzchni przewodnika. Przy silnym polu zewnętrznym elektrony z przewodnika mogą się od niego oddzielić i zacząć się oddalać.



Rysunek 7.21 Bariera potencjału przy powierzchni metalicznego przewodnika, w obecności jednorodnego zewnętrznego pola elektrycznego E_g przyłożonego w kierunku prostopadłym do powierzchni przewodnika. Energia potencjalna zamienia się w barierę schodkową, gdy zewnętrzne pole zostaje usunięte. Pracę wyjścia dla metalu oznaczamy jako ϕ.

Gdy zewnętrzne pole elektryczne jest silne, elektrony przy powierzchni przewodnika mogą się od niego odłączyć i zacząć przyspieszać wzdłuż linii pola elektrycznego, w kierunku przeciwnym do działającego pola, oddalając się od przewodnika. Mówiąc krótko, elektrony przewodnictwa mogą uciec z powierzchni przewodnika. Emisja polowa może być rozumiana jako tunelowanie elektronów z pasma przewodnictwa przez barierę potencjału na powierzchni przewodnika. Mechanizm zjawiska jest bardzo podobny do emisji cząstek α.

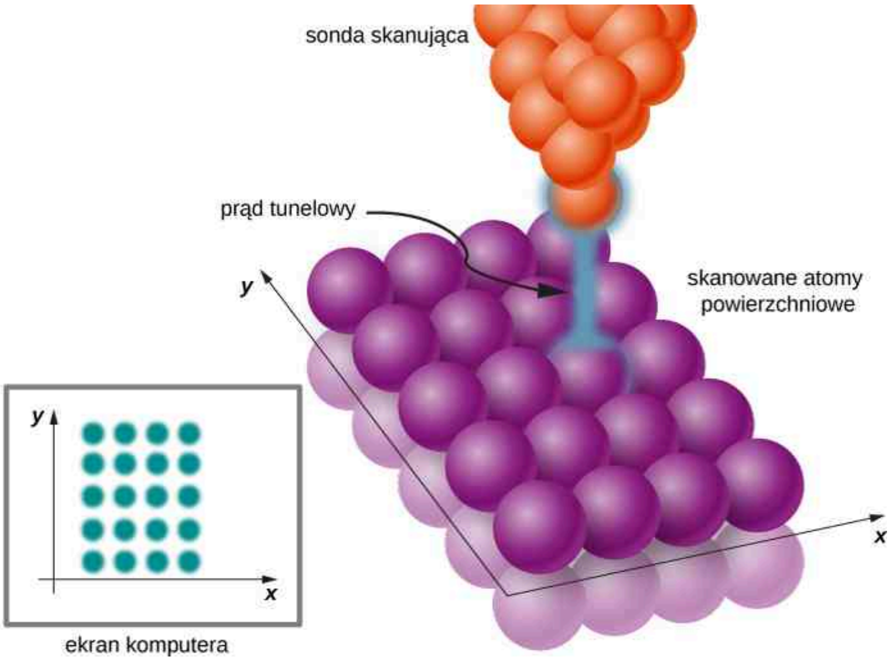
Rozważmy przykład elektronu przewodnictwa o energii kinetycznej E (średnia energia kinetyczna elektronu w metalu odpowiada pracy wyjścia ϕ metalu i możemy ją zmierzyć dzięki omówionemu wcześniej efektowi fotoelektrycznemu (Fotony i fale materii), natomiast zewnętrzne pole elektryczne można przybliżyć jako jednorodne

pole elektryczne E_g. Szerokość L bariery potencjału, którą musi pokonać elektron na Rysunku 7.21, przedstawiono poziomą, przerywaną linią $V(x) = E$, przebiegającą od $x = 0$ do przecięcia z $V(x) = -eE_g x$, a więc szerokość tę możemy przedstawić jako

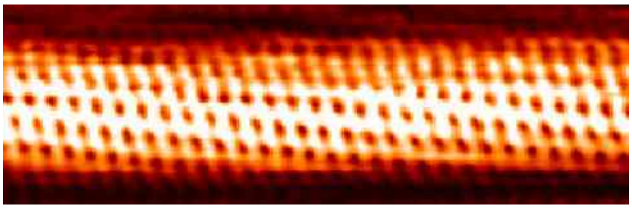
$$L = \frac{E}{eE_g} = \frac{\phi}{eE_g}.$$

Łatwo zauważyć, że szerokość bariery jest odwrotnie proporcjonalna do natężenia zewnętrznego pola elektrycznego. Gdy zwiększamy natężenie pola, bariera potencjału staje się bardziej stroma, a jej grubość maleje, tymczasem prawdopodobieństwo tunelowania rośnie wykładniczo. Elektrony, które przeniknęły przez barierę potencjału, tworzą prąd (prąd tunelowy), który można zmierzyć ponad powierzchnią przewodnika. Natężenie prądu tunelowego jest proporcjonalne do prawdopodobieństwa tunelowania, to zaś zależy nieliniowo od grubości bariery L, której wartość może być zmieniona przez odpowiednie dopasowanie E_g. A zatem prąd tunelowy da się modulować za pomocą zmiany zewnętrznego pola E_g. Gdy natężenie pola jest stałe, natężenie prądu zmienia się w zależności od wartości L.

Opisane powyżej tunelowanie elektronów przy powierzchni metali jest podstawą fizyczną działania **skaningowego mikroskopu tunelowego** (ang. **scanning tunneling microscope, STM**), wynalezionego w 1981 roku przez **Gerda Binniga (ur. 1947)** i **Heinricha Rohrera (1933–2013)**. STM składa się najczęściej z sondy skanującej (jest to zwykle igła wykonana z wolframu, platyny z irydem lub złota), stolika piezoelektrycznego, odpowiedzialnego za pozycjonowanie sondy (zazwyczaj od $0{,}4\ \text{nm}$ do $0{,}7\ \text{nm}$ ponad powierzchnią próbki; jej ruch odbywa się w płaszczyźnie XY), i komputera, na którym można oglądać otrzymany obraz. Do badanej próbki przyłożone jest stałe napięcie, a podczas ruchu sondy nad powierzchnią próbki (Rysunek 7.22) rejestrowany jest prąd tunelowy dla kolejnych położeń igły względem próbki. Natężenie prądu zależy od prawdopodobieństwa tunelowania elektronów z powierzchni próbki do igły, co z kolei jest uwarunkowane wysokością sondy nad próbką. Badając prąd tunelowy, możemy określić wysokość sondy nad powierzchnią próbki. Badania prowadzone przy użyciu mikroskopu tunelowego mają bardzo dużą rozdzielczość: $0{,}001\ \text{nm}$, co stanowi $1\ \%$ średniego promienia atomu. W ten sposób możemy obserwować pojedyncze atomy na powierzchni próbki, jak w przypadku nanorurki węglowej przedstawionej na Rysunku 7.23.



Rysunek 7.22 W mikroskopie STM próbkę, do której przyłożone jest stałe napięcie, skanuje sonda poruszająca się nad jej powierzchnią. Gdy koniec sondy zbliża się do atomów powierzchniowych, elektrony mogą tunelować z powierzchni próbki do sondy. Natężenie prądu w konkretnym punkcie (x, y) dostarcza informacji na temat chwilowej wysokości sondy nad próbką. W ten sposób może powstać niezwykle dokładna mapa powierzchni próbki. Obrazy otrzymane za pomocą STM są przetwarzane i wyświetlane na ekranie komputera. Obraz STM pozwala wyznaczyć topografię powierzchni próbek różnych materiałów i wskazać, na ile jest płaska, a na ile pagórkowata.

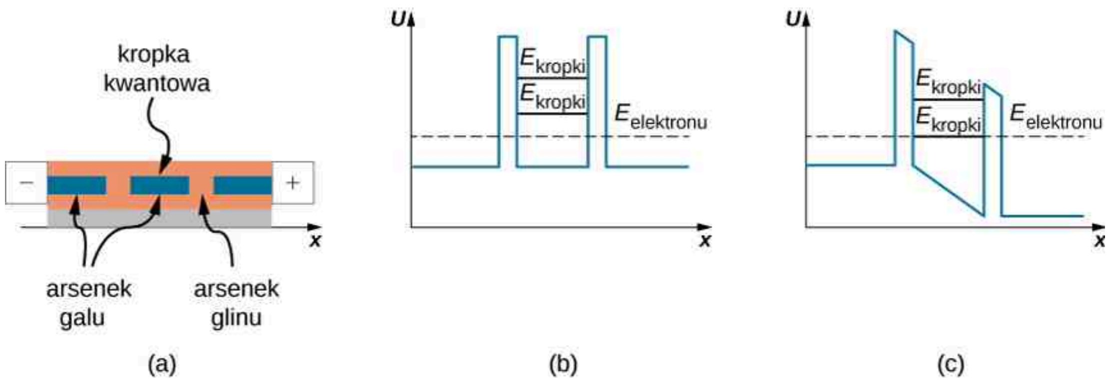


Rysunek 7.23 Obraz nanorurki węglowej otrzymany za pomocą STM. Rozdzielczość rzędu pojedynczych atomów pozwala na niezwykle dokładne badanie topografii materiałów. Obrazy otrzymane za pomocą STM są w skali odcieni szarości, kolor dodaje się podczas obróbki.

Tunelowanie rezonansowe

Tunelowanie kwantowe ma wiele zastosowań w urządzeniach półprzewodnikowych, takich jak elementy obwodów elektronicznych czy układów scalonych projektowanych w skali nano, stąd też termin **nanotechnologia** (ang. **nanotechnology**). Jako przykład rozważmy diodę (element elektroniczny, który sprawia, że płynący przez nią prąd będzie się różnie zachowywał w zależności od jego kierunku), która może być zbudowana za pomocą złącza pomiędzy dwoma różnymi półprzewodnikami. W takiej **diodzie tunelowej** (ang. **tunnel diode**) elektrony tunelują przez pojedynczą barierę potencjału na granicy dwóch półprzewodników. Na obszarze złącza prąd tunelowy zmienia się nieliniowo razem z przyłożonym potencjałem i może szybko zmaleć dla wysokiego napięcia, co jest odmienne od tradycyjnego podejścia zgodnego z prawem Ohma. Takie zachowanie (spowodowane tunelowaniem) jest niezwykle pożądane w superszybkich urządzeniach elektronicznych.

Istnieją nanourządzenia wykorzystujące **tunelowanie rezonansowe** (ang. **resonant tunneling**) elektronów przez bariery potencjału w **kropkach kwantowych** (ang. **quantum dot**). Kropka kwantowa jest małym obszarem nanokryształu półprzewodnikowego, który jest hodowany np. na krysztale krzemu lub arsenku glinu. Rysunek 7.24 (a) przedstawia kropkę kwantową arsenku galu wkomponowaną w strukturę wafla arsenku glinu. Kropka kwantowa zachowuje się jak studnia potencjału o skończonej wysokości (przedstawiona na Rysunku 7.24 (b)), która ma dwie bariery potencjału na granicy obszaru kropki. Podobnie jak w przypadku cząstki w pudełku (czyli nieskończonej studni potencjału) niższe stany energetyczne cząstki kwantowej zamkniętej w skończonej studni potencjału są skwantowane. Różnica między cząstką zamkniętą w pudełku a przypadkami studni potencjału leży w nieskończonej liczbie stanów energetycznych i związaniu cząstki z wnętrzem pudełka, gdy cząstka w studni potencjału posiada skończoną liczbę stanów energetycznych i może przetunelować przez bariery potencjału na brzegach studni. A zatem kropka kwantowa jest studnią potencjału, jak przedstawiono na rysunku poniżej, gdzie energia elektronu jest skwantowana i oznaczona jako E_{kropki} . Gdy energia elektronu $E_{\text{elektronu}}$ znajdującego się poza studnią nie zgadza się z energią E_{kropki} dostępną na obszarze kropki kwantowej, nie może on przetunelować przez obszar kropki i prąd nie przepływa przez taki element elektroniczny, nawet po przyłożeniu napięcia. Jednak gdy napięcie jest zmienione w taki sposób, że jedna z barier potencjału się obniża, tak że energie elektronu i obszaru kropki są zgodne, jak przedstawiono w części (c), elektron może przepłynąć przez kropkę. Zwiększając napięcie, możemy przerwać przepływ prądu przez ponowne rozdzielenie poziomów energetycznych. Słowo rezonans wskazuje, że w **rezonansowej diodzie tunelowej** (ang. **resonant-tunneling diode**) tunelowanie (a więc i przepływ prądu) zachodzi jedynie, gdy energia elektronu odpowiada energii na obszarze kropki, co może być osiągnięte przez modulację przyłożonego potencjału. Diody takie stosowane są jako ultraszybkie nanoprzełączniki.



Rysunek 7.24 Rezonansowa dioda tunelowa. (a) Kropka kwantowa arsenku galu osadzona w arsenku glinu. (b) Studnia potencjału składająca się z dwóch barier potencjału, bez przyłożonego napięcia. Energie elektronu i kropki nie są zgodne, a więc prąd nie płynie. (c) Studnia potencjału kropki kwantowej z przyłożonym napięciem. Odpowiednie modulowanie napięcia zmienia poziom bariery potencjału, dzięki czemu energie elektronu i kropki są zgodne, co powoduje tunelowanie elektronów.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 7

KLUCZOWE POJĘCIA

bariera potencjału (ang. potential barrier) ograniczony obszar (zazwyczaj niewielki), w którym energia potencjalna przyjmuje wartości większe niż w jego otoczeniu

czynnik zależny od czasu dla funkcji falowej (ang. time-modulation factor) czynnik $e^{-i\omega t}$, będący operatorem ewolucji w czasie, przez który mnoży się funkcję falową niezależną od czasu, kiedy są od niego niezależne również energia potencjalna cząstki i całkowita energia układu

dioda tunelowa (ang. tunnel diode) układ zawierający półprzewodnikowe złącze p–n, w którym oba obszary półprzewodnika typu p i n są silnie domieszkowane atomami innych pierwiastków, będących akceptorami (zabierają elektrony i generują dziury, czyli dodatnio naładowane elektrony w roli nośników ładunku w półprzewodniku, tworząc obszar p) i donorami (generują elektrony w półprzewodniku – tak powstaje obszar n); pomiędzy obszarami p i n występuje tunelowanie przez istniejącą tam barierę

emisja polowa (ang. field emission) emisja elektronu z powierzchni przewodnika, gdy w kierunku normalnym do powierzchni przewodnika przyłożone jest silne zewnętrzne pole elektryczne

energetyczna liczba kwantowa (ang. energy quantum number) indeks, który etykietuje dozwolone stany energetyczne

energia stanu podstawowego (ang. ground state energy) najniższy stan energetyczny obiektu kwantowego

funkcja antysymetryczna (ang. anti-symmetric function) funkcja spełniająca warunek $f(x) = -f(-x)$

funkcja falowa (ang. wave function) zespolona funkcja (a niekiedy wektor zespolonych funkcji) reprezentująca kwantowy stan cząstki lub układu kwantowego

funkcja nieparzysta (ang. odd function) funkcja spełniająca warunek $f(x) = -f(-x)$

funkcja parzysta (ang. even function) funkcja spełniająca warunek $f(x) = f(-x)$

funkcja zespolona (ang. complex function) funkcja o dziedzinie w zbiorze liczb rzeczywistych i o wartościach w zbiorze liczb zespolonych (taka funkcja zawiera część rzeczywistą i część urojoną)

gęstość prawdopodobieństwa (ang. probability density) kwadrat modułu funkcji falowej cząstki

główna liczba kwantowa (ang. principal quantum number) energetyczna liczba kwantowa

interpretacja Borna (ang. Born interpretation) postuluje, że kwadrat modułu funkcji falowej jest gęstością prawdopodobieństwa, a sama funkcja falowa nie jest bezpośrednio mierzalna

interpretacja kopenhaska (ang. Copenhagen interpretation) postuluje, że kiedy nie jest dokonywany pomiar ani obserwacja, cząstka znajduje się w stanie superpozycji jej wszystkich możliwych stanów kwantowych

kolaps funkcji falowej (ang. wave function collapse) patrz redukcja stanów

kropka kwantowa (ang. quantum dot) obiekt o bardzo małych rozmiarach geometrycznych umieszczony w innym krysztale (np. nanokryształ umieszczony w innym krysztale półprzewodnikowym) i zachowujący się jak studnia potencjału dla elektronów

nanotechnologia (ang. nanotechnology) technologia opierająca się na manipulacji obiektami w skali nano, takimi jak pojedyncze molekuły i atomy, w celu wytworzenia nanourządzeń, np. obwodów zintegrowanych

nieskończona prostokątna studnia potencjału (ang. infinite square well) funkcja potencjału, która jest skończona (może w szczególnej sytuacji być wyzerowana) w określonym obszarze i nieskończona w kierunku dodatnim wszędzie poza nim

operator położenia (ang. position operator) operator kwantowy odpowiadający położeniu cząstki (obserwabli położeniowej)

operator pędu (ang. momentum operator) operator kwantowy odpowiadający pędowi cząstki (obserwabli pędowej)

paczka falowa (ang. wave packet) superpozycja wielu płaskich fal materii reprezentująca rozchodzenie się pewnego lokalnego (a zatem i zlokalizowanego) zaburzenia w przestrzeni

poziomy energetyczne (ang. energy levels) stany skwantowanej energii (zazwyczaj reprezentowane w postaci poziomych linii na poglądowych diagramach energetycznych)

prawdopodobieństwo transmisji (ang. transmission probability) prawdopodobieństwo tego, że cząstka kwantowa przejdzie przez daną barierę potencjału (np. z lewej strony na prawą)

prawdopodobieństwo tunelowania (ang. tunneling probability) patrz prawdopodobieństwo transmisji

redukcja stanów (ang. state reduction) hipotetyczny proces, w którym w wyniku oddziaływania związanego z obserwacją dana zaobserwowana cząstka kwantowa (lub układ kwantowy) wybiera zgodnie z wynikiem pomiaru jeden ze stanów kwantowych, z jakimi była w superpozycji przed pomiarem; często opisuje się to też jako kolaps funkcji falowej cząsteczki (zawierającej początkowo superpozycję wielu stanów na jeden stan)

rezonansowa dioda tunelowa (ang. resonant-tunneling diode) dioda powstała przez umieszczenie kropki kwantowej w materiale (np. kropki kwantowej arsenku galu osadzonej w arsenku glinu), gdzie tunelowanie przez kropkę kwantową (a więc i przepływ prądu) zachodzi jedynie, gdy energia elektronu odpowiada energii na obszarze kropki

równanie Schrödingera niezależne od czasu (ang. Schrödinger's time-independent equation) równanie w funkcji położenia pozwalające na znalezienie funkcji falowej cząstki kwantowej; ta funkcja falowa musi zostać pomnożona przez czynnik zależny od czasu w celu otrzymania funkcji falowej zależnej od czasu

równanie Schrödingera zależne od czasu (ang. Schrödinger's time-dependent equation) równanie w funkcji czasu i położenia pozwalające na znalezienie funkcji falowej cząstki kwantowej

skaningowy mikroskop tunelowy (ang. scanning tunneling microscope, STM) urządzenie wykorzystujące zjawisko tunelowania kwantowego na powierzchniach metalicznych do otrzymywania obrazów struktur w skali nano

stan fali stojącej (ang. standing wave state) stan stacjonarny, w którym części rzeczywista i urojona $\Psi(x, t)$ oscylują jak fala stojąca (często modelowana przy użyciu sumy funkcji sinus i cosinus z odpowiednimi współczynnikami)

stan stacjonarny (ang. stationary state) stan, w którym funkcja gęstości prawdopodobieństwa $|\Psi(x, t)|^2$ nie zmienia się w czasie

tunelowanie kwantowe (ang. quantum tunneling) zjawisko, w którym cząstka może przenikać przez barierę potencjału o wysokości większej niż całkowita energia cząstki

tunelowanie rezonansowe (ang. resonant tunneling) tunelowanie elektronów przez studnię potencjału o skończonej wysokości występujące tylko wtedy, gdy energia elektronów dokładnie odpowiada poziomowi energetycznemu w studni, co występuje w kropkach kwantowych

wartość oczekiwana (ang. expectation value) średnia wartość wielkości fizycznej przy założeniu dużej liczby cząstek o tej samej funkcji falowej

warunek normalizacji (ang. normalization condition) wymaga, aby gęstość prawdopodobieństwa po całej przestrzeni stanów wynosiła 1

zasada korespondencji (ang. correspondence principle) w przypadku dużych energii przewidywania mechaniki kwantowej są zgodne z mechaniką klasyczną

zasada nieoznaczoności czasu i energii (ang. energy-time uncertainty principle) relacja energii i czasu w jednoczesnych pomiarach energii stanu kwantowego i jego czasu istnienia

zasada nieoznaczoności Heisenberga (ang. Heisenberg's uncertainty principle) postuluje ograniczenie dokładności jednoczesnych pomiarów położenia i pędu; głosi, że gdy niepewność pomiaru położenia jest niska, niepewność pomiaru pędu jest duża i vice versa

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Warunek normalizacji w jednym wymiarze	$P(-\infty, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x, t)|^2 \, \mathrm{d}x = 1$
Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w wąskim przedziale położenia $(x, x + \mathrm{d}x)$ w jednym wymiarze	$P(x, x + \mathrm{d}x) = \Psi^*(x, t)\,\Psi(x, t)\,\mathrm{d}x$
Wartość oczekiwana położenia w jednym wymiarze dla cząstki kwantowej	$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x, t) x \,\Psi(x, t)\,\mathrm{d}x$
Zasada nieoznaczoności Heisenberga dla położenia i pędu cząstki kwantowej	$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

Zasada nieoznaczoności Heisenberga dla energii i czasu dla cząstki kwantowej	$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$
Równanie Schrödingera zależne od czasu	$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x,t)\Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$
Ogólna postać jednowymiarowej funkcji falowej dla rówania Schrödingera niezależnego od czasu, gdzie następuje separacja współrzędnej położenia i czasu i gdzie możemy wyróżnić operator ewolucji stanu kwantowego w czasie (czynnik fazowy $e^{-i\omega t}$)	$\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$
Równanie Schrödingera niezależne od czasu (stan stacjonarny)	$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$
Równanie Schrödingera dla swobodnej cząstki o stałej energii E (np. elektron poruszający się w próżni ze stałą prędkością)	$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \psi(x)}{\mathrm{d}x^2} = E\psi(x)$
Stany energetyczne cząstki kwantowej w pudełku o długości L, numerowane przez główne liczby kwantowe n	$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, n = 1, 2, 3, \ldots$
Stan kwantowy dla cząstki w pudełku o długości L i nieprzenikliwych ścianach (nieskończonej barierze potencjału poza obszarem L), odpowiadający energii własnej i numerowanej przez liczby naturalne n	$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), n = 1, 2, 3, \ldots$
Funkcja energii potencjalnej dla oscylatora harmonicznego (klasycznego i kwantowego)	$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$
Stacjonarne równanie Schrödingera w przypadku kwantowego oscylatora harmonicznego	$-\frac{\hbar}{2m} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 \psi(x)}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x)$
Spektrum energetyczne kwantowego oscylatora harmonicznego	$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Funkcje falowe kwantowego oscylatora harmonicznego związane z energią E_n	$\psi_n(x) = N_n e^{-\beta^2 x^2/2} H_n(\beta x), n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Definicja prostokątnej bariery potencjału wyznaczonej przez wysokość V_0 oraz szerokość L	$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{dla } x < 0 \\ V_0, & \text{dla } 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{dla } x > L \end{cases}$
Definicja współczynnika transmisji cząstki kwantowej o energii E, padającej na prostokątną barierę potencjału, jako kwadrat modułu funkcji falowej padającej $\lvert\psi_{\text{pad}}(x)\rvert^2$ i przechodzącej $\lvert\psi_{\text{prze}}(x)\rvert^2$	$T(L,E) = \frac{\lvert\psi_{\text{prze}}(x)\rvert^2}{\lvert\psi_{\text{pad}}(x)\rvert^2}$
Defincja parametru β współczynnika transmisji dla prostokątnej bariery potencjału	$\beta^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$
Współczynnik transmisji dla kwantowej cząstki z energią E przechodzącej przez prostokątną barierę potencjału	$T(L,E) = \frac{1}{\cosh^2 \beta L + (\gamma/2)^2 \sinh^2 \beta L}$
Przybliżenie współczynnika transmisji przez prostokątną barierę potencjału dla dużych wartości $L\beta$	$T(L,E) = 16\frac{E}{V_0}\left(1 - \frac{E}{V_0}\right)e^{-2\beta L}$

PODSUMOWANIE

7.1 Funkcje falowe

- W mechanice kwantowej stan układu fizycznego jest reprezentowany przez funkcję falową.
- W interpretacji Borna kwadrat modułu funkcji falowej jest równy gęstości prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w konkretnym punkcie przestrzeni, a sama funkcja falowa nie jest nigdy mierzalna, natomiast mierzalne są wartości własne operatorów działających na nią.
- Funkcja falowa powinna być zazwyczaj znormalizowana, zanim zostanie użyta do dalszych obliczeń.

- Wartość oczekiwana jest średnią wartością wielkości fizycznej; do jej wyliczenia używa się funkcji falowej i całkowania.

7.2 Zasada nieoznaczoności Heisenberga

- Zasada nieoznaczoności Heisenberga mówi, że niemożliwe jest jednoczesne określenie położenia i pędu cząstki z dowolnie dużą dokładnością. Iloczyn niepewności pomiarowych położenia i pędu cząstki jest zawsze równy $\hbar / 2$ lub większy.
- Ograniczenia narzucone przez tę zasadę nie mają nic wspólnego z jakością aparatury pomiarowej, ale wynikają z falowej natury materii.
- Niepewność pomiaru energii i czasu pokrywa się z obserwacjami eksperymentalnymi dowodzącymi, że stan kwantowy istniejący tylko przez krótką chwilę nie może mieć zdefiniowanej energii.

7.3 Równanie Schrödingera

- Równanie Schrödingera jest podstawowym równaniem falowym mechaniki kwantowej. Pozwala nam to na dokonywanie przewidywań obserwabli fizycznych jakie są mierzone w eksperymencie fizycznym.
- Kiedy cząstka porusza się w potencjale niezależnym od czasu, rozwiązaniem równania Schrödingera jest iloczyn niezależnej od czasu funkcji falowej i czynnika zależnego od czasu.
- Równanie Schrödingera może być używane do opisu zjawisk fizycznych zachodzących na poziomie mikroskopowym i makroskopowym. W praktyce stosuje się zazwyczaj do opisu zjawisk w mikrościwecie.

7.4 Cząstka kwantowa w pudełku

- Poziomy energetyczne cząstki kwantowej w pudełku określamy przez rozwiązanie niezależnego od czasu równania Schrödingera.
- W celu rozwiązania niezależnego od czasu równania Schrödingera dla cząstki w pudełku (w nieskończonej studni potencjału) należy znaleźć rozwiązania funkcji falowej dla cząstki swobodnej, a następnie dopasować funkcję falową tak, by zerowała się na ścianach pudełka (nazywamy to zastosowaniem warunków brzegowych do rozwiązań równania Schrödingera).
- Stany energetyczne cząstki w pudełku są skwantowane i indeksowane przez główne liczby kwantowe, będące liczbami całkowitymi.
- Interpretacja kwantowa różni się znacząco od interpretacji klasycznej, kiedy cząstka znajduje się w niskoenergetycznym stanie z niską liczbą kwantową, czyli jest bliska stanu podstawowego.
- W przypadku dużych liczb kwantowych, kiedy cząstka kwantowa znajduje się w bardzo pobudzonym stanie, kwantowy opis cząstki w pudełku zgadza się z opisem klasycznym w myśl zasady korespondencji Bohra.

7.5 Kwantowy oscylator harmoniczny

- Kwantowy oscylator harmoniczny jest modelem zbudowanym na zasadzie podobieństwa do klasycznego oscylatora harmonicznego (stosujemy ten sam hamiltonian, ale wprowadzamy dla położenia i pędu operatory). Pozwala on na modelowanie zachowania wielu procesów fizycznych zachodzących w mikroświecie, takich jak wibracje molekularne.
- Dozwolone energie (spektrum energii) kwantowych oscylatorów są dyskretne i równomiernie rozłożone (kolejne poziomy energetyczne są oddalone o tę samą wartość). Odległość pomiędzy kolejnymi poziomami energetycznymi jest stała i równa $\hbar\omega$, czyli wartości stałej Plancka pomnożonej przez ω (gdzie $\omega = \sqrt{k / m}$, a k to stała sprężystości).
- Wartość energii stanu podstawowego jest większa od zera. Oznacza to, że w przeciwieństwie do oscylatora klasycznego kwantowy oscylator harmoniczny nigdy nie znajduje się w stanie spoczynku. Nawet na dnie studni potencjału cząstka (np. atom czy elektron) poddana jest fluktuacjom kwantowym. Spektakularnym tego przykładem jest ciekły hel, który nie osiąga fazy stałej (występuje ona jedynie w warunkach wysokiego ciśnienia).
- Stany stacjonarne to stany o niezależnej w czasie energii. Ich przykładami są rozwiązania niezależnego w czasie równania Schrödingera.
- W mechanice kwantowej stacjonarne stany kwantowe posiadające niezerową gęstość prawdopodobieństwa występują również w obszarach poza klasycznymi punktami zwrotnymi (punktami, w których klasyczna cząstka odbija się od bariery potencjału, gdy $E \leq V$).

- Gdy kwantowy oscylator harmoniczny znajduje się w stanie podstawowym, można go znaleźć z największym prawdopodobieństwem w obszarze minimum energetycznego studni kwantowej. Jest to obszar o najmniejszym prawdopodobieństwie dla oscylatora klasycznego.
- Dla wysokich liczb kwantowych ruch cząstek kwantowych zaczyna się upodabniać do ruchu oscylatorów klasycznych, co zgadza się z zasadą korespondencji Bohra (opis kwantowy odtwarza opis klasyczny na poziomie pewnych energii i dla pewnych rozmiarów geometrycznych, wykraczających poza rozmiary typowe dla mikroświata).

7.6 Tunelowanie cząstek przez bariery potencjału

- Cząstka kwantowa znajdująca się po jednej stronie bariery potencjału o skończonej szerokości i wysokości może przeniknąć przez barierę i pojawić się po drugiej stronie. To zjawisko nazywane jest „tunelowaniem kwantowym”. Nie posiada ono odpowiednika w fizyce klasycznej.
- Aby obliczyć prawdopodobieństwo tunelowania kwantowego, należy założyć znajomość wartości energii padającej cząstki i rozwiązać stacjonarne równanie Schrödingera w celu określenia funkcji falowej wewnątrz bariery i poza nią. Prawdopodobieństwo przetunelowania jest równe stosunkowi kwadratów amplitudy za barierą i amplitudy funkcji falowej przed barierą.
- Prawdopodobieństwo przetunelowania zależy od energii padającej cząstki w stosunku do wysokości i szerokości bariery potencjału. Zależy od szerokości w sposób nieliniowy (wykładniczy) tak, że nawet małe jej zmiany powodują znacznie większą zmianę w prawdopodobieństwie transmisji.
- Zjawisko tunelowania kwantowego rządzi rozpadem radioaktywnym. Wykorzystywane jest też w wielu współczesnych technologiach, takich jak skaningowy mikroskop tunelowy i nanoelektronika. SMT pozwala na obrazowanie pojedynczych atomów na powierzchniach metalicznych. Urządzenia wykorzystujące tunelowanie elektronów zrewolucjonizowały elektronikę i pozwalają na budowanie szybkich urządzeń elektronicznych o małych rozmiarach.

PYTANIA

7.1 Funkcje falowe

1. Jaka jest jednostka fizyczna funkcji falowej $\Psi(x, t)$? Jaka jest jednostka fizyczna kwadratu modułu tej funkcji falowej?

2. Czy kwadrat modułu funkcji falowej $(\Psi^* (x, t) \Psi(x, t))$ może być liczbą ujemną? Wyjaśnij.

3. Jaką wielkość fizyczną reprezentuje funkcja falowa elektronu?

4. Jakie jest fizyczne znaczenie funkcji falowej cząstki?

5. Jakie jest znaczenie wyrażenia „wartość oczekiwana”? Wyjaśnij.

7.2 Zasada nieoznaczoności Heisenberga

6. Jeśli formalizm mechaniki kwantowej jest dokładniejszy od mechaniki klasycznej, to dlaczego nie używamy mechaniki kwantowej do opisu ruchu skaczącej żaby? Wyjaśnij.

7. Czy długość fali de Broglie’a cząstki może być znana dokładnie? Czy położenie takiej cząstki może być wyznaczone precyzyjnie?

8. Czy możemy zmierzyć energię cząstki swobodnej z dowolną dokładnością?

9. Czy możemy zmierzyć zarówno pozycję, jak i pęd cząstki z dowolną dokładnością?

7.3 Równanie Schrödingera

10. Jaka jest różnica między funkcją falową $\psi(x, y, z)$ a funkcją falową $\Psi(x, y, z, t)$ dla tej samej cząstki?

11. Czy jeśli cząstka kwantowa znajduje się w stanie stacjonarnym, to oznacza, że się nie porusza?

12. Wyjaśnij różnicę pomiędzy równaniami Schrödingera zależnym od czasu i niezależnym od czasu.

13. Załóżmy, że funkcja falowa jest nieciągła w którymś punkcie i ciągła poza nim. Czy taka funkcja może reprezentować stan kwantowy jakiejś cząsteczki fizycznej? Dlaczego? Dlaczego nie?

7.4 Cząstka kwantowa w pudełku

14. Używając modelu cząstki kwantowej w pudełku, wyjaśnij, jak dostępne poziomy energetyczne cząstki powiązane są z rozmiarami pudełka.

15. Czy jest możliwe, żeby pomiar energii cząstki kwantowej w pudełku dał wynik niższy niż wartość energii stanu podstawowego? Jaka jest najwyższa wartość energii tej cząstki, jaką można zmierzyć?

16. Dla cząstki kwantowej w pudełku pierwszym sta-

nem wzbudzonym jest stan $\Psi_2(x, t)$. Ma on wartość zerową dokładnie w środku pudełka, więc prawdopodobieństwo znalezienia w tym miejscu cząstki jest równe zeru. Wyjaśnij, co jest niepoprawnego w następującym rozumowaniu: „Jeśli prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w punkcie środkowym pudełka wynosi zero, to cząstka nigdy nie znajduje się w tym punkcie? Jak w takim razie jest możliwe, że cząstka przechodzi przez ten punkt, przemieszczając się z lewej strony pudełka na prawą?”.

7.5 Kwantowy oscylator harmoniczny

17. Czy możliwe jest zmierzenie wartości energii kwantowego oscylatora harmonicznego $0{,}75\hbar\omega$? Dlaczego? Dlaczego nie? Wyjaśnij.

18. Wyjaśnij związek między hipotezą Plancka o skwantowaniu energii a energią kwantowego oscylatora harmonicznego.

19. Jeśli klasyczny oscylator harmoniczny może znajdować się w stanie spoczynku, to dlaczego kwantowy oscylator harmoniczny nigdy go nie osiąga? Czy ten fakt narusza zasadę korespondencji Bohra?

20. Używając modelu cząstki kwantowej w pudełku lub modelu oscylatora kwantowego, wyjaśnij znaczenie fizyczne zasady korespondencji Bohra.

21. Czy możemy jednocześnie zmierzyć położenie i energię oscylatora kwantowego? Dlaczego? Dlaczego nie?

7.6 Tunelowanie cząstek przez bariery potencjału

22. Jeżeli elektron i proton o tej samej energii kinetycznej napotkają barierę potencjału o tej samej szerokości i wysokości, to który z nich łatwiej przez nią przetuneluje? Dlaczego?

23. Co bardziej zmniejsza prawdopodobieństwo tunelowania kwantowego: dwukrotne zwiększenie wysokości bariery czy dwukrotne zmniejszenie energii kinetycznej cząstki?

24. Wyjaśnij różnicę pomiędzy potencjałem cząstki w pudle potencjału a potencjałem kropki kwantowej.

25. Czy cząstka kwantowa może uciec z nieskończonej studni potencjału, takiej jak w pudełku? Dlaczego? Dlaczego nie?

26. Dioda tunelowa i dioda rezonansowo-tunelowa: działanie obydwu opiera się na tej samej zasadzie fizycznej tunelowania kwantowego. Jaka jest istotna różnica między nimi?

ZADANIA

7.1 Funkcje falowe

27. Oblicz $|\Psi(x, t)|^2$ dla funkcji falowej $\Psi(x, t) = \psi(x) \sin(\omega t)$, gdzie ω jest stałą rzeczywistą.

28. Oblicz $|f(x, y)|^2$ dla funkcji zespolonej $f(x, y) = (x - iy) / (x + iy)$.

29. Które z następujących funkcji falowych mogą być funkcją cząstki zdolnej do poruszania się wzdłuż całej osi liczb rzeczywistych? Dlaczego?

a. $\psi(x) = Ae^{-x^2}$;
b. $\psi(x) = Ae^{-x}$;
c. $\psi(x) = A \operatorname{tg} x$;
d. $\psi(x) = A(\sin x)/x$;
e. $\psi(x) = Ae^{-|x|}$.

30. Dana jest cząstka o masie m poruszająca się wzdłuż osi x, o stanie kwantowym reprezentowanym przez następującą funkcję falową

$$\Psi(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Axe^{-\alpha x} e^{-iEt/\hbar}, & x \geq 0, \end{cases}$$

gdzie $\alpha = 2 \cdot 10^{10}\ \text{m}^{-1}$.

a. Znajdź stałą normalizacji;
b. Wskaż prawdopodobieństwo tego, że cząstka znajduje się w przedziale $0 \leq x \leq L$;
c. Oblicz wartość oczekiwaną położenia;
d. Oblicz wartość oczekiwaną energii kinetycznej.

31. Funkcja falowa cząstki o masie m jest równa

$$\psi(x) = \begin{cases} A \cos(\alpha x), & -\frac{\pi}{2\alpha} \leq x \leq \frac{\pi}{2\alpha}, \\ 0, & \text{w pozostałych przypadkach,} \end{cases}$$

gdzie $\alpha = 10^{10}\ \text{m}^{-1}$.

a. Znajdź stałą normalizacji;
b. Wskaż prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przedziale $0 \leq x \leq 0{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$;
c. Oblicz średnie położenie czastki;
d. Oblicz średni pęd cząstki;
e. Oblicz średnią energię kinetyczną cząstki w przedziale $-0{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{m} \leq x \leq 0{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$.

7.2 Zasada nieoznaczoności Heisenberga

32. Pomiar prędkości cząstki α został dokonany z dokładnością do $0{,}02\ \text{mm/s}$. Jaka jest minimalna niepewność jej położenia?

33. Gaz atomów helu o temperaturze $273\,\mathrm{K}$ znajduje się w sześciennym pojemniku o boku długości $25\,\mathrm{cm}$.
a. Jaka jest minimalna niepewność składowych pędu atomów helu?
b. Jaka jest minimalna niepewność składowych prędkości?
c. Określ stosunek niepewności z (b) do średniej prędkości atomu w każdym z kierunków.

34. Przy założeniu, że niepewność składowej y położenia protonu wynosi $2\,\mathrm{pm}$, oblicz minimalną niepewność jednoczesnego pomiaru składowej y prędkości tego protonu. Ile wynosi ona dla składowej x?

35. Pewna niestabilna cząstka elementarna ma energię resztkową równą $80{,}41\,\mathrm{GeV}$ i niepewność pomiaru tej energii równą $2{,}06\,\mathrm{GeV}$. Oszacuj czas życia tej cząsteczki.

36. Atom w stanie metastabilnym ma czas życia $5{,}2\,\mathrm{ms}$. Oblicz minimalną niepewność pomiaru energii w stanie wzbudzonym.

37. Pomiary wskazują, że atom pozostaje w stanie wzbudzonym przez $50\,\mathrm{ns}$, a potem przechodzi do stanu podstawowego, jednocześnie emitując foton o energii $2{,}1\,\mathrm{eV}$.
a. Oszacuj niepewność wyznaczenia częstotliwości tego fotonu;
b. Jaką część średniej częstotliwości tego fotonu ona stanowi?

38. Elektron jest uwięziony w obszarze o długości $0{,}1\,\mathrm{nm}$ (rzędu wielkości atomu wodoru), a jego energia kinetyczna równa jest energii stanu podstawowego atomu wodoru w modelu Bohra ($13{,}6\,\mathrm{eV}$).
a. Ile wynosi minimalna niepewność pomiaru pędu? Jaką część pędu ona stanowi?
b. Ile wynosiłaby niepewność energii kinetycznej elektronu, jeśli pęd byłby równy odpowiedzi z podpunktu (a)? Jaką część energii by stanowiła?

7.3 Równanie Schrödingera

39. Użyj Równania 7.23 i Równania 7.24, by udowodnić, że $k^2 = \omega^2 / c^2$.

40. Pokaż, że $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$ jest rozwiązaniem spełniającym zależne od czasu równanie Schrödingera.

41. Pokaż, że $\Psi(x,t) = A\sin(kx-\omega t)$ i $\Psi(x,t) = A\cos(kx-\omega t)$ nie spełniają zależnego od czasu równania Schrödingera.

42. Udowodnij, że kiedy $\Psi_1(x,t)$ i $\Psi_2(x,t)$ są rozwiązaniami zależnego od czasu równania Schrödingera, a A i B są liczbami, to funkcja $\Psi(x,t) = A\Psi_1(x,t) + B\Psi_2(x,t)$, będąca superpozycją tych funkcji, również jest rozwiązaniem.

43. Cząstka o masie m opisana jest następującą funkcją falową: $\psi(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$, gdzie A, B i k są stałymi. Zakładając, że cząstka jest swobodna, udowodnij, że funkcja ta jest rozwiązaniem stacjonarnego równania Schrödingera dla niej. Oblicz też energię, jaką posiada cząstka w tym stanie.

44. Oblicz wartość oczekiwaną energii kinetycznej dla cząstki w stanie $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Jaki wniosek możesz wyciągnąć z tego rozwiązania?

45. Oblicz kwadrat wartości oczekiwanej kwadratu pędu dla cząstki znajdującej się w stanie $\Psi(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Jakie wnioski możesz wyciągnąć z tego rozwiązania?

46. Swobodny proton ma funkcję falową daną przez $\Psi(x,t) = A\exp\left[i\left(5{,}02\cdot 10^{11}x - 8\cdot 10^{15}t\right)\right]$. Współczynnik przy x wyrażony jest w m^{-1}, a współczynnik przy t w s^{-1}. Oblicz pęd i energię cząstki.

7.4 Cząstka kwantowa w pudełku

47. Załóż, że elektron w atomie może być potraktowany tak, jakby był uwięziony w pudle potencjału o szerokości $2\,\mathrm{Å}$. Ile wynosi energia stanu podstawowego tego elektronu? Porównaj swój wynik z energią stanu podstawowego atomu wodoru w modelu Bohra.

48. Załóż, że proton wewnątrz jądra atomowego może być traktowany tak, jakby był uwięziony wewnątrz pudełka o boku długości $10\,\mathrm{pm}$.
a. Ile wynoszą energie tego protonu, kiedy jego stan odpowiada $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$?
b. Ile wynoszą energie fotonów emitowanych, kiedy proton przechodzi z pierwszego i drugiego stanu wzbudzonego do stanu podstawowego?

49. Elektron uwięziony w pudełku ma energię stanu podstawowego równą $2{,}5\,\mathrm{eV}$. Jaka jest szerokość tego pudełka?

50. Ile wynosi energia stanu podstawowego (wyrażona w eV) protonu uwięzionego w jednowymiarowym pudełku o rozmiarach jądra atomu uranu, którego promień wynosi około $15\,\mathrm{fm}$?

51. Jaka jest energia stanu podstawowego (wyrażona w eV) cząstki α uwięzionej w jednowymiarowym pudełku o rozmiarach jądra atomu uranu, którego promień wynosi około $15\,\mathrm{fm}$?

52. Aby elektron uwięziony w jednowymiarowym pudełku przeskoczył z pierwszego do trzeciego stanu wzbudzonego niezbędne jest dostarczenie mu energii $20\,\mathrm{eV}$. Jaka jest szerokość tego pudełka?

53. Elektron jest uwięziony w pudełku o boku długości $0{,}15\,\mathrm{nm}$. Elektron ten emituje foton przy przejściu z pierwszego stanu wzbudzonego do stanu podstawo-

wego. Oblicz długość fali wyemitowanego fotonu.

54. Jeśli energia pierwszego stanu wzbudzonego elektronu w pudełku jest równa $25\,\text{eV}$, to ile wynosi szerokość tego pudełka?

55. Elektron uwięziony w pudełku emituje fotony, a najdłuższa fala pochodząca od niego, jaka została zarejestrowana, miała długość $500\,\text{nm}$. Jaka jest szerokość tego pudełka?

56. Cząsteczkowy wodór H_2 przechowywany jest w temperaturze $300\,\text{K}$ w sześciennym pudełku o krawędzi długości $25\,\text{cm}$. Załóż, że możesz traktować molekuły, jakby poruszały się w jednowymiarowym pudełku.

a. Oblicz energię stanu podstawowego cząsteczki wodoru w tym pojemniku;
b. Załóż, że cząsteczki mają energię termiczną daną równaniem $k_B T / 2$, i oblicz liczbę kwantową n odpowiadającą tej energii termicznej.

57. Elektron uwięziony jest w pudełku o boku $0{,}25\,\text{nm}$.

a. Narysuj diagram poziomów energetycznych tego elektronu dla pierwszych pięciu poziomów energetycznych;
b. Oblicz długości fal fotonów emitowanych przy przejściu elektronu z czwartego stanu wzbudzonego do drugiego stanu wzbudzonego, z drugiego stanu wzbudzonego do stanu podstawowego i z trzeciego stanu wzbudzonego do pierwszego stanu wzbudzonego.

58. Elektron uwięziony w pudełku ma energię stanu podstawowego równą $2\,\text{eV}$.
a. Oblicz szerokość tego pudełka;
b. Ile energii należy dostarczyć do tego elektronu, aby przeszedł on do pierwszego stanu wzbudzonego?
c. Jeśli elektron przejdzie ze stanu wzbudzonego do stanu podstawowego przy jednoczesnej emisji fotonu o energii $30\,\text{eV}$, to jaka jest liczba kwantowa tego stanu wzbudzonego?

7.5 Kwantowy oscylator harmoniczny

59. Udowodnij, że stany kwantowego oscylatora o dwóch najniższych energiach $\psi_0(x)$ i $\psi_1(x)$ z Równania 7.77 spełniają Równanie 7.75.

60. Jeśli energia stanu podstawowego prostego oscylatora harmonicznego jest równa $1{,}25\,\text{eV}$, to jaka jest częstotliwość ruchu tego oscylatora?

61. Jaka jest częstotliwość drgań kwantowego oscylatora harmonicznego, który przy przejściu ze stanu $(n+1)$ do stanu n emituje foton o długości fali $450\,\text{nm}$?

62. Wibracje wodoru cząsteczkowego H_2 można modelować przez prosty oscylator harmoniczny o stałej sprężystości $k = 1{,}13 \cdot 10^3\,\text{N}/\text{m}$ i masie $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg}$.
a. Ile wynosi częstotliwość drgań cząsteczki?
b. Ile wynosi energia i długość fali fotonu wyemitowanego przy przejściu cząsteczki z trzeciego stanu wzbudzonego do drugiego stanu wzbudzonego?

63. Cząsteczka o masie $0{,}03\,\text{kg}$ oscyluje na sprężynie z częstotliwością $4\,\text{Hz}$. W punkcie równowagowym ma prędkość $0{,}6\,\text{m}/\text{s}$. Oblicz główną liczbę kwantową stanu, w którym znajduje się ta cząsteczka, zakładając, że jej stan energetyczny jest stabilny.

64. Oblicz wartość oczekiwaną kwadratu położenia dla kwantowego oscylatora harmonicznego w stanie podstawowym. Wskazówka: $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}\,\text{d}x = \sqrt{\pi}\left(2a^{3/2}\right)^{-1}$.

65. Oblicz wartość oczekiwaną energii potencjalnej kwantowego oscylatora harmonicznego w stanie podstawowym. Użyj tych obliczeń do wyliczenia wartości oczekiwanej energii kinetycznej.

66. Udowodnij, że $\psi_1(x)$ dana przez Równanie 7.77 spełnia równanie Schrödingera dla kwantowego oscylatora harmonicznego.

67. Oszacuj wartość energii stanu podstawowego oscylatora harmonicznego przy użyciu zasady nieoznaczoności Heisenberga. Zacznij od założenia, że niepewności pomiarowe Δx i Δp mają minimalne dopuszczalne wartości. Zapisz Δp w funkcji Δx i załóż, że dla stanu podstawowego $x \approx \Delta x$ i $p \approx \Delta p$, a następnie zapisz wyrażenie na energię stanu podstawowego w funkcji x. Na końcu znajdź punkt minimum globalnego energii i odpowiadający mu argument.

68. Masa $0{,}25\,\text{kg}$ drga na sprężynie o stałej sprężystości $110\,\text{N}/\text{m}$. Oblicz wartość energii stanu podstawowego i separację pomiędzy kolejnymi poziomami energetycznymi. Wyniki przedstaw w dżulach i elektronowoltach. Czy efekty kwantowe są tutaj ważne?

7.6 Tunelowanie cząstek przez bariery potencjału

69. Udowodnij, że funkcja falowa
a. w Równaniu 7.88 spełnia Równanie 7.81;
b. w Równaniu 7.89 spełnia Równanie 7.83.

70. Elektron o energii $6\,\text{eV}$ uderza w barierę potencjału o wysokości $11\,\text{eV}$. Oblicz prawdopodobieństwo przetunelowania elektronu przez tę barierę, jeśli jej szerokość jest równa
a. $0{,}8\,\text{nm}$;
b. $0{,}4\,\text{nm}$.

71. Elektron o energii $5\,\text{eV}$ natrafia na barierę poten-

cjału o szerokości $0{,}6\ \mathrm{nm}$. Oblicz prawdopodobieństwo tunelowania elektronu przez tę barierę, jeśli jej wysokość wynosi

a. $7\ \mathrm{eV}$;
b. $9\ \mathrm{eV}$;
c. $13\ \mathrm{eV}$.

72. Elektron o energii $12\,\mathrm{eV}$ napotyka barierę potencjału o wysokości $15\,\mathrm{eV}$. Oblicz szerokość tej bariery, jeśli prawdopodobieństwo tunelowania przez nią elektronu jest równe $2{,}5\,\%$.

73. Cząstka kwantowa o początkowej energii kinetycznej równej $32\ \mathrm{eV}$ napotyka prostokątną barierę potencjału o wysokości $41\ \mathrm{eV}$ i szerokości $0{,}25\ \mathrm{nm}$. Oblicz prawdopodobieństwo tunelowania cząstki przez tę barierę, jeśli tą cząstką jest

a. elektron;
b. proton.

74. Prosty model rozpadu aktywnego zakłada, że cząsteczki α uwięzione są w jądrze przez jądrową studnię potencjału, której ściany są barierami potencjału o szerokości $2\ \mathrm{fm}$ i wysokości $30\ \mathrm{MeV}$. Oblicz prawdopodobieństwo tunelowania cząstki α przez te ściany, jeśli cząstki mają energię kinetyczną równą

a. $29\ \mathrm{MeV}$;
b. $20\ \mathrm{MeV}$.

Masa cząstki α jest równa $m = 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$.

75. Mion jest kwantową cząstką o masie około 200 razy większej od elektronu. Natrafia on na barierę potencjału o wysokości $10\,\mathrm{eV}$. Energia kinetyczna tego mionu wynosi $5{,}5\,\mathrm{eV}$ i tylko około $0{,}1\,\%$ kwadratu amplitudy padającej funkcji falowej przenika przez barierę. Jaka jest szerokość tej bariery?

76. Ziarno piasku o masie $1\ \mathrm{mg}$ i energii kinetycznej $1\,\mathrm{J}$ napotyka barierę potencjału o wysokości $1{,}000\,001\,\mathrm{J}$ i szerokości $2500\ \mathrm{nm}$. Ile ziaren piasku musi średnio wpaść na tę barierę, zanim pojedyncze ziarno przetuneluje przez nią?

ZADANIA DODATKOWE

77. Udowodnij, że jeśli niepewność pomiaru położenia cząstki jest rzędu długości fali de Broglie'a tej cząstki, to niepewność pomiaru jej pędu jest rzędu wartości samego pędu.

78. Masę mezonu ρ wyznaczono na równą $770\,\mathrm{MeV} / c^2$ z niepewnością równą $100\,\mathrm{MeV} / c^2$. Oszacuj czas życia tego mezonu.

79. Cząstka o masie m jest uwięziona w pudełku o szerokości L. Jakie jest prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w obszarze o szerokości $0{,}02L$ wokół danego punktu x, jeśli cząstka znajduje się w pierwszym stanie wzbudzonym?

a. $x = 0{,}25L$;
b. $x = 0{,}4L$;
c. $x = 0{,}75L$;
d. $x = 0{,}9L$.

80. Cząstka w pudełku $[0; L]$ znajduje się w trzecim stanie wzbudzonym. Jakie są jej najbardziej prawdopodobne położenia?

81. Kula bilardowa o masie $0{,}2\ \mathrm{kg}$ odbija się od naprzeciwległych ścian $1{,}5$-metrowego stołu bez strat energii.

a. Jeśli bila znajduje się w stanie podstawowym, to ile lat potrzebuje na dotarcie od jednej ściany do drugiej? Możesz porównać wynik z wiekiem Wszechświata?
b. Ile energii należy dostarczyć bili, aby przeszła ona ze stanu podstawowego do pierwszego stanu wzbudzonego? Porównaj to z energią kinetyczną tej bili, poruszającej się z prędkością $2\,\mathrm{m} / \mathrm{s}$.

82. Oblicz wartość oczekiwaną kwadratu położenia cząstki uwięzionej w pudełku o szerokości L i znajdującej się w trzecim stanie wzbudzonym.

83. Rozważ nieskończoną prostokątną studnię potencjału o ścianach $x = 0$ i $x = L$. Udowodnij, że funkcja $\psi(x) = A \sin(kx)$ spełnia stacjonarne równanie Schrödingera dla cząstki w pudełku, tylko jeśli $k = \sqrt{2mE} / \hbar$. Wyjaśnij też, dlaczego ta funkcja może być funkcją falową tylko wtedy, gdy k jest całkowitą wielokrotnością π / L.

84. Rozważ nieskończoną prostokątną studnię potencjału o ścianach $x = 0$ i $x = L$. Wyjaśnij, dlaczego funkcja $\psi(x) = A \cos(kx)$ nie jest rozwiązaniem stacjonarnego równania Schrödingera dla cząstki w pudełku.

85. Atomy w sieci krystalicznej drgają prostym ruchem harmonicznym. Ile wynosi stała sprężystości sieci krystalicznej przy założeniu, że atom w sieci ma masę $9{,}4 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$ i przechodzi ze stanu podstawowego do pierwszego stanu wzbudzonego po absorpcji fotonu o długości fali $525\ \mathrm{\mu m}$?

86. Cząsteczka dwuatomowa zachowuje się jak kwantowy oscylator harmoniczny o stałej sprężystości $12\,\mathrm{N} / \mathrm{m}$ i masie $5{,}6 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{kg}$.

a. Jaka jest długość fali fotonu wyemitowanego przy przejściu tej cząsteczki z trzeciego stanu wzbudzonego do drugiego stanu wzbudzonego?
b. Oblicz wartość energii poziomu podstawowego dla tej drgającej cząsteczki dwuatomowej.

87. Elektron o energii kinetycznej $2\ \mathrm{MeV}$ natrafia na

barierę potencjału o wysokości $16\,\text{MeV}$ i szerokości $2\,\text{nm}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tunelowania elektronu przez tę barierę?

88. Wiązka protonów o energii kinetycznej $2\,\text{MeV}$ każdy pada na barierę potencjału o wysokości $20\,\text{MeV}$ i szerokości $1{,}5\,\text{fm}$. Jaki procent tej wiązki przetuneluje na drugą stronę bariery?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

89. Elektron w długiej cząsteczce organicznej używanej w laserach barwnikowych zachowuje się w przybliżeniu jak cząstka kwantowa w pudełku o szerokości $4{,}18\,\text{nm}$. Oblicz częstotliwość fotonów wyemitowanych przy przejściu tego elektronu z pierwszego stanu wzbudzonego do stanu podstawowego i z drugiego stanu wzbudzonego do pierwszego stanu wzbudzonego.

90. W skaningowym mikroskopie tunelowym odległość igły od podłoża jest mierzona z ogromną precyzją, gdyż natężenie prądu tunelujących elektronów jest niezwykle czułe na zmiany tej odległości. Zakładając, że natężenie prądu tunelujących elektronów jest wprost proporcjonalne do prawdopodobieństwa tunelowania i że prawdopodobieństwo tunelowania może być przybliżone funkcją wykładniczą $e^{-2\beta L}$ z $\beta = 10\,\text{nm}^{-1}$, oblicz stosunek natężenia tunelujących elektronów z igłą $0{,}5\,\text{nm}$ nad powierzchnią do natężenia tunelujących elektronów z igłą $0{,}515\,\text{nm}$ nad powierzchnią badanej próbki.

91. Jeśli skaningowy mikroskop tunelowy jest zdolny do wykrywania zmian wysokości powierzchni próbki do $0{,}002\,\text{nm}$, to jakie prawdopodobieństwo, wyrażone w procentach, przetunelowania przez elektrony elektronika mikroskopu musi być zdolna wykryć? Załóż, że natężenie prądu tunelujących elektronów ma cechy wymienione w poprzednim zadaniu.

92. Użyj zasady nieoznaczoności Heisenberga, by oszacować energię stanu podstawowego cząsteczki drgającej na sprężynie z częstością kołową $\omega = \sqrt{k / m}$, gdzie k jest stałą sprężystości, a m masą.

93. Załóż, że nieskończona studnia potencjału rozciąga się od $-L / 2$ do $+L / 2$. Rozwiąż niezależne od czasu równanie Schrödingera, by określić dozwolone poziomy energetyczne i stany stacjonarne cząstki o masie m uwięzionej w tej studni. Pokaż też, że te rozwiązania można otrzymać poprzez przekształcenie układu odniesienia $x' = x - L / 2$ w rozwiązaniach dla nieskończonej studni potencjału rozciągającej się od 0 do L.

94. Cząstka o masie m jest uwięziona w pudełku o szerokości L i znajduje się w swoim pierwszym stanie wzbudzonym $\psi_2(x)$.

a. Określ średnie położenie (czyli wartość oczekiwaną położenia);

b. Gdzie jest najwyższe prawdopodobieństwo znalezienia cząsteczki?

8 | STRUKTURA ATOMOWA



Rysunek 8.1 NGC 1763 jest mgławicą emisyjną w Wielkim Obłoku Magellana, będącym galaktyką satelitarną naszej galaktyki – Drogi Mlecznej. Obserwowane kolory emitowanego promieniowania można wyjaśnić poprzez zastosowanie idei mechaniki kwantowej do struktury atomowej. Źródło: NASA, ESA i Josh Lake

Treść rozdziału

Wstęp

W tym rozdziale wykorzystamy mechanikę kwantową do badania struktury i właściwości atomów. Poznamy idee i koncepcje, które są niezbędne do zrozumienia bardziej złożonych układów, takich jak cząsteczki, kryształy i metale. Aby pogłębić nasze rozumienie atomów, bazujemy na pojęciach i koncepcjach, które już wcześniej poznaliśmy, takich jak model jądrowy Rutherforda, model Bohra atomu wodoru oraz hipoteza fal de Broglie'a.

Na Rysunku 8.1 przedstawiona jest mgławica emisyjna NGC 1763 w małej galaktyce zwanej Wielkim Obłokiem Magellana, która jest satelitą naszej galaktyki, czyli Drogi Mlecznej. Światło ultrafioletowe od gorących gwiazd jonizuje atomy wodoru w mgławicy. Gdy protony i elektrony ulegają rekombinacji, emitowane jest promieniowanie o różnych częstotliwościach. Szczegóły tego procesu, rozpatrywane w tym rozdziale, można poprawnie przewidzieć dzięki zastosowaniu mechaniki kwantowej.

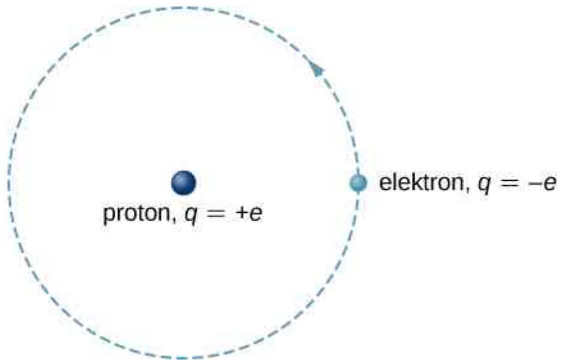
8.1 | Atom wodoru

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać atom wodoru, używając funkcji falowej, gęstości prawdopodobieństwa, całkowitej energii i orbitalnego momentu pędu;
- fizycznego znaczenia każdej z liczb kwantowych (n, l, m_l) atomu wodoru;
- rozróżniać opisy Bohra i Schrödingera atomu wodoru;
- stosować liczby kwantowe do otrzymania istotnych informacji dotyczących atomu wodoru.

Atom wodoru jest najprostszym atomem w przyrodzie, a więc jest dobrym punktem wyjścia do badania atomów i ich struktury. Atom wodoru składa się z pojedynczego, ujemnie naładowanego elektronu, który krąży wokół dodatnio naładowanego protonu (Rysunek 8.2). W modelu Bohra elektron porusza się wokół protonu po idealnie kołowej orbicie na skutek działania przyciągającej siły Coulomba. Ponieważ proton ma masę około 1800 razy większą niż elektron, porusza się on znacznie słabiej pod wpływem siły pochodzącej od elektronu (analogicznie do układu Ziemia–Słońce, w którym Słońce porusza się nieznacznie w reakcji na siłę wywieraną na nie przez Ziemię). Wyjaśnienie tego efektu za pomocą prawa Newtona jest podane w rozdziale Fotony i fale materii.



Rysunek 8.2 Przedstawienie modelu Bohra dla atomu wodoru.

Przy założeniu, że proton jest nieruchomy, skupimy się na ruchu elektronu. W polu elektrycznym protonu funkcja energii potencjalnej elektronu ma postać

$$E_{\mathrm{p}}(r) = -k\frac{e^2}{r}, \tag{8.1}$$

gdzie $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, a r jest odległością pomiędzy elektronem i protonem. Jak stwierdziliśmy wcześniej, siła działająca na ciało w polu potencjalnym jest równa ujemnemu gradientowi energii potencjalnej. W przypadku atomu wodoru siła pomiędzy elektronem a protonem jest przyciągającą siłą Coulomba.

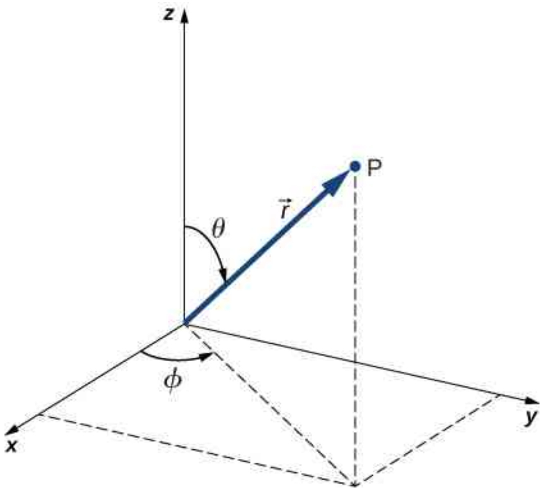
Należy zauważyć, że energia potencjalna $E_{\mathrm{p}}(r)$ nie zmienia się w czasie. W rezultacie równanie Schrödingera atomu wodoru redukuje się do dwóch prostych równań: jedno z nich zależy tylko od zmiennych przestrzennych (x, y, z), a drugie tylko od czasu (t). (Rozdzielenie funkcji falowej na część zależną tylko od zmiennych przestrzennych i część zależną od czasu w przypadku niezależnej od czasu energii potencjalnej zostało omówione w rozdziale Mechanika kwantowa). Będzie nas obecnie interesować równanie Schrödingera zależne wyłącznie od zmiennych przestrzennych

$$\frac{-\hbar^2}{2m_{\mathrm{e}}}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) - k\frac{e^2}{r}\psi = E\psi, \tag{8.2}$$

gdzie $\psi = \psi(x, y, z)$ jest funkcją falową elektronu w trójwymiarowej przestrzeni, m_{e} oznacza masę elektronu, a E – jego całkowitą energię. Przypomnijmy jedynie, że całkowita funkcja falowa $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ jest iloczynem przestrzennej funkcji falowej $\psi = \psi(x, y, z)$ i funkcji falowej zależnej od czasu $\phi = \phi(t)$.

Dodatkowo, niezależna od czasu energia potencjalna $E_{\mathrm{p}}(r)$ jest funkcją sferycznie symetryczną. To sugeruje,

że możemy rozwiązać równanie Schrödingera łatwiej, jeśli wprowadzimy współrzędne sferyczne (r, θ, ϕ) zamiast współrzędnych prostokątnych (x, y, z). Układ współrzędnych sferycznych jest przedstawiony na Rysunku 8.3. W układzie tym zmienna r jest współrzędną radialną, równą odległości punktu P od początku układu, współrzędna θ jest kątem polarnym (względem pionowej osi z), a ϕ jest kątem azymutalnym (względem osi x). Zależność pomiędzy współrzędnymi sferycznymi oraz współrzędnymi prostokątnymi ma postać $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$.



Rysunek 8.3 Związek pomiędzy sferycznym układem współrzędnych i prostokątnym układem współrzędnych.

Współczynnik $r \sin\theta$ jest wartością rzutu wektora na płaszczyznę xy. Współrzędne x i y otrzymuje się, rzutując ten wektor odpowiednio na osie x i y. Odwrotna transformacja daje

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right), \phi = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Równanie falowe Schrödingera dla atomu wodoru we współrzędnych sferycznych można znaleźć w bardziej zaawansowanych podręcznikach fizyki współczesnej i nie będziemy rozpatrywać go tutaj szczegółowo. Jednakże można pokazać, że ze względu na symetrię sferyczną $E_p(r)$ równanie to sprowadza się do trzech prostych równań – dla każdej z trzech współrzędnych r, θ i ϕ. Rozwiązania dla funkcji falowej niezależnej od czasu zapisywane są jako iloczyn trzech funkcji

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi),$$

gdzie R to funkcja radialna, zależna jedynie od współrzędnej radialnej r; Θ jest funkcją polarną, zależną jedynie od współrzędnej polarnej θ; a Φ jest funkcją jedynie azymutalnej współrzędnej ϕ. Dopuszczalne rozwiązania równania Schrödingera $\psi(r, \theta, \phi)$ numerowane są liczbami kwantowymi n, l, i m_l

$$\begin{aligned} n &: \quad \text{główna liczba kwantowa,} \\ l &: \quad \text{poboczna (orbitalna) liczba kwantowa,} \\ m_l &: \quad \text{magnetyczna liczba kwantowa.} \end{aligned}$$

Uzasadnienia tych nazw zostaną podane w następnym rozdziale. Funkcja radialna R zależy tylko od n i l, funkcja polarna Θ zależy tylko od l i m_l, a funkcja Φ tylko od m_l. Zależności poszczególnych funkcji od liczb kwantowych są oznaczone indeksami

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r)\Theta_{lm_l}(\theta)\Phi_{m_l}(\phi).$$

Nie wszystkie zestawy liczb kwantowych (n, l, m_l) są możliwe. Na przykład orbitalna liczba kwantowa l nie może być większa ani równa głównej liczbie kwantowej n $(l < n)$. Możliwe wartości liczb kwantowych wynoszą

$$\begin{aligned} n &= 1, 2, 3, \ldots \\ l &= 0, 1, 2, \ldots, n-1 \\ m_l &= -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, +l-1, +l. \end{aligned}$$

Dla stanu podstawowego (stanu o najniższej energii) $n = 1$, $l = 0$ i $m_l = 0$. Jest tylko jeden taki stan kwantowy; funkcją falową dla $n = 1$ jest ψ_{100}. Natomiast w przypadku $n = 2$ mamy

$$\begin{aligned} l &= 0, m_l = 0, \\ l &= 1, m_l = -1, 0, 1. \end{aligned}$$

Dlatego dla stanu $n = 2$ dozwolone są stany ψ_{200}, ψ_{21-1}, ψ_{210} i ψ_{211}. Przykładowe funkcje falowe dla atomu wodoru podano w Tabeli 8.1. Należy zauważyć, że niektóre z tych wyrażeń zawierają symbol i, który reprezentuje $\sqrt{-1}$, jednakże gdy funkcje falowe zostaną wykorzystane do obliczania odpowiednich prawdopodobieństw, w ostatecznym rozwiązaniu nie pojawią się liczby zespolone.

$n = 1, l = 0, m_l = 0$	$\psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$
$n = 2, l = 0, m_l = 0$	$\psi_{200} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right) e^{-r/(2a_0)}$
$n = 2, l = 1, m_l = -1$	$\psi_{21-1} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)} \sin\theta e^{-i\phi}$
$n = 2, l = 1, m_l = 0$	$\psi_{210} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)} \cos\theta$
$n = 2, l = 1, m_l = 1$	$\psi_{211} = \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)} \sin\theta e^{i\phi}$

Tabela 8.1 Funkcje falowe atomu wodoru.

Fizyczne znaczenie liczb kwantowych

Każda z trzech liczb kwantowych atomu wodoru (n, l, m_l) związana jest z określoną wielkością fizyczną. **Główna liczba kwantowa** (ang. **principal quantum number**) związana jest z całkowitą energią elektronu – E_n. Zgodnie z równaniem Schrödingera

$$E_n = -\frac{m_e k^2 e^4}{2^2} \frac{1}{n^2} = -E_0 \frac{1}{n^2}, \tag{8.3}$$

gdzie $E_0 = -13{,}6\ \text{eV}$. Zauważmy, że wyrażenie to jest identyczne ze wzorem określającym energię elektronu w modelu Bohra. Zatem, podobnie jak w modelu Bohra, elektron w określonym stanie energii nie wysyła promieniowania.

Przykład 8.1

Ile jest możliwych stanów?

Ile jest możliwych stanów kwantowych w atomie wodoru, odpowiadających głównej liczbie kwantowej $n = 3$? Jakie są energie tych stanów?

Strategia rozwiązania

Dla atomu wodoru o danej energii liczba dozwolonych stanów zależy od orbitalnego momentu pędu. Możemy policzyć te stany dla kolejnych wartości głównej liczby kwantowej $n = 1, 2, 3$. Ponieważ całkowita energia zależy jedynie od głównej liczby kwantowej, możemy wykorzystać Równanie 8.3 i główną liczbę kwantową liczonych stanów.

Rozwiązanie

Jeśli $n = 3$, dozwolone wartości l wynoszą 0, 1 i 2. Jeżeli $l = 0$, to $m_l = 0$ (1 stan). Jeżeli $l = 1$, to

$m_l = -1, 0, +1$ (3 stany), a jeśli $l = 2$, to $m_l = -2, -1, 0, +1, +2$ (5 stanów). W sumie mamy $1 + 3 + 5 = 9$ dozwolonych stanów. Ponieważ całkowita energia zależy tylko od głównej liczby kwantowej, $n = 3$, energia każdego z tych stanów jest równa

$$E_3 = -E_0 \frac{1}{3^2} = \frac{-13{,}6\,\text{eV}}{9} = -1{,}51\,\text{eV}.$$

Znaczenie

Elektron w atomie wodoru może znajdować się w stanach o różnej wartości orbitalnego momentu pędu, odpowiadających tej samej energii. Wraz ze wzrostem wartości orbitalnego momentu pędu rośnie liczba dozwolonych stanów o takiej samej energii.

Poboczna liczba kwantowa (ang. **angular momentum orbital quantum number**) l związana jest z orbitalnym momentem pędu elektronu w atomie wodoru. Teoria kwantowa mówi, że gdy atom wodoru jest w stanie ψ_{nlm_l} , wartość jego orbitalnego momentu pędu wynosi

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \tag{8.4}$$

gdzie

$$l = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Ten wynik odbiega od modelu Bohra, w którym kwantowanie momentu pędu następuje zgodnie z regułą $L = n\hbar$, gdzie $n = 1, 2, 3, \ldots$

Stany kwantowe z różnymi wartościami orbitalnego momentu pędu są rozróżniane za pomocą **notacji spektroskopowej** (ang. **spectroscopic notation** ; Tabela 8.2). Oznaczenia s, p, d, f wynikają z pierwszych historycznych prób sklasyfikowania atomowych linii widmowych (litery pochodzą odpowiednio od angielskich słów **sharp**, **principal**, **diffuse** i **fundamental**). Po f dalsze litery następują w porządku alfabetycznym.

Stan podstawowy atomu wodoru jest oznaczony jako $1s$, gdzie 1 oznacza poziom energii ($n = 1$) a s orbitalny moment pędu ($l = 0$). Gdy $n = 2$, l może być równe 0 lub 1. Stan $n = 2$, $l = 0$ jest oznaczony jako $2s$, stan $n = 2$, $l = 1$ oznaczamy jako $2p$. Gdy $n = 3$, l może wynosić 0, 1 lub 2, a możliwymi stanami są odpowiednio $3s$, $3p$ lub $3d$. Oznaczenia dla innych stanów kwantowych podano w Tabeli 8.3.

Magnetyczna liczba kwantowa (ang. **angular momentum projection quantum number**) m_l związana jest z kątem azymutalnym ϕ (patrz Rysunek 8.3) i z-ową składową momentu pędu elektronu, równą rzutowi momentu pędu na oś z. Składowa ta wynosi

$$L_z = m_l \hbar, \tag{8.5}$$

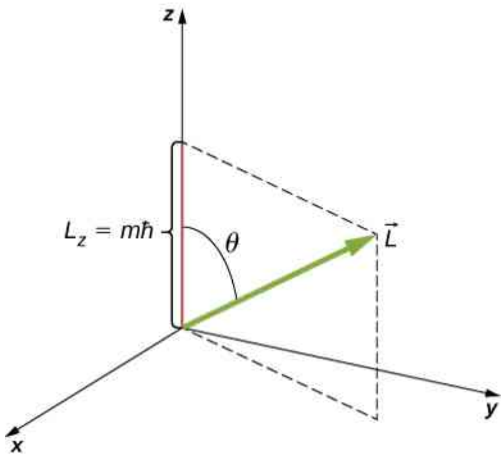
gdzie

$$m_l = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, +l-1, +l.$$

Z drugiej strony z-składowa orbitalnego momentu pędu, równa rzutowi momentu pędu na oś z, jest związana z wielkością orbitalnego momentu pędu zależnością

$$L_z = L\cos\theta, \tag{8.6}$$

gdzie θ jest kątem pomiędzy wektorem momentu pędu i wektorem osi z. Kierunek osi z określony jest doświadczalnie – to znaczy, że to eksperymentator decyduje o kierunku tej składowej. Na przykład kierunek osi z może być kierunkiem zewnętrznego pola magnetycznego. Zależność pomiędzy L_z i L przedstawiono na Rysunku 8.4.



Rysunek 8.4 Składowa z momentu pędu jest kwantowana własną liczbą kwantową m_l .

Orbitalna liczba kwantowa l	**Wartość momentu pędu**	**Stan**	**Nazwa spektroskopowa**
0	0	s	Sharp (ostra)
1	$\sqrt{2}h$	p	Principal (główna)
2	$\sqrt{6}h$	d	Diffuse (rozmyta)
3	$\sqrt{12}h$	f	Fundamental (podstawowa)
4	$\sqrt{20}h$	g	
5	$\sqrt{30}h$	h	

Tabela 8.2 Nazwy spektroskopowe i orbitalny moment pędu.

	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$	$l=5$
$n=1$	$1s$					
$n=2$	$2s$	$2p$				
$n=3$	$3s$	$3p$	$3d$			
$n=4$	$4s$	$4p$	$4d$	$4f$		
$n=5$	$5s$	$5p$	$5d$	$5f$	$5g$	
$n=6$	$6s$	$6p$	$6d$	$6f$	$6g$	$6h$

Tabela 8.3 Spektroskopowy opis stanów kwantowych.

Kwantowanie L_z równoważne jest kwantowaniu kąta θ. Podstawiając $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ za L i $m_l\hbar$ za L_z z Równania 8.6, otrzymujemy

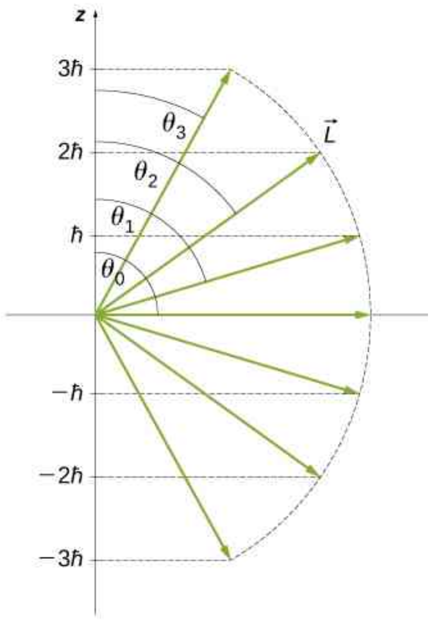
$$m_l\hbar = \sqrt{l(l+1)}\hbar\cos\theta. \tag{8.7}$$

Zatem kąt θ przyjmuje określone (skwantowane) wartości

$$\theta = \arccos\left(\frac{m_l}{\sqrt{l(l+1)}}\right). \tag{8.8}$$

Należy zauważyć, że zarówno kąt polarny (θ), jak i rzut wektora momentu pędu na oś z (L_z), są skwantowane.

Kwantowanie kąta polarnego dla stanu $l=3$ przedstawione jest na Rysunku 8.5. Wektor orbitalnego momentu pędu leży na powierzchni stożka o kącie rozwarcia 2θ, kąt θ jest kątem między osią stożka (osią z) a tworzącą, czyli jest połową kąta rozwarcia stożka (chyba że $m_l=0$, wtedy kąt $\theta=90°$, wektor natomiast jest prostopadły do osi z).



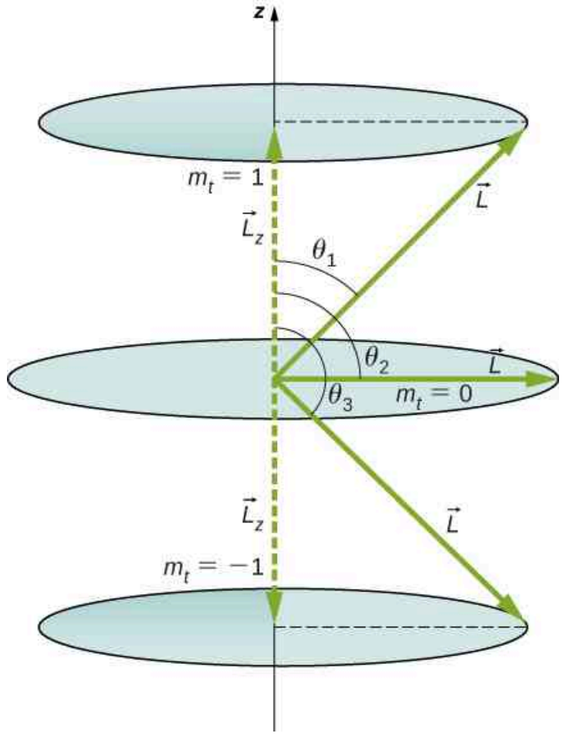
Rysunek 8.5 Kwantowanie orbitalnego momentu pędu. Każdy wektor leży na powierzchni stożka, którego wysokość oznaczono na osi z.

Szczegółowa analiza momentu pędu wykazuje, że nie możemy poznać jednocześnie wszystkich trzech jego składowych. Jeśli ustaliliśmy, że rzut momentu pędu na oś z (z-owa składowa orbitalnego momentu pędu) przyjmuje określoną wartość, która zależy od liczby kwantowej m_l, to nie możemy jednocześnie wyznaczyć rzutów momentu pędu na osie x i y, czyli jego składowych L_x i L_y. W rezultacie, dokładny kierunek wektora orbitalnego momentu pędu jest nieznany.

Przykład 8.2

Jakie są dozwolone kierunki wektora momentu pędu $\vec{L}$?

Obliczmy kąt, jaki tworzy wektor momentu pędu z osią z dla $l = 1$, jak to pokazano na Rysunku 8.6.



Rysunek 8.6 Składowa momentu pędu wzdłuż osi z (zdefiniowanej przez kierunek pola magnetycznego) może mieć tylko pewne określone wartości. Są one pokazane dla $l = 1$, dla którego $m_l = -1, 0, +1$. Kierunek wektora $\vec{L}$ jest skwantowany w tym sensie, że dozwolone są tylko niektóre kąty, jakie ten wektor tworzy z osią z.

Strategia rozwiązania

Wektory $\vec{L}$ i $\vec{L_z}$ (składowa wektorowa w kierunku z) tworzą trójkąt prostokątny, w którym $\vec{L}$ jest przeciwprostokątną, a $\vec{L_z}$ przyległym bokiem. Stosunek L_z do $L = \left|\vec{L}\right|$ jest cosinusem szukanego kąta. Wielkości L i L_z są dane przez

$$L = \sqrt{l\,(l+1)}\hbar \text{ i } L_z = m_l\hbar.$$

Rozwiązanie

Dla $l = 1$ m_l może wynosić $+1$, 0 lub -1. Zatem L ma wartość daną wzorem

$$L = \sqrt{l\,(l+1)}\hbar = \sqrt{2}\hbar,$$

a wielkość L_z może mieć trzy wartości

$$L_z = m_l\hbar = \begin{cases} \hbar, m_l = +1, \\ 0, m_l = 0, \\ -\hbar, m_l = -1. \end{cases}$$

Jak widać na Rysunku 8.6, $\cos\theta = L_z \,/\, L$, więc dla $m_l = +1$ mamy

$$\cos\theta_1 = \frac{L_z}{L} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707.$$

A zatem

$$\theta_1 = \arccos\,(0{,}707) = 45°.$$

Podobnie dla $m_l = 0$ znajdziemy $\cos\theta_2 = 0$. To daje

$$\theta_2 = \arccos\,0 = 90°.$$

Wreszcie dla $m_l = -1$ mamy

$$\cos\theta_3 = \frac{L_z}{L} = \frac{-\hbar}{\sqrt{2}\hbar} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -0{,}707,$$

więc

$$\theta_3 = \arccos\,(-0{,}707) = 135°.$$

Znaczenie

Kąty te są zgodne z przedstawionymi na rysunku. Jak widać, tylko kąt względem osi z jest skwantowany. Wektor momentu pędu L, o ile tworzy odpowiedni kąt z osią z, może wskazywać dowolny kierunek. W takim razie wektory orbitalnego momentu pędu leżą na powierzchniach stożków, jak pokazano na rysunku. Omawianym przykładem możemy też zilustrować zasadę odpowiedniości Bohra. Zwróćmy uwagę, że najmniejszy kąt (w naszym przykładzie θ_1) jest określony przez maksymalną wartość $m_l = l$. Dla tego kąta

$$\cos\theta = \frac{L_z}{L} = \frac{l}{\sqrt{l\,(l+1)}},$$

a dla bardzo dużych l można go zaokrąglić do 1. Jeśli $\cos\theta = 1$, to $\theta = 0°$. Ponadto w przypadku dużej wartości l istnieje bardzo dużo wartości m_l, dzięki czemu praktycznie wszystkie kąty stają się możliwe.

8.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Czy wielkość L_z może być równa L?

Używanie funkcji falowej do przewidywania

Jak widzieliśmy wcześniej, mechanikę kwantową możemy zastosować do przewidywania prawdopodobieństwa zdarzeń fizycznych z wykorzystaniem funkcji prawdopodobieństwa. Poprawne jest zatem stwierdzenie „elektron znajduje się w danej objętości w danym czasie z określonym prawdopodobieństwem”, ale nie – „elektron znajduje się w tym czasie w położeniu (x, y, z)”. W celu określenia prawdopodobieństwa znalezienia elektronu w atomie wodoru w objętości danego obszaru przestrzeni konieczne jest scałkowanie gęstości prawdopodobieństwa $|\psi_{nlm_l}|^2$ po tej objętości

$$\text{prawdopodobieństwo} = \iiint_{\text{objętość}} |\psi_{nlm_l}|^2\,\mathrm{d}V, \tag{8.9}$$

gdzie $\mathrm{d}V$ jest nieskończenie małym elementem objętości. Jeśli całka jest obliczana dla całej przestrzeni, wynik wynosi 1, ponieważ prawdopodobieństwo tego, że cząstka jest położona gdziekolwiek, wynosi 1 (warunek normalizacji). Występująca we wzorze na prawdopodobieństwo wartość bezwzględna eliminuje występowanie $i = \sqrt{-1}$ w wyniku obliczeń.

Rozważmy elektron w stanie z zerowym momentem pędu ($l = 0$). W tym przypadku funkcja falowa elektronu zależy tylko od współrzędnej radialnej r (r jest odległością danego punktu od jądra, patrz stany ψ_{100} i ψ_{200} w Tabeli 8.1). Niech element $\mathrm{d}V$ odpowiada nieskończenie małej objętości sferycznej powłoki o promieniu r, o nieskończenie małej grubości $\mathrm{d}r$, którą można zapisać jako

$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r. \tag{8.10}$$

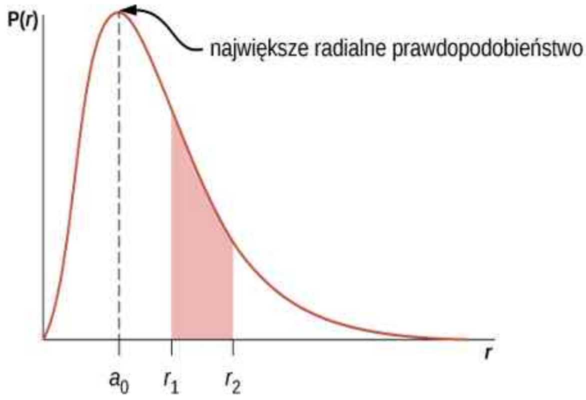
Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w obszarze od r do $r + \mathrm{d}r$ („w przybliżeniu w położeniu r”) jest równe

$$P(r)\,\mathrm{d}r = |\psi_{n00}|4\pi r^2\,\mathrm{d}r. \quad (8.11)$$

$P(r)$ nazywamy radialną funkcją gęstości prawdopodobieństwa (prawdopodobieństwa na jednostkę długości). W stanie podstawowym atomu wodoru prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w obszarze od r do $r + \mathrm{d}r$ jest więc równe

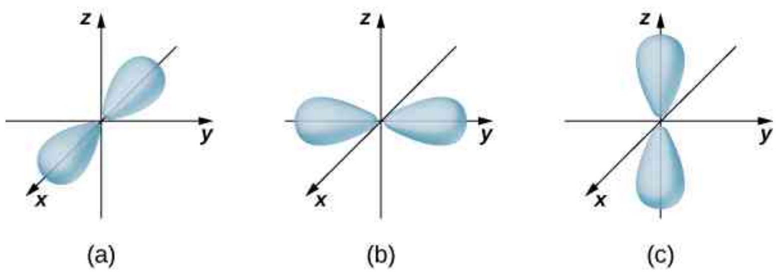
$$|\psi_{100}|^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{a_0^3} r^2 \exp\left(\frac{-2r}{a_0}\right)\mathrm{d}r, \quad (8.12)$$

gdzie $a_0 = 0{,}5\,\mathring{A}$. Radialna funkcja gęstości prawdopodobieństwa $P(r)$ jest przedstawiona na Rysunku 8.7. Obszar pod krzywą pomiędzy dwiema wartościami promienia, r_1 i r_2, daje prawdopodobieństwo znalezienia elektronu w tym przedziale odległości od jądra. Aby znaleźć najbardziej prawdopodobną wartość r, przyrównujemy pierwszą pochodną tej funkcji do zera $(\mathrm{d}P/\mathrm{d}r = 0)$ i obliczamy r spełniające warunek $r = a_0$. Zauważmy, że najbardziej prawdopodobna odległość elektronu od jądra nie jest równa średniej (lub oczekiwanej) wartości r, ponieważ funkcja $|\psi_{100}|^2$ nie jest symetryczna względem wartości a_0, dla której ma ona maksimum.



Rysunek 8.7 Radialna funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla stanu podstawowego atomu wodoru.

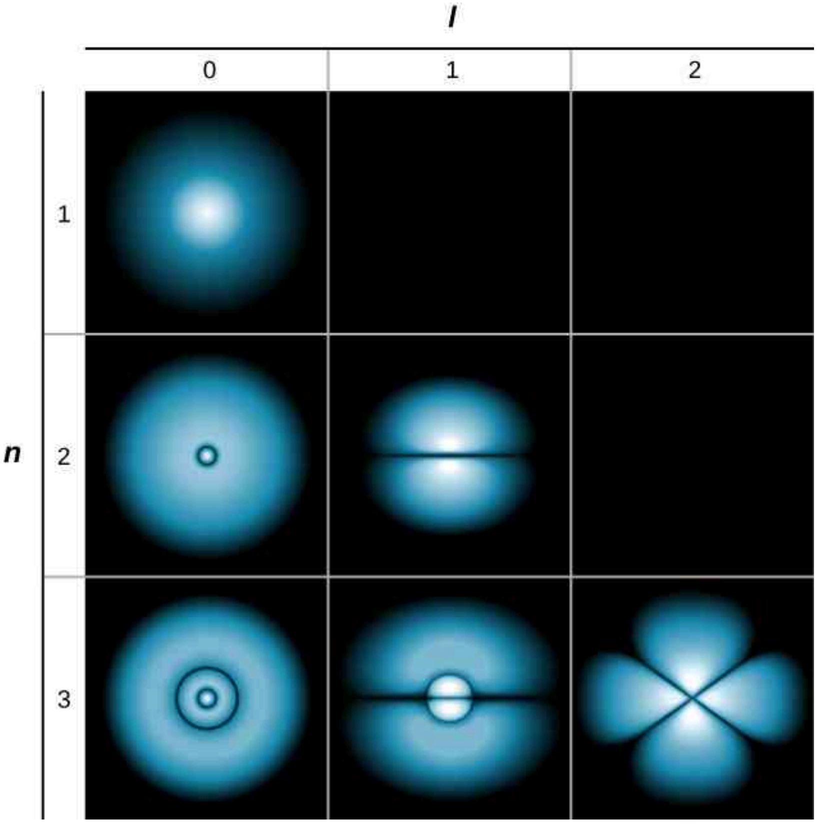
Jeśli elektron ma orbitalny moment pędu $(l \neq 0)$, funkcje falowe reprezentujące elektron zależą od kątów θ i ϕ; czyli $\psi_{nlm_l} = \psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi)$. Orbitale atomowe dla trzech stanów, gdzie $n = 2$ i $l = 1$, pokazane są na Rysunku 8.8. Orbital atomowy to obszar przestrzeni, w którym zawiera się pewien procent (zwykle $90\,\%$) prawdopodobieństwa znalezienia się elektronu (orbitale atomowe czasami określa się jako „chmury” gęstości prawdopodobieństwa). Należy zauważyć, że te rozkłady mają wyraźne wyróżnione kierunki. Ta kierunkowość jest ważna dla chemików podczas analizy, w jaki sposób atomy wiążą się ze sobą, tworząc cząsteczki.



Rysunek 8.8 Rozkład gęstości prawdopodobieństwa dla trzech stanów przy $n = 2$ i $l = 1$. Rozkłady są skierowane wzdłuż (a) osi x, (b) osi y oraz (c) osi z.

Nieco inną reprezentację funkcji falowej przedstawiono na Rysunku 8.9. W tym przypadku jasne i ciemne obszary wskazują miejsca odpowiednio o stosunkowo dużym i małym prawdopodobieństwie znalezienia elektronu. W prze-

ciwieństwie do modelu atomu wodoru Bohra elektron nie porusza się wokół jądra (protonu) po ściśle określonym torze. Zasada nieoznaczoności sprawia, że nie jest możliwe opisanie, jak elektron przedostaje się z jednego miejsca do drugiego.



Rysunek 8.9 Chmura prawdopodobieństwa dla elektronu w stanie podstawowym i w kilku stanach wzbudzonych atomu wodoru. Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu oznaczono odcieniem koloru; im kolor jaśniejszy, tym większa szansa znalezienia elektronu.

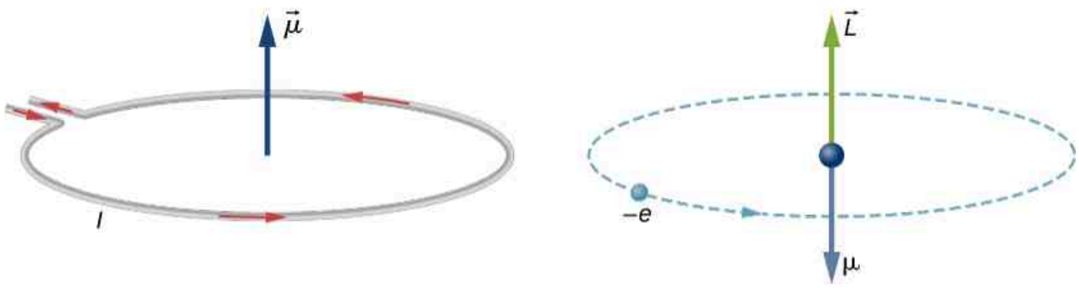
8.2 | Orbitalny dipolowy moment magnetyczny elektronu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- dlaczego atom wodoru ma właściwości magnetyczne;
- dlaczego poziomy energetyczne atomu wodoru związane z orbitalnym momentem pędu są rozszczepiane przez zewnętrzne pole magnetyczne;
- używać liczb kwantowych do obliczania wielkości i kierunku orbitalnego dipolowego momentu magnetycznego atomu wodoru.

W modelu atomu wodoru Bohra elektron porusza się po orbicie kołowej wokół protonu. Elektron przechodzi przez dany punkt toru ruchu cyklicznie, w ściśle określonych odstępach czasu, co pozwala obliczyć natężenie I prądu związanego z jego ruchem. Elektron, który obiega proton w atomie wodoru, zachowuje się zatem analogicznie do prądu przepływającego przez kołowy przewód (Rysunek 8.10). Wcześniej, podczas nauki o magnetyzmie, dowiedzieliśmy się, że prąd płynący w przewodzie wytwarza pole magnetyczne. Analogicznie możemy stwierdzić, że atom wodoru wytwarza pole magnetyczne i tym samym oddziałuje z innymi polami magnetycznymi.



Rysunek 8.10 (a) Prąd płynący przez przewód w kształcie pętli jest analogiczny do (b) elektronu krążącego wokół protonu w atomie wodoru.

Orbitalny magnetyczny moment dipolowy (ang. **orbital magnetic dipole moment**) jest miarą wielkości pola magnetycznego wytworzonego przez ruch orbitalny elektronu, czyli przez orbitalny moment pędu. Zgodnie z podrozdziałem Wypadkowa sił i moment sił działających na pętlę z prądem (https://cnx.org/content/m67204/latest/) wielkość orbitalnego magnetycznego momentu dipolowego (w skrócie – momentu magnetycznego) pętli z prądem jest równa

$$\mu = IA, \tag{8.13}$$

gdzie I jest natężeniem prądu, a A oznacza pole powierzchni pętli. Natężenie prądu I związane z elektronem krążącym po orbicie wokół protonu w atomie wodoru wynosi

$$I = \frac{e}{T}, \tag{8.14}$$

gdzie e jest wartością (bezwzględną) ładunku elektronu, a T jego okresem obiegu po orbicie. Jeśli założymy, że elektron porusza się po doskonałej orbicie kołowej, jego okres orbitalny wynosi

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \tag{8.15}$$

gdzie r jest promieniem orbity, a v jest szybkością elektronu na orbicie. Biorąc pod uwagę, że powierzchnia koła jest równa πr^2 , bezwzględna wartość momentu magnetycznego wynosi

$$\mu = IA = \frac{e}{2\pi r\ /\ v}\pi r^2 = \frac{evr}{2}. \tag{8.16}$$

Powyższe równanie pozwala wyrazić wartość momentu magnetycznego μ poprzez wartość orbitalnego momentu pędu L ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$). Na orbicie kołowej elektronu wektor położenia $\vec{r}$ i wektor pędu $\vec{p}$ tworzą kąt prosty. Tak więc wartość orbitalnego momentu pędu jest równa

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r} \times \vec{p}\right| = rp\sin\theta = rp = rm_\mathrm{e}v. \tag{8.17}$$

Łącząc te dwa równania, otrzymujemy

$$\mu = \frac{e}{2m_\mathrm{e}}L. \tag{8.18}$$

W pełnej, wektorowej postaci to wyrażenie zapisuje się jako

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_\mathrm{e}}\vec{L}. \tag{8.19}$$

Znak „–” pojawia się dlatego, że elektron ma ładunek ujemny. Jak pokazano na Rysunku 8.10 (b), kierunek momentu magnetycznego elektronu jest przeciwny do kierunku momentu pędu. Zauważmy, że związek między $\vec{\mu}$ i $\vec{L}$ w Równaniu 8.19 w modelu atomu wodoru Bohra jest niezależny od promienia orbity.

Zgodnie z mechaniką kwantową moment magnetyczny może być wyrażony poprzez orbitalną liczbę kwantową l. Z Równania 8.18 i Równania 8.4 otrzymujemy, że wielkość momentu magnetycznego wynosi

$$\mu = \frac{e}{2m_e}L = \frac{e}{2m_e}\sqrt{l(l+1)}\hbar = \mu_B\sqrt{l(l+1)}. \tag{8.20}$$

Podobnie z-owa składowa momentu magnetycznego jest równa

$$\mu_z = -\frac{e}{2m_e}L_z = -\frac{e}{2m_e}m_l\hbar = -\mu_B m_l. \tag{8.21}$$

Wielkość μ_B jest podstawową jednostką magnetyzmu nazywaną **magnetonem Bohra** (ang. **Bohr magneton**), która ma wartość $9{,}3 \cdot 10^{-24}$ J / T lub $5{,}8 \cdot 10^{-5}$ eV / T . Kwantowanie momentu magnetycznego jest wynikiem kwantowania orbitalnego momentu pędu.

Jak zobaczymy w następnym podrozdziale, całkowity magnetyczny moment dipolowy atomu wodoru jest wynikiem złożenia momentu wynikającego z ruchu orbitalnego elektronu z jego wewnętrznym momentem pędu, czyli tzw. spinem. Na razie pominiemy wpływ spinu elektronu.

Przykład 8.3

Orbitalny magnetyczny moment dipolowy

Jaka jest wartość orbitalnego momentu magnetycznego μ elektronu w atomie wodoru w

a. stanie s;
b. stanie p;
c. stanie d?

Zakładamy, że spin elektronu jest równy zero.

Strategia rozwiązania

Wartość momentu magnetycznego elektronu jest związana z jego orbitalnym momentem pędu L. Dla atomu wodoru wielkość ta jest związana z kolei z orbitalną liczbą kwantową l. W notacji spektroskopowej litery s, p, d itd. odpowiadają liczbie kwantowej $I = 0, 1, 2$ itd.

Rozwiązanie

Wielkość momentu magnetycznego jest podana w Równaniu 8.20

$$\mu = \frac{e}{2m_e}L = \frac{e}{2m_e}\sqrt{l(l+1)}\hbar = \mu_B\sqrt{l(l+1)}.$$

a. Dla stanu s, czyli dla $l = 0$, mamy $\mu = 0$ i $\mu_z = 0$.
b. Dla stanu p, czyli dla $l = 1$, mamy

$$\mu = \mu\sqrt{1(1+1)} = \sqrt{2}\mu_B,$$
$$\mu_z = -\mu_B m_l, \text{ gdzie } m_l \in \{-1, 0, 1\},$$
$$\text{więc } \mu_z \in \{-\mu_B, 0, \mu_B\}.$$

c. Dla stanu d, czyli dla $l = 2$, otrzymujemy

$$\mu = \mu_B\sqrt{2(2+1)} = \sqrt{6}\mu_B,$$
$$\mu_z = -\mu_B m_l, \text{ gdzie } m_l \in \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$
$$\text{tak, że } \mu_z \in \{-2\mu_B, -\mu_B, 0, \mu_B, 2\mu_B\}.$$

Znaczenie

W stanie s nie ma orbitalnego momentu pędu ($L = 0$), a tym samym nie ma momentu magnetycznego. Nie znaczy to, że elektron znajduje się w spoczynku, a jedynie, że całkowity ruch elektronu nie wytwarza pola magnetycznego. W stanie p elektron ma moment magnetyczny z trzema możliwymi wartościami jego z-owej składowej. Oznacza to, że wektor momentu magnetycznego może przyjmować trzy różne kierunki – każdy przeciwny do wektora orbitalnego momentu pędu. W stanie d elektron ma moment magnetyczny o jednej z pięciu możliwych wartości jego z-owej składowej. W tym przypadku moment magnetyczny może wskazywać pięć kierunków określonych różnymi kątami polarnymi.

Ponieważ atom wodoru ma moment magnetyczny, można oczekiwać, że będzie on oddziaływał z zewnętrznym polem magnetycznym, tak jak np. igła magnetyczna z ziemskim polem magnetycznym. Z podrozdziału Wypadkowa sił i moment sił działających na pętlę z prądem (https://cnx.org/content/m67204/latest/) wiemy, że gdy pętla z prądem oddziałuje z zewnętrznym polem magnetycznym, to działa na nią moment siły $\vec{M}$, opisany wzorem

$$\vec{M} = I\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{\mu} \times \vec{B}, \tag{8.22}$$

gdzie $\vec{A}$ jest wektorem powierzchni pętli, $\vec{\mu}$ jest momentem magnetycznym, a $\vec{B}$ wektorem indukcji zewnętrznego pola magnetycznego. Moment siły (obrotowy) „stara się” obrócić wektor momentu magnetycznego atomu wodoru tak, aby był zgodny z kierunkiem zewnętrznego pola magnetycznego. Ponieważ zewnętrzne pole magnetyczne wykonuje pracę mechaniczną nad atomem wodoru, możemy mówić o zmianie energii w atomie. Energia potencjalna atomu wodoru związana z tym magnetycznym oddziaływaniem opisana jest Równaniem 8.23

$$E_{\text{p}} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}. \tag{8.23}$$

Zgodnie z powyższym równaniem, jeśli kierunek momentu magnetycznego jest przeciwny do kierunku zewnętrznego pola magnetycznego, energia potencjalna jest maksymalna, natomiast w przypadku, gdy kierunek momentu magnetycznego jest zgodny z kierunkiem zewnętrznego pola magnetycznego, energia potencjalna jest najmniejsza. Praca wykonywana nad atomem wodoru podczas obracania wektora momentu magnetycznego atomu w kierunku zewnętrznego pola magnetycznego jest więc związana ze spadkiem energii potencjalnej. Energia układu jest zachowana, jednak ponieważ następuje spadek energii potencjalnej, wytwarzane jest promieniowanie (emisja fotonów). Te przejścia energetyczne są skwantowane, ponieważ, jak wiemy, moment magnetyczny może przyjmować tylko określone kierunki.

Jeżeli przyjmiemy, że kierunek zewnętrznego pola magnetycznego jest zgodny z kierunkiem osi z, energia potencjalna związana z orbitalnym momentem dipolowym wynosi

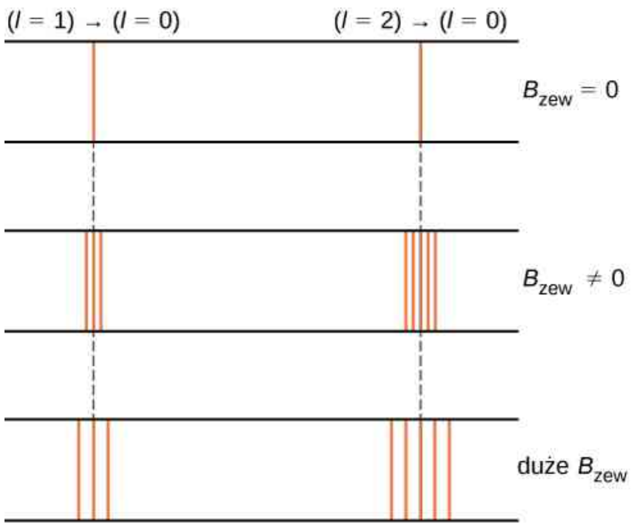
$$E_{\text{p}}(\theta) = -\mu B \cos\theta = -\mu_z B = -(-\mu_B m_l)B = m_l \mu_B B, \tag{8.24}$$

gdzie μ_B jest magnetonem Bohra, a m_l jest **magnetyczną liczbą kwantową** (ang. **magnetic orbital quantum number**) (rzutem orbitalnego momentu pędu na oś z), która przyjmuje wartości

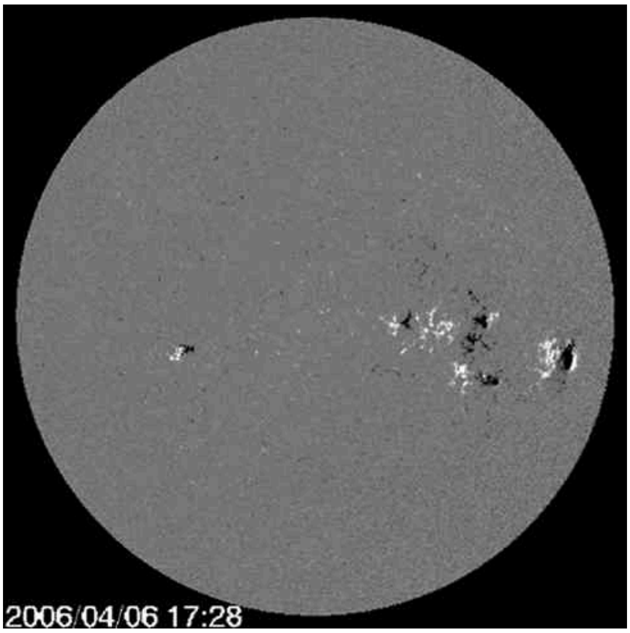
$$m_l = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, +l-1, +l. \tag{8.25}$$

Na przykład w stanie elektronu $l = 1$ istnieją trzy poziomy energii, równe $E_{\text{p}} = -\mu_B, 0, \mu_B B$.

Rozszczepienie poziomów energetycznych pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego jest nazywane **efektem Zeemana** (ang. **Zeeman effect**). Przy zaniedbaniu efektu spinu elektronu przejścia ze stanu $l = 1$ do niższego stanu (poziomu) energetycznego dają trzy ściśle określone linie widmowe (Rysunek 8.11, lewa kolumna). Podobnie przejścia ze stanu $l = 2$ dają pięć linii widmowych (prawa kolumna). Rozszczepienie tych linii jest proporcjonalne do indukcji zewnętrznego pola magnetycznego. Efekt ten ma wiele zastosowań. Przykładowo rozszczepienie linii w widmie wodoru Słońca jest wykorzystywane do określenia indukcji jego pola magnetycznego. Systematyczne pomiary pola magnetycznego mogą być wykorzystywane do utworzenia mapy aktywności magnetycznej powierzchni Słońca, nazywanej magnetogramem (Rysunek 8.12).



Rysunek 8.11 Efekt Zeemana polega na rozszczepieniu linii widmowych przez zewnętrzne pole magnetyczne. W lewej kolumnie rozszczepienie następuje na skutek przejścia od stanu $(n = 2, l = 1)$ do niższego stanu energetycznego; w prawej kolumnie rozszczepienie energii następuje na skutek przejścia od stanu $(n = 3, l = 2)$ do stanu o niższej energii. Rozszczepienie tych linii jest proporcjonalne do indukcji zewnętrznego pola magnetycznego.



Rysunek 8.12 Magnetogram Słońca. Jasne i ciemne miejsca wskazują znaczącą aktywność magnetyczną na powierzchni Słońca.

8.3 | Spin elektronu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- przedstawiać stan elektronu w atomie wodoru przy użyciu pięciu liczb kwantowych;
- używać liczb kwantowych w celu obliczania wielkości oraz kierunku spinu i momentu magnetycznego elektronu;
- wyjaśniać subtelną i nadsubtelną strukturę widma atomu wodoru poprzez oddziaływania magnetyczne w atomie wodoru.

W tej części omówimy spin elektronu (wewnętrzny moment pędu). Spin wprowadza dwie dodatkowe liczby kwantowe do naszego modelu atomu wodoru. Zostały one odkryte na podstawie obserwacji subtelnej struktury widm atomowych. Spin jest podstawową cechą wszystkich cząstek – nie tylko elektronów. Interpretacja **spinu** (ang. **spin** – wirowanie) pochodzi od analogii do wirowania ciał wokół ich własnych osi; przykładem może być codzienny obrót Ziemi. Należy jednak podkreślić relatywistyczne pochodzenie spinu i dodać, że nie ma on klasycznego odpowiednika.

Spin jest kwantowany w taki sam sposób jak orbitalny moment pędu. Stwierdzono, że wartość bezwzględna spinowego momentu pędu S elektronu jest dana przez wyrażenie

$$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar, \tag{8.26}$$

gdzie s jest **spinową liczbą kwantową** (ang. **spin quantum number**). Jest to podobne do kwantowania L danego Równaniem 8.4, z tą różnicą, że jedyna dopuszczalna wartość s dla elektronu wynosi $s = 1/2$. Mówi się, że elektron jest „cząstką o spinie połówkowym”. Odpowiednio **spinowa magnetyczna liczba kwantowa** (ang. **spin projection quantum number**) m_s jest związana z z-ową składową spinu, daną przez wyrażenie

$$S_z = m_s \hbar. \tag{8.27}$$

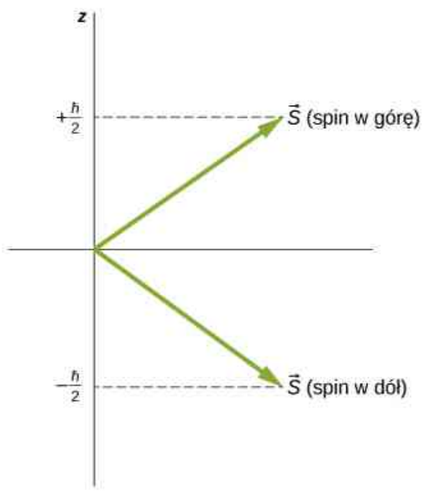
Ogólnie dla cząstki o spinie s dozwolone liczby kwantowe to

$$m_s = -s, -s+1, \ldots, 0, \ldots, +s-1, +s, \tag{8.28}$$

a w przypadku elektronu ($s = 1/2$)

$$m_s = \pm\frac{1}{2}. \tag{8.29}$$

Kierunki spinu (wewnętrznego momentu pędu) są skwantowane, tak jak kierunki orbitalnego momentu pędu. Stan $m_s = -1/2$ jest nazywany „spinem w dół” (ang. „ **spin-down**”) i ma z-ową składową spinu, $S_z = -1/2$; stan z $m_s = +1/2$ jest nazywany „spinem w górę” (ang. „ **spin-up**”) i ma z-ową składową spinu, $S_z = +1/2$. Stany te są pokazane na Rysunku 8.13.



Rysunek 8.13 Dwa możliwe stany spinu elektronu.

Wewnętrzny dipolowy moment magnetyczny elektronów może być również, tak jak orbitalny dipolowy moment magnetyczny, wyrażony poprzez spinową liczbę kwantową. Przez analogię do orbitalnego momentu pędu wielkość momentu magnetycznego elektronów powinna być równa

$$\mu_s = \frac{e}{2m_\mathrm{e}} S. \tag{8.30}$$

Jednakże zgodnie z przewidywaniami szczególnej teorii względności wartość ta jest o 2 razy za mała, więc prawdziwy związek pomiędzy spinem a spinowym momentem magnetycznym ma postać wektorową

$$\vec{\mu_s} = \frac{e}{m_\mathrm{e}} \vec{S}. \tag{8.31}$$

Odpowiednio z-owa składowa momentu magnetycznego wynosi

$$\mu_z = -\frac{e}{m_\mathrm{e}} S_z = -\frac{e}{m_\mathrm{e}} m_s \hbar. \tag{8.32}$$

Ponieważ spinowa magnetyczna liczba kwantowa elektronu ma tylko dwie wartości ($m_s = \pm 1/2$), z-owa składowa spinowego momentu magnetycznego także ma dwie wartości

$$\mu_z = \pm \frac{e}{2m_\mathrm{e}} = \pm \mu_B \hbar, \tag{8.33}$$

gdzie μ_B jest magnetonem Bohra. Elektron ma własności dipola magnetycznego, więc oczekujemy, że będzie on również oddziaływał z innymi polami magnetycznymi. Rozważymy dwa szczególne przypadki: oddziaływanie swobodnego elektronu z zewnętrznym (niejednorodnym) polem magnetycznym oraz elektronu w atomie wodoru z polem magnetycznym wytwarzanym przez orbitalny moment pędu elektronu.

Przykład 8.4

Spin elektronu i promieniowanie

Atom wodoru w stanie podstawowym jest umieszczony w jednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym o indukcji $B = 1{,}5\,\mathrm{T}$. Określmy częstotliwość i długość fali promieniowania wytworzonego podczas przejścia pomiędzy stanami elektronu – spin w górę i spin w dół.

Strategia rozwiązania

Magnetyczna spinowa liczba kwantowa wynosi $m_s = \pm 1/2$, więc z-owa składowa momentu magnetycznego przyjmuje wartości

$$\mu_z = \pm \frac{e}{2m_\mathrm{e}} = \pm \mu_B \hbar.$$

Energia potencjalna elektronu w polu magnetycznym ma postać

$$E_\mathrm{p} = -\mu_z B = \mp \mu_B B.$$

Częstotliwość emitowanego promieniowania jest proporcjonalna do różnicy energii (ΔE) między tymi dwoma stanami.

Rozwiązanie

Różnica energii między tymi stanami wynosi $\Delta E = 2\mu_B B$, więc częstotliwość wytwarzanego promieniowania jest równa

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} = \frac{2\mu_B B}{h} = \frac{2 \cdot 5{,}79 \cdot 10^{-5}\ \text{eV / T} \cdot 1{,}5\,\text{T}}{4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s}} = 4{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{s}^{-1},$$

a długość fali

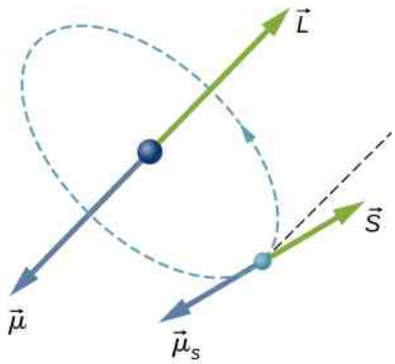
$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m / s}}{4{,}2 \cdot 10^{10}\ \text{s}^{-1}} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}\ \text{m}.$$

Znaczenie

Fakt istnienia momentu magnetycznego powoduje, że po umieszczeniu elektronu w zewnętrznym polu magnetycznym energia elektronu przyjmuje dwie wartości w zależności od kierunku jego spinu, czyli stan elektronu ulega rozszczepieniu w zewnętrznym polu magnetycznym. Częstotliwość promieniowania wytwarzanego przez przejścia między tymi dwoma stanami jest proporcjonalna do różnicy ich energii. Gdy dwukrotnie zwiększymy indukcję pola magnetycznego, częstotliwość promieniowania podwoi się, a długość fali zmaleje dwukrotnie.

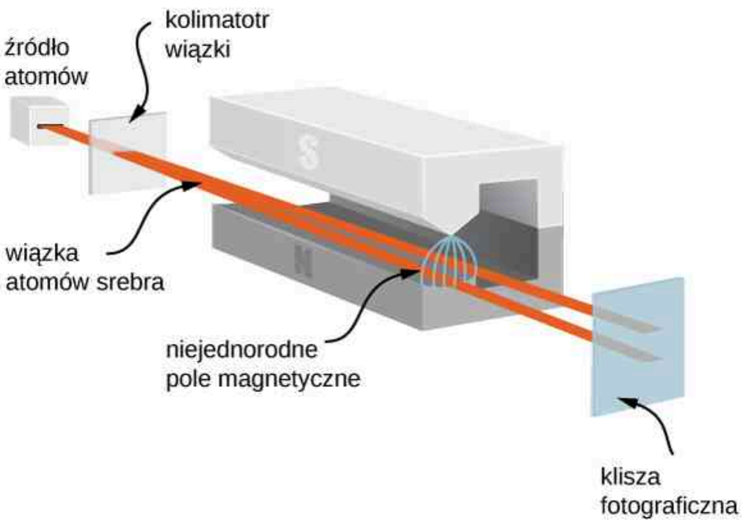
W atomie wodoru spinowy moment magnetyczny elektronu może oddziaływać z polem magnetycznym wytwarzanym przez orbitalny moment pędu elektronu – zjawisko to nosi nazwę **sprzężenia spin-orbita** (ang. **spin-orbit coupling**). Wektory: orbitalnego momentu pędu ($\vec{L}$), orbitalnego momentu magnetycznego ($\vec{\mu}$), spinowego momentu pędu ($\vec{S}$) i spinowego momentu magnetycznego ($\vec{\mu_s}$) są pokazane razem na Rysunku 8.14.

Poziomy energii w atomie wodoru mogą być rozdzielone za pomocą zewnętrznego, jak również wewnętrznego pola magnetycznego. Jeżeli spinowy moment magnetyczny i orbitalny moment magnetyczny elektronu są przeciwne (antyrównoległe), to energia potencjalna oddziaływania magnetycznego jest większa, a gdy te momenty są zgodne (równoległe), energia potencjalna jest niższa. Powoduje to rozszczepienie odpowiednich poziomów energetycznych w atomie. W związku z tym przejście z każdego z tych dwóch rozszczepionych stanów do stanów o niższej energii daje nieco inną częstotliwość emitowanego fotonu. Oznacza to, że sprzężenie spin-orbita „rozszczepia” linie widmowe względem tych, których należałoby oczekiwać, gdyby elektron nie miał spinu. **Strukturę subtelną** (ang. **fine structure**) widma wodoru wyjaśnia właśnie sprzężenie spin-orbita.



Rysunek 8.14 Sprzężenie spin-orbita jest oddziaływaniem spinowego momentu magnetycznego $\vec{\mu}_s$ elektronu z orbitalnym momentem magnetycznym $\vec{\mu}$.

Doświadczalnego dowodu na to, że elektrony mają spinowy moment pędu, dostarcza **eksperyment Sterna-Gerlacha** (ang. **Stern-Gerlach experiment**). Eksperyment ten polega na przepływie strumienia atomów srebra (Ag) przez obszar zewnętrznego, niejednorodnego pola magnetycznego. Atom Ag, tak jak atom Hg, zawiera jeden „niesparowany” elektron na zewnętrznej powłoce (w stanie s) i dlatego posiada orbitalny moment pędu równy zero. Z tego powodu całkowity moment pędu atomu srebra jest równy spinowi zewnętrznego elektronu ($S = 1\ /\ 2$). Ze względu na spin elektronów atomy Ag zachowują się jak maleńkie magnesy, które przechodzą przez pole magnetyczne. Te magnesy mają dwa możliwe kierunki, odpowiadające stanom elektronu spin w górę i spin w dół. Pole magnetyczne odchyla atomy te, które mają spin w górę, w jednym kierunku, a te, które mają spin w dół, w innym. Daje to dwa oddzielne prążki na ekranie (Rysunek 8.15).



Rysunek 8.15 W doświadczeniu Sterna-Gerlacha zewnętrzne, niejednorodne pole magnetyczne odchyla wiązkę elektronów w dwóch różnych kierunkach. Następuje to ze względu na kwantowanie spinowego momentu pędu.

Zgodnie z przewidywaniami mechaniki klasycznej moment pędu (a zatem i moment magnetyczny) atomu Ag może mieć dowolny kierunek, więc oczekuje się ciągłego rozmazywania obrazu wiązki na ekranie. Dwa pasma powstałe w eksperymencie Sterna-Gerlacha dają zaskakujące dowody na poparcie dla idei mechaniki kwantowej.

Aby dowiedzieć się więcej na temat doświadczenia Sterna-Gerlacha, odwiedź stronę: PhET Explorations: Stern-Gerlach Experiment (https://openstaxcollege.org/l/21sterngerlach) .

8.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Co można powiedzieć o spinowej liczbie kwantowej cząstki naładowanej, jeżeli w doświadczeniu Sterna-Gerlacha powstają cztery odrębne pasma zamiast dwóch?

Podobnie jak elektron również proton ma spinową liczbę kwantową $s = 1/2$ (w skrócie spin $s = 1/2$) oraz własny moment magnetyczny (według obecnej wiedzy moment ten wynika z ruchu orbitalnego kwarków wewnątrz protonu). Oddziaływanie między spinowym momentem magnetycznym protonu i spinowym momentem magnetycznym elektronu, znane jako **sprzężenie spin-spin** (ang. **spin-spin coupling**), tłumaczy tzw. **strukturę nadsubtelną** (ang. **hyperfine structure**) widma wodoru. Energia układu elektron–proton jest różna w zależności od tego, czy momenty spinowe są zgodne, czy przeciwne. Przejścia między tymi stanami (tzw. *przejścia spin-flip*) skutkują emisją fotonów o długości fali $\lambda \approx 21$ cm (w zakresie fal radiowych). Linia 21 cm w radioastronomii traktowana jest jak „odcisk palca” gazu wodorowego. Astronomowie wykorzystują tę linię widmową do tworzenia map spiralnych ramion galaktyk, składających się głównie z wodoru (Rysunek 8.16).



(a) (b) (c)

Rysunek 8.16 Oddziaływanie magnetyczne pomiędzy elektronem i protonem w atomie wodoru stosuje się do tworzenia map spiralnych ramion Galaktyki Wiatrak (NGC 5457). (a) Galaktyka widziana w świetle widzialnym. (b) Galaktyka widziana w promieniowaniu wodoru o długości fali 21 cm . (c) Obraz złożony z (a) i (b). Zauważmy, że emisja wodoru wnika w pył galaktyczny i bardzo wyraźnie pokazuje jej spiralne ramiona, natomiast galaktyczne jądro przedstawia się lepiej w świetle widzialnym. Źródła: (a) modyfikacja pracy ESA i NASA; (b) modyfikacja pracy Fabiana Waltera

Pełny opis stanu elektronu w atomie wodoru wymaga pięciu liczb kwantowych: n, l, m_l, s oraz m_s. Nazwy, symbole i dozwolone wartości tych liczb są zestawione w Tabeli 8.4.

Nazwa	Symbol	Dozwolone wartości
Główna liczba kwantowa	n	$1, 2, 3, \ldots$
Poboczna liczba kwantowa	l	$0, 1, 2, \ldots, n-1$
Magnetyczna liczba kwantowa	m_l	$0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm l$
Spinowa liczba kwantowa	s	$1 / 2$ (elektron)
Magnetyczna spinowa liczba kwantowa	m_s	$\pm 1 / 2$

Tabela 8.4 Liczby kwantowe elektronu w atomie wodoru.

Należy pamiętać, że wewnętrzne (spinowe) liczby kwantowe wprowadzone w tym rozdziale (s i m_s) mają zastosowanie dla wielu cząstek, nie tylko elektronów. Na przykład kwarki wewnątrz jądra atomowego są również cząstkami ze spinem połówkowym. Jak zobaczymy później, liczby kwantowe stanowią pomoc przy klasyfikowaniu cząstek elementarnych i wchodzą w skład modeli naukowych, próbujących wyjaśnić, jak działa Wszechświat.

8.4 | Zakaz Pauliego i układ okresowy pierwiastków

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- znaczenia zakazu Pauliego dla zrozumienia budowy atomu i wiązań cząsteczkowych;
- wyjaśniać strukturę układu okresowego, posługując się pojęciami energii całkowitej, orbitalnego momentu pędu oraz spinu poszczególnych elektronów w atomie;
- opisywać konfigurację elektronową atomów w układzie okresowym pierwiastków.

Do tej pory zajmowaliśmy się wyłącznie wodorem, najprostszym pierwiastkiem chemicznym. Dowiedzieliśmy się, że stan elektronu w atomie wodoru może być całkowicie określony przez pięć liczb kwantowych

$$\begin{aligned} n&: \text{główna liczba kwantowa,} \\ l&: \text{poboczna liczba kwantowa,} \\ m_l&: \text{magnetyczna liczba kwantowa,} \\ s&: \text{spinowa liczba kwantowa,} \\ m_s&: \text{magnetyczna spinowa liczba kwantowa.} \end{aligned} \tag{8.34}$$

Aby skonstruować stan podstawowy (o najniższej energii) elektrycznie obojętnego atomu wieloelektronowego, należy wyobrazić sobie, że do jądra o ładunku Ze (jądro o liczbie atomowej Z) dodawane są kolejno pojedyncze elektrony. Załóżmy, że każdy elektron porusza się w sferycznie symetrycznym polu elektrycznym, wytwarzanym przez jądro i pozostałe elektrony w atomie. Takie założenie jest uzasadnione, ponieważ elektrony są rozmieszczone przypadkowo wokół jądra (na kształt sferycznie symetrycznej chmury elektronowej) i wytwarzają sferycznie symetryczne uśrednione pole elektryczne. Choć ze względu na oddziaływania pomiędzy elektronami sferycznie symetryczna funkcja energii potencjalnej $E_p(r)$ każdego elektronu nie ma już prostej formy $(-1 / r)$, jak w atomie wodoru, to okazuje się, że stan każdego elektronu może być nadal opisany za pomocą liczb kwantowych (n, l, m_l, s, m_s). Ponieważ spinowa liczba kwantowa $s = 1 / 2$ jest taka sama dla wszystkich elektronów, nie będzie ona wykorzystywana w tej części.

Właściwości chemiczne i struktury atomów dają się częściowo wyjaśnić przez **zasadę zakazu Pauliego** (ang. **Pauli's exclusion principle**), która mówi, że: „Żadne dwa elektrony w atomie nie mogą mieć tych samych wartości wszystkich czterech liczb kwantowych (n, l, m_l, m_s)". Zakaz ten jest związany z dwiema właściwościami elektronów: wszystkie elektrony są identyczne, czyli nierozróżnialne („jeśli widziałeś jeden elektron, to widziałeś je wszystkie")

oraz mają połówkowy spin ($s = 1 / 2$). Przykładowe zestawy liczb kwantowych elektronów w atomie podano w Tabeli 8.5. Zgodnie z zakazem Pauliego w żadnych dwóch wierszach tabeli nie ma dokładnie tego samego zestawu liczb kwantowych.

n	l	m_l	m_s	Symbol podpowłoki	Liczba elektronów na podpowłoce	Liczba elektronów na powłoce
1	0	0	1 / 2	1s	2	2
1	0	0	−1 / 2			
2	0	0	1 / 2	2s	2	8
2	0	0	−1 / 2			
2	1	−1	1 / 2	2p	6	
2	1	−1	−1 / 2			
2	1	0	1 / 2			
2	1	0	−1 / 2			
2	1	1	1 / 2			
2	1	1	−1 / 2			
3	0	0	1 / 2	3s	2	18
3	0	0	−1 / 2			
3	1	−1	1 / 2	3p	6	
3	1	−1	−1 / 2			
3	1	0	1 / 2			
3	1	0	−1 / 2			
3	1	1	1 / 2			
3	1	1	−1 / 2			
3	2	−2	1 / 2	3d	10	
3	2	−2	−1 / 2			
3	2	−1	1 / 2			
3	2	−1	−1 / 2			
3	2	0	1 / 2			
3	2	0	−1 / 2			
3	2	1	1 / 2			
3	2	1	−1 / 2			
3	2	2	1 / 2			
3	2	2	−1 / 2			

Tabela 8.5 Stany elektronowe atomów. Ze względu na zakaz Pauliego żadne dwa elektrony w atomie nie mają tego samego zbioru czterech liczb kwantowych.

O elektronach z tą samą główną liczbą kwantową n mówimy, że są na tej samej **powłoce** (ang. **shell**), a o tych, które mają taką samą wartość l, mówimy, że znajdują się na tej samej **podpowłoce** (ang. **subshell**). Elektron w stanie $n = 1$ atomu jest oznaczony jako 1s, gdzie pierwsza cyfra oznacza powłokę ($n = 1$), a litera wskazuje podpowłoki ($s, p, d, f, \ldots$, które odpowiadają odpowiednio $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$). Dwa elektrony w stanie $n = 0$ są oznaczone jako $1s^2$, gdzie górny indeks wskazuje liczbę elektronów. Elektron w stanie $n = 2$ z $l = 1$ oznaczamy jako 2p. Zbiór dwóch elektronów w stanie $n = 2$ i $l = 0$ i trzech elektronów w stanie $n = 2$ i $l = 1$ jest zapisany jako $2s^2 2p^3$ i tak dalej. Takie przedstawienie elektronów w odpowiednich stanach kwantowych (na powłokach i podpowłokach) nazywa się **konfiguracją elektronową** (ang. **electron configuration**) atomu. Konfiguracje elektronowe dla kilku ato-

mów podano w Tabeli 8.6. Elektrony na zewnętrznej powłoce atomu są nazywane **elektronami walencyjnymi** (ang. **valence electron**). Wiązania chemiczne między atomami tworzącymi cząsteczki są wyjaśnione poprzez transfer i uwspólnienie elektronów walencyjnych między nimi.

Pierwiastek	Konfiguracja elektronowa	Ustawienie spinów
H	$1s^1$	(↑)
He	$1s^2$	(↑↓)
Li	$1s^2 2s^1$	(↑)
Be	$1s^2 2s^2$	(↑↓)
B	$1s^2 2s^2 2p^1$	(↑↓)(↑)
C	$1s^2 2s^2 2p^2$	(↑↓)(↑)(↑)
N	$1s^2 2s^2 2p^3$	(↑↓)(↑)(↑)(↑)
O	$1s^2 2s^2 2p^4$	(↑↓)(↑↓)(↑)(↑)
F	$1s^2 2s^2 2p^5$	(↑↓)(↑↓)(↑↓)(↑)
Ne	$1s^2 2s^2 2p^6$	(↑↓)(↑↓)(↑↓)(↑↓)
Na	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$	(↑)
Mg	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$	(↑↓)
Al	$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$	(↑↓)(↑)

Tabela 8.6 Konfiguracja elektronowa atomów. Symbol (↑) oznacza niesparowany elektron w powłoce zewnętrznej, podczas gdy symbol (↑↓) oznacza parę elektronów w powłoce zewnętrznej ze spinem do góry i spinem w dół.

Maksymalna liczba elektronów na podpowłoce zależy od pobocznej liczby kwantowej l. Dla danej wartości l istnieje $2l+1$ stanów o tym samym orbitalnym momencie pędu. Każdy z tych stanów może być zapełniony przez dwa elektrony (jeden ze spinem w górę i drugi ze spinem w dół, ↑↓). Zatem maksymalna liczba elektronów na podpowłoce wynosi

$$N = 2 \cdot (2l+1) = 4l+2. \tag{8.35}$$

Na podpowłoce $2s$ $(l=0)$ maksymalna liczba elektronów jest równa 2. Na podpowłoce $2p$ $(l=1)$ maksymalna liczba elektronów wynosi 6. W związku z powyższym łączna maksymalna liczba elektronów na powłoce $n=2$ (w tym zarówno tych z podpowłok $l=0$, jak i $l=1$) wynosi $2+6$, czyli 8. Ogólnie maksymalna liczba elektronów n-tej powłoki jest równa $2n^2$.

Przykład 8.5

Podpowłoki i całkowita liczba elektronów dla $n = 3$

Ile podpowłok jest w powłoce $n=3$? Opiszmy wszystkie podpowłoki i obliczmy maksymalną liczbę elektronów, które zapełniają każdą z nich. Pokażmy, że maksymalna liczba elektronów, które wypełniają atom na powłoce, wynosi $2n^2$.

Strategia rozwiązania

Podpowłoki są określone przez wartości l; tak więc musimy najpierw ustalić, jakie są dozwolone wartości l, a następnie, aby znaleźć maksymalną liczbę elektronów na każdej z nich, zastosować równanie $N = 2 \cdot (2l+1)$.

Rozwiązanie

Ponieważ $n = 3$, wiadomo, że l może wynosić 0, 1 lub 2, tak więc istnieją trzy możliwe podpowłoki. W standardowej notacji są one oznaczone jako podpowłoki $3s$, $3p$ i $3d$. Co prawda wiemy, że w podpowłoce s mogą występować dwa elektrony, a w podpowłoce p – sześć, ale przećwiczymy równanie $2 \cdot (2l + 1)$, aby obliczyć maksymalną liczbę na każdej z nich

$$\begin{aligned} 3s \text{ ma } l &= 0; \text{stąd } 2 \cdot (2l + 1) = 2 \cdot (0 + 1) = 2 \\ 3p \text{ ma } l &= 1; \text{stąd } 2 \cdot (2l + 1) = 2 \cdot (2 + 1) = 6 \\ 3d \text{ ma } l &= 2; \text{stąd } 2 \cdot (2l + 1) = 2 \cdot (4 + 1) = 10 \\ \text{Razem} &= 18 \text{ elektronów na powłoce } n = 3. \end{aligned}$$

Z kolei równanie „maksymalna liczba elektronów na powłoce = $2n^2$ ” daje nam maksymalną liczbę elektronów na powłoce $n = 3$

$$\text{Maksymalna liczba elektronów} = 2n^2 = 2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 9 = 18.$$

Znaczenie

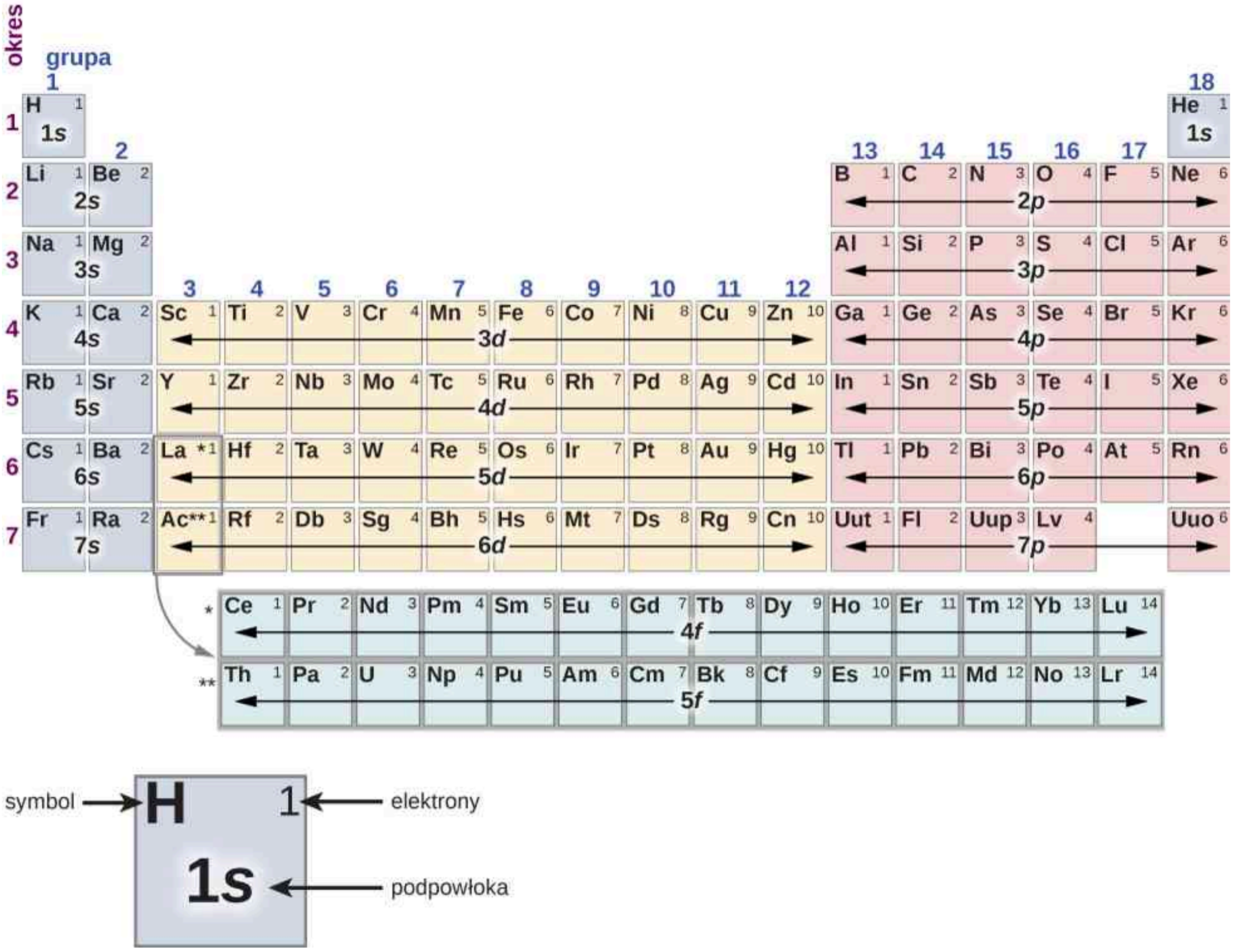
Całkowita liczba elektronów na trzech możliwych podpowłokach jest zatem zgodna ze wzorem $2n^2$. W standardowej (spektroskopowej) notacji całkowicie zapełniona powłoka $n = 3$ jest oznaczona jako $3s^2 3p^6 3d^{10}$. Powłoki i podpowłoki nie zapełniają się jednak w tak prosty sposób. Na przykład zanim powłoka $n = 3$ zostanie całkowicie zapełniona, możemy już znaleźć elektrony na powłoce $n = 4$.

Struktura **układu okresowego pierwiastków** (ang. **periodic table** ; Rysunek 8.17) może być uzasadniona sposobem zapełnienia powłok i podpowłok w atomie, a – ostatecznie – całkowitą energią, orbitalnym momentem pędu i spinem elektronów w atomie. Szczegóły układu okresowego zostawiamy do omówienia podczas kursu chemii, a tutaj naszkicujemy tylko jego podstawowe cechy. W tej dyskusji zakładamy, że atomy są elektrycznie obojętne; to znaczy, że posiadają taką samą liczbę protonów i elektronów. (Przypomnijmy, że całkowita liczba protonów jądra atomowego nazywana jest liczbą atomową, Z).

Po pierwsze, układ okresowy pierwiastków jest ułożony w kolumny i wiersze. Układ czyta się od lewej do prawej i od góry do dołu w kolejności zwiększającej się liczby atomowej Z. Atomy, które leżą w tej samej kolumnie, czyli należą do jednej **grupy chemicznej** (ang. **chemical group**), mają podobne właściwości chemiczne. Przykładowo Li i Na (leżące w pierwszej kolumnie) tworzą związki chemiczne z innymi atomami w podobny sposób. Pierwszy wiersz układu zawiera pierwiastki, w których jest zapełniana powłoka $1s$ ($l = 0$) atomu.

Rozważmy teraz hipotetyczną procedurę dodawania elektronów, jeden po drugim, do atomu. W wodorze (H, lewy górny róg tablicy) powłoka $1s$ jest zapełniona jednym elektronem, którego spin jest w górę lub w dół (↑ lub ↓). Ten pojedynczy elektron jest łatwo uwspólniany z innymi atomami, więc wodór jest aktywny chemicznie. W helu (He, prawy górny róg) podpowłoka $1s$ wypełniona jest dwoma elektronami zarówno ze spinem w górę, jak i ze spinem w dół (↑↓). To „zapełnienie” podpowłoki $1s$ powoduje, że atom helu nie ma tendencji do dzielenia się elektronami z innymi atomami. Atom helu określa się jako chemicznie nieaktywny, obojętny lub szlachetny.

Zbuduj atom przez dodawanie i odejmowanie protonów, neutronów i elektronów. W jaki sposób następuje zmiana ładunku oraz masy pierwiastka? Aby znaleźć odpowiedzi na te pytania, odwiedź PhET Explorations: Build an Atom (https://openstaxcollege.org/l/21buildanatom) .



Rysunek 8.17 Układ okresowy pierwiastków, przedstawiający strukturę powłok i podpowłok.

Drugi wiersz układu odpowiada powłoce 2 i podpowłokom $2s$ i $2p$. Dla litu (Li, lewa kolumna) podpowłoka $1s$ zapełniona jest dwoma elektronami ze spinem w górę i w dół (↑↓), a podpowłoka $2s$ jest zapełniona jednym elektronem ze spinem skierowanym w górę lub w dół (↑ lub↓). Konfiguracja elektronów ma zatem postać $1s^2 2s^1$ lub $[\text{He}]2s$, gdzie $[\text{He}]$ oznacza rdzeń helu (wewnętrzna powłoka ma konfigurację helu). Tak jak w wodorze, pojedynczy elektron z zewnętrznej powłoki (ten jeden elektron jest zarówno na podpowłoce $2s$, jak i na całej powłoce 2) łatwo uwspólnia się z innymi atomami. Dla berylu (Be) powłoka $2s$ zapełniona jest dwoma elektronami ze spinem w górę i w dół (↑↓) i ma konfigurację elektronową $[\text{He}]2s^2$.

Spójrzmy teraz na prawą stronę układu. Dla boru (B) podpowłoki $1s$ i $2s$ są zapełnione całkowicie, podpowłoka $2p$ $(l = 1)$ zawiera jeden elektron ze spinem w górę lub w dół (↑ lub ↓). Od węgla (C) do neonu (N) zapełniana jest podpowłoka $2p$. Maksymalna liczba elektronów na podpowłoce $2p$ wynosi $4l + 2 = 4 \cdot 1 + 2 = 6$. Dla neonu (Ne) podpowłoka $1s$ zapełniona jest dwoma elektronami ze spinem w górę i w dół (↑↓), natomiast podpowłoka $2p$ sześcioma elektronami (↑↓↑↓↑↓). Całkowite zapełnienie podpowłok $1s$, $2s$ i $2p$ powoduje, że tak jak hel, atom neonu nie ma tendencji do dzielenia się elektronami z innymi atomami.

Proces zapełniania elektronami powtarza się w trzecim rzędzie – zapełniana jest trzecia powłoka. Jednakże począwszy od czwartego rzędu, zapełniana jest nie tylko czwarta powłoka, ale i podpowłoka $3d^3$. Rzeczywista kolejność zapełnienia elektronami podpowłok jest następująca

$$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, 5s, 4d, 5p, 6s, 4f, 5d, 6p, 7s, \ldots$$

Zauważmy, że podpowłoki $3d$, $4d$, $4f$ i $5d$ „wyłamują” się z porządku zapełniania; jest tak ze względu na oddziaływanie między elektronami w atomie, które do tej pory było zaniedbywane. **Metale przejściowe** (ang. **transition metal**) są pierwiastkami, które w układzie okresowym znajdują się w grupach 3–12 i mają zapełnianą podpowłokę d $(l = 1)$.

Tabela układu okresowego zawiera również informacje na temat wiązań cząsteczkowych. Aby się o tym przekonać, rozważmy atomy pierwiastków z pierwszej grupy (tzw. atomy metali alkalicznych, w tym Li, Na i K). Zawierają one pojedynczy elektron na podpowłoce s, który jest łatwo oddawany innym atomom, w przeciwieństwie do atomów w drugiej grupie od końca (tzw. halogeny lub chlorowce czy fluorowce, na przykład Cl, F, Br), które nie mają tendencji

do dzielenia się elektronami. Atomy te wolą przyjąć elektron, ponieważ brakuje im tylko jednego elektronu na ostatniej podpowłoce p, aby ją zapełnić i stać się atomem szlachetnym. Dlatego też, jeśli atom Na jest umieszczony w bezpośredniej bliskości atomu Cl, atom Na „swobodnie” przekazuje swój elektron $2s$, który atom Cl „ochoczo” akceptuje. W tym procesie atom Na (początkowo elektrycznie obojętny) staje się naładowany dodatnio, a Cl (też początkowo neutralny) zostaje naładowany ujemnie. Naładowane atomy nazywane są jonami – w tym przypadku jonami Na^+ i Cl^-, których znak u góry oznacza ładunek jonów. Elektryczne (kulombowskie) przyciąganie pomiędzy tymi atomami tworzy cząsteczkę NaCl (soli kuchennej).

Precyzyjniejszy opis powstawania cząsteczki NaCl jest następujący: do oderwania elektronu od atomu Na (z podpowłoki $2s$) potrzebna jest energia jonizacji E_j, a przy przyłączeniu się elektronu do atomu Cl (do podpowłoki $2p$) wydziela się pewna ilość energii, zwana energią powinowactwa E_p. Na przykład dla Na $E_j = 5{,}1\ \text{eV}$, a dla Cl $E_p = 3{,}6\ \text{eV}$. Różnica tych energii jest co prawda większa od zera ($E_j - E_p > 0\ \text{eV}$), ale powstałe jony przyciągają się siłą elektrostatyczną (elektryczną), co powoduje obniżenie energii układu o wartość równą (w przybliżeniu) $e^2 \big/ (4\pi\varepsilon_0 r)$, gdzie r jest odległością między jonami. Przy pewnej odległości $r = d$ (długość wiązania) całkowita energia osiąga minimum i jest ona wtedy mniejsza od energii początkowej układu (oddalonych od siebie atomów Na i Cl). Zmniejszaniu się odległości między jonami poniżej d przeciwdziałają siły odpychania się elektronów na powłokach elektronowych (związane z zakazem Pauliego). Dla NaCl długość wiązania $d = 0{,}236\ \text{nm}$, a energia wiązania wynosi $E_w = -4{,}2\ \text{eV}$.

Wiązanie chemiczne pomiędzy dwoma jonami nazywa się **wiązaniem jonowym** (ang. **ionic bond**). Istnieje wiele rodzajów wiązań chemicznych. Na przykład w cząsteczce tlenu O_2 elektrony są równo podzielone między atomami. Wiązanie atomu tlenu jest przykładem **wiązania kowalencyjnego** (ang. **covalent bond**). Innymi przykładami wiązań kowalencyjnych są wiązania w cząsteczkach: N_2, H_2 czy też Cl_2.

8.5 | Widma atomowe oraz promieniowanie rentgenowskie

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

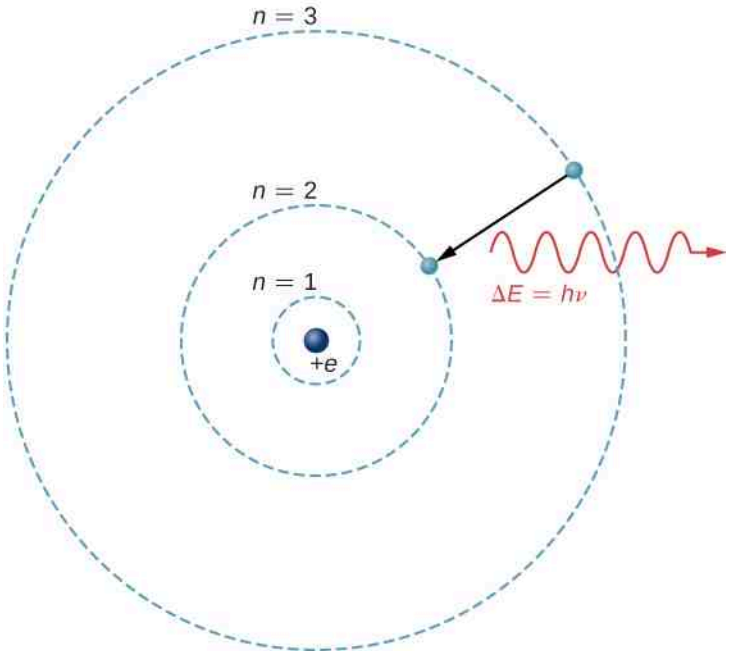
- opisywać absorpcję i emisję promieniowania poprzez atomowe poziomy energetyczne i różnice ich energii;
- stosować liczby kwantowe do oszacowania energii, częstotliwości i długości fali fotonów wydzielanych podczas przejść elektronów w atomach wieloelektronowych;
- posługiwać się koncepcją promieniowania w odniesieniu do fluorescencji atomowej i promieniowania rentgenowskiego.

Badanie widm atomowych jest podstawowym sposobem zdobywania wiedzy na temat atomów. We współczesnej nauce widma atomowe mają zastosowanie w identyfikacji rodzajów atomów w wielu różnych obiektach, od odległych galaktyk do próbek krwi na miejscu zbrodni.

Teoretyczną podstawą spektroskopii atomowej są przejścia elektronów między poziomami energetycznymi w atomach. Na przykład, jeśli elektron w atomie wodoru dokonuje przejścia z powłoki $n = 3$ na powłokę $n = 2$, atom emituje foton o długości fali

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{h\nu} = \frac{hc}{\Delta E} = \frac{hc}{E_3 - E_2}, \tag{8.36}$$

gdzie $\Delta E = E_3 - E_2$ jest energią niesioną przez foton, a $hc = 1940\,\text{eV nm}$. Po przejściu przez spektrometr promieniowanie pojawia się na ekranie w postaci ostrej spektralnej linii. Model Bohra opisujący ten proces przedstawiono na Rysunku 8.18. Gdyby w następnym procesie elektron pochłonął foton o energii ΔE, to powróciłby on do powłoki elektronowej $n = 3$. (Model Bohra omawialiśmy wcześniej, w rozdziale Fotony i fale materii).



Rysunek 8.18 Przejście elektronu z poziomu $n = 3$ na poziom $n = 2$ atomu wodoru.

Aby zrozumieć przejścia elektronowe w atomach wieloelektronowych, trzeba wziąć pod uwagę wiele efektów, w tym kulombowskie odpychanie między elektronami i wewnętrzne oddziaływania magnetyczne (spin-orbita i nadsubtelne, czyli ze spinami jądrowymi). Na szczęście wiele właściwości atomów wieloelektronowych, które w rzeczywistości są układami wielu ciał, można wyjaśnić, zaniedbując oddziaływania pomiędzy elektronami i reprezentując każdy elektron jego własną jednocząstkową funkcją falową.

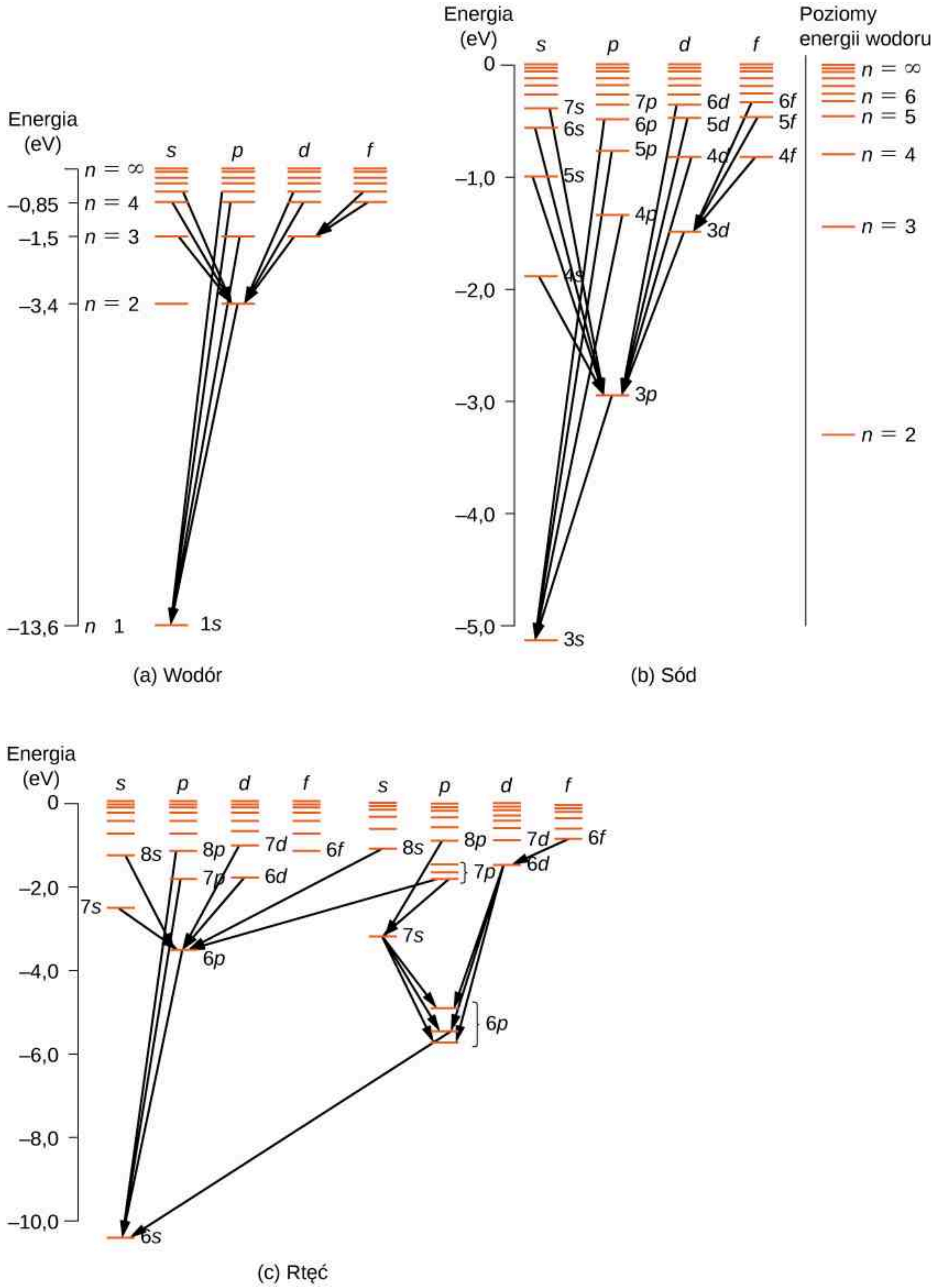
Przejścia atomowe podlegają **regułom wyboru** (ang. **selection rules**), które wynikają z zasad mechaniki kwantowej i symetrii. Reguły wyboru klasyfikują przejścia jako dozwolone albo wzbronione (przejścia całkowicie zabronione zdarzają się, jednak prawdopodobieństwo typowego przejścia wzbronionego jest bardzo małe). W atomie wodoru przejścia atomowe, w których występują oddziaływania elektromagnetyczne (emisja i absorpcja fotonów), podlegają następującej regule wyboru

$$\Delta l = \pm 1, \tag{8.37}$$

gdzie l jest poboczną liczbą kwantową, związaną z wartością orbitalnego momentu pędu

$$L = \sqrt{l\,(l+1)}\hbar. \tag{8.38}$$

Ta reguła wyboru dotyczy także atomów wieloelektronowych. Aby zilustrować powyższą regułę wyboru, rozważymy przejścia atomowe obserwowane w wodorze (H), sodzie (Na) i rtęci (Hg) (Rysunek 8.19). Linie poziome w tym schemacie odpowiadają energiom atomowym, a przejścia dozwolone przez regułę wyboru są oznaczone liniami pomiędzy poziomami. Energie stanów mają wartość rzędu kilku elektronowoltów, a fotony emitowane w przejściach mieszczą się w zakresie widzialnym. Zdarza się, że przejścia atomowe mogą naruszać tę zasadę wyboru, ale takie sytuacje są bardzo rzadkie.



Rysunek 8.19 Schematy poziomów energii dla: (a) wodoru, (b) sodu oraz (c) rtęci. Dla porównania na schemacie sodu przedstawiono poziomy energii wodoru.

Atom wodoru ma najprostszy schemat poziomów energii (energetycznych). Jeśli pominiemy spin elektronów, wszystkie stany o tej samej wartości n mają taką samą całkowitą energię, jednakże sprzężenie spin-orbita rozszczepia stany o głównej liczbie kwantowej n i orbitalnej $l = 1$ (stany $2p$, $3p$, ...) na dwa stany o nieznacznie różniących się energiach (poziomy energetyczne tych stanów nie zostały pokazane na rysunku, ponieważ różnice ich energii są zbyt małe). Rozszczepienie spin-orbita dotyczy również stanów dla $l = 2$ (stany $3d$, $4d$, ...), stąd szczegółowa analiza spektralna widma wodoru pokazuje, że niektóre linie są dubletami.

Schemat poziomów energetycznych atomu sodu jest zbliżony do wodoru, ponieważ oba atomy mają jeden elektron na zewnętrznej powłoce (elektron walencyjny). Ruch elektronu walencyjnego sodu odbywa się jednak w polu elektrycznym jądra ekranowanym przez elektrony wewnętrznych powłok (1 i 2). Funkcja energii potencjalnej, jak to

stwierdziliśmy wcześniej, jest co prawda sferycznie-symetryczna, ale nie jest, jak w atomie wodoru, proporcjonalna do $1 / r$. Dlatego całkowita energia elektronu w atomie sodu zależy od liczb kwantowych n i l. Co ciekawe, istnieją dwa oddzielne schematy poziomów energii atomu rtęci, związane z wypadkowym spinem elektronów walencyjnych $6s$.

Przykład 8.6

Dublet sodowy

Widmo sodowe analizowano za pomocą spektrometru. Zaobserwowano dwie blisko leżące linie, odpowiadające długościom fal $589\ \text{nm}$ oraz $589{,}59\ \text{nm}$.

a. Jeżeli za powstanie dubletu odpowiadają przejścia elektronu (walencyjnego) z pewnych wzbudzonych stanów do stanu $3s$, to jaki był początkowy moment pędu elektronu?
b. Ile wynosi różnica energii pomiędzy tymi dwoma stanami wzbudzonymi?

Strategia rozwiązania

Sód i wodór leżą w tej samej kolumnie (należą do tej samej grupy) układu okresowego pierwiastków, dlatego mówimy, że sód jest „wodoropodobny”. Najbardziej zewnętrzny elektron w sodzie znajduje się na podpowłoce $3s$ $(l = 0)$ i może na skutek wzbudzenia przenieść się na wyższe poziomy energetyczne. Tak jak dla wodoru, późniejsze przejścia na niższe poziomy energii muszą podlegać regule wyboru

$$\Delta l = \pm 1.$$

Musimy najpierw ustalić liczbę kwantową stanu początkowego, która spełnia tę regułę wyboru. Następnie możemy użyć tej liczby do określenia wielkości orbitalnego momentu pędu stanu początkowego.

Rozwiązanie

a. Dozwolone przejścia muszą spełniać regułę wyboru. Jeśli liczba kwantowa stanu początkowego jest równa $l = 0$, to przejście jest wzbronione, ponieważ $\Delta l = 0$. Jeśli liczba kwantowa stanu początkowego jest równa $l = 2, 3, 4, \dots$, przejście jest wzbronione, ponieważ $\Delta l > 1$. Dlatego liczba kwantowa stanu początkowego musi mieć wartość $l = 1$. Stąd orbitalny moment pędu stanu początkowego wynosi

$$L = \sqrt{l\,(l+1)}\hbar = 1{,}41\hbar.$$

b. Ponieważ stan końcowy dla obu przejść jest taki sam ($3s$), różnica energii fotonów jest równa różnicy energii dwóch stanów wzbudzonych. Stosując równanie

$$\Delta E = h\nu = h\left(\frac{c}{\lambda}\right),$$

otrzymujemy

$$\begin{aligned}\Delta E &= hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \\ &= 4{,}14 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m} / \text{s} \cdot \left(\frac{1}{589 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - \frac{1}{589{,}59 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}\right) \\ &= 2{,}11 \cdot 10^{-3}\ \text{eV}.\end{aligned}$$

Znaczenie

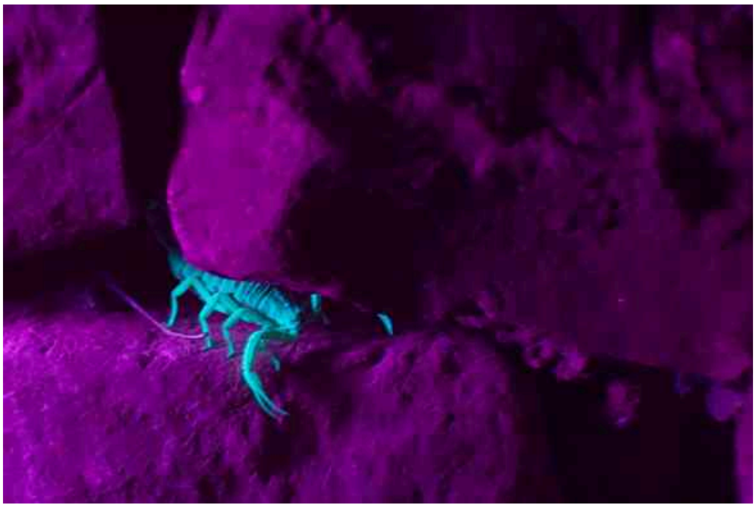
Aby zrozumieć trudność pomiaru tej różnicy energii, możemy porównać ją ze średnią energią dwóch fotonów emitowanych podczas tych przejść. Biorąc pod uwagę średnią długość fali $589{,}3\ \text{nm}$, średnia energia fotonu wynosi

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{4{,}14 \cdot 10^{-15}\ \text{eV s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m} / \text{s}}{589{,}3 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 2{,}11\ \text{eV}.$$

Chociaż różnica energii ΔE stanowi około $0{,}1\ \%$ $(1$ część na $1000)$ średniej energii fotonu, to jednak czuły spektrometr jest w stanie ją zmierzyć.

Fluorescencja atomowa

Fluorescencja (ang. **fluorescence**) pojawia się, gdy elektron w atomie jest wzbudzony o kilka poziomów energetycznych powyżej stanu podstawowego przez absorpcję fotonu o wysokiej energii (fotonu ultrafioletowego – fotonu UV). Po wzbudzeniu elektron wraca do stanu podstawowego w dwojaki sposób. Elektron może wrócić do stanu podstawowego, emitując foton o tej samej energii, która go wzbudziła, lub w serii małych kroków, emitując kilka niskoenergetycznych fotonów. Niektóre z nich mogą mieścić się w zakresie widzialnym. Pokrywanie ubrań barwnikiem fluorescencyjnym może sprawić, że kolory wydają się jaśniejsze w słońcu przez konwersję promieniowania słonecznego UV na światło widzialne. Świetlówki są bardziej wydajne w przekształcaniu energii elektrycznej w światło widzialne niż żarówki z włóknem żarowym (około cztery razy bardziej wydajne). Rysunek 8.20 pokazuje skorpiona oświetlonego przez lampę UV. Białka blisko powierzchni skóry emitują charakterystyczne niebieskie światło.



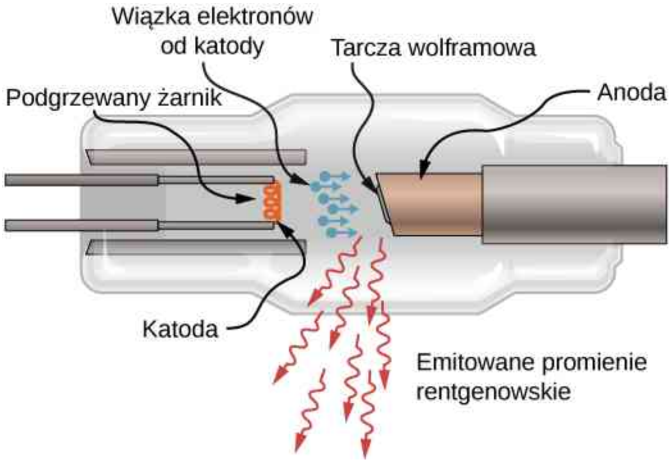
Rysunek 8.20 Skorpion świeci na niebiesko pod lampą UV. Źródło: Ken Bosma

Promieniowanie rentgenowskie

Badanie przemian energii w atomach pozwala nam zrozumieć naturę oraz technologię promieniowania rentgenowskiego (promieniowania X). Podobnie jak każde promieniowanie elektromagnetyczne, promieniowanie rentgenowskie składa się z fotonów. Fotony promieniowania rentgenowskiego wytwarzane są, gdy elektrony z najbardziej oddalonych powłok atomu „spadają” na powłoki wewnętrzne. (Atomy wodoru nie emitują promieniowania rentgenowskiego, ponieważ poziomy energetyczne elektronów są zbyt blisko siebie, aby pozwolić na emisję promieniowania o tak dużej częstotliwości). Zwykle przejścia tego rodzaju są zakazane z tego prostego powodu, że niższe stany są już zapełnione elektronami. Jednakże jeżeli na wewnętrznej powłoce jest wakans (brakuje wewnętrznego elektronu, bo być może został on wybity przez uderzenie innego elektronu o dużej energii), to elektron z jednej z zewnętrznych powłok, może „spaść” na miejsce wakansu, emitując energię w postaci fotonu. Różnica energii dla takiego przejścia jest stosunkowo duża, więc długość fali wypromieniowanego fotonu rentgenowskiego jest względnie mała.

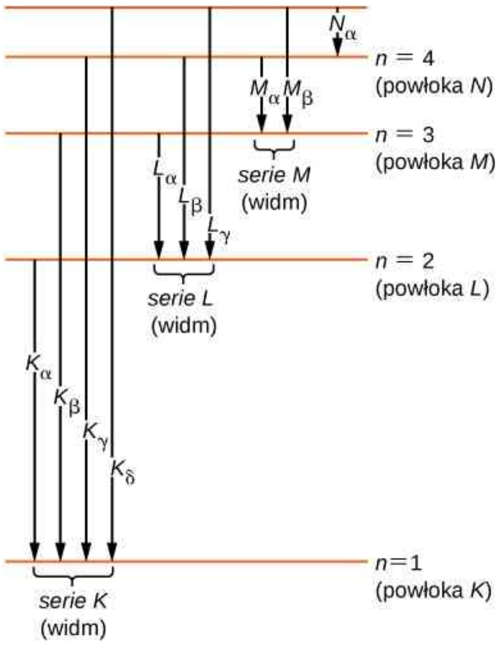
Promieniowanie rentgenowskie może być wytwarzane przez bombardowanie metalowej tarczy elektronami o wysokiej energii, jak pokazano na Rysunku 8.21. Elektrony są emitowane z żarzącej się na skutek **zjawiska termoemisji** (ang. **thermionic emission**) katody i przyspieszane przez pole elektryczne do anody, zawierającej tarczę wolframową (tarcza może być również z innego materiału, np. molibdenu, miedzi czy żelaza). Według klasycznej teorii elektromagnetyzmu każda naładowana cząstka, która porusza się z przyspieszeniem różnym od zera (przyspiesza albo hamuje), emituje promieniowanie. Tak więc gdy elektron uderza w tarczę wolframową i nagle zwalnia, emituje tzw. **promieniowanie hamowania** (ang. **braking radiation**). Promieniowanie hamowania to promieniowanie dowolnej naładowanej cząstki, spowalnianej przez ośrodek, w którym się porusza. Zawiera ono fotony o częstotliwościach z zakresu ciągłego, ponieważ poszczególne elektrony zderzają się z atomami tarczy w nieco inny sposób. Promieniowanie hamowania nie jest jedynym rodzajem promieniowania wytwarzanego w tym oddziaływaniu (zderzeniu). W niektórych przypadkach rozpędzony elektron zderza się z innym elektronem wewnętrznej powłoki atomu tarczy

(anody) i wybija go z atomu (można to porównać do zderzenia dwóch kul bilardowych). Pusty stan po wybitym elektronie zostaje zapełniony, gdy elektron z wyższej powłoki „spada” do stanu opuszczonego przez wybity elektron (spadek rozumiany jest jako przejście na niższy poziom energii), emitując foton promieniowania rentgenowskiego.



Rysunek 8.21 Szkic lampy rentgenowskiej. Promieniowanie rentgenowskie jest emitowane przez tarczę wolframową.

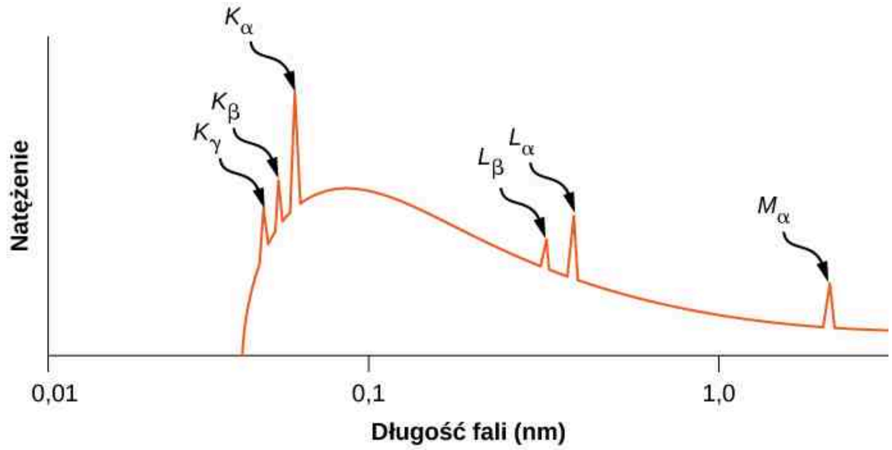
Tradycyjnie, linie widmowe promieniowania rentgenowskiego oznacza się literami K, L, M, N, itd. Te litery odpowiadają powłokom atomowym ($n = 1, 2, 3, 4, \ldots$). Promieniowanie rentgenowskie wytwarzane przez przejście elektronu z dowolnej wyższej powłoki na powłokę K $(n = 1)$ oznaczane jest symbolem K z indeksem kolejno α, β, γ itd. I tak promieniowanie rentgenowskie wytwarzane podczas przejścia elektronu z powłoki L $(n = 2)$ na powłokę K nazywa się promieniowaniem K_α, promieniowanie rentgenowskie wytwarzane przy przejściu elektronu z powłoki M $(n = 3)$ na powłokę K jest nazywane K_β, promieniowanie rentgenowskie wytwarzane przez przejście elektronu z powłoki N $(n = 4)$ na K nazywa się K_γ i tak dalej. Przejścia z wyższych powłok na powłoki L i M oznaczane są analogicznie. Przejścia te są pokazane na schemacie poziomów energii na Rysunku 8.22.



Rysunek 8.22 Przejścia rentgenowskie w atomie.

Rozkład długości fali promieniowania rentgenowskiego wytwarzanego przez wiązkę elektronów uderzającą w metal jest pokazany na Rysunku 8.23. Przejścia rentgenowskie w metalu tarczy pojawiają się jako piki na szczycie krzywej promieniowania hamowania. Częstotliwości (długości fal) fotonów odpowiadające położeniom pików na tle rozkładu widma rentgenowskiego nazywane są częstotliwościami charakterystycznymi (charakterystycznymi długościami

fal), ponieważ mogą one być wykorzystane do identyfikacji metalu tarczy. Graniczna (minimalna) długość fali (tuż poniżej szczytu K_γ) odpowiada sytuacji, gdy elektron traci całą swoją energię poprzez emisję pojedynczego fotonu. Promieniowanie o długości fali krótszej niż długość graniczna jest oczywiście zabronione przez zasadę zachowania energii.



Rysunek 8.23 Widmo rentgenowskie tarczy ze srebra. Piki odpowiadają długościom fal rentgenowskich emitowanych przez srebro, gdy zostaje ono uderzone przez wiązkę elektronów.

Przykład 8.7

Promieniowanie rentgenowskie emitowane przez aluminium

Oszacujmy energię charakterystyczną i częstotliwość promieniowania rentgenowskiego K_α dla aluminium $(Z = 13)$.

Strategia rozwiązania

Promieniowanie rentgenowskie K_α wytwarzane jest przy przejściu elektronu z powłoki L $(n = 2)$ na powłokę K $(n = 1)$. Na powłoce L elektron „widzi" ładunek $Z = 13 - 1 = 12$, ponieważ jeden elektron (pozostały po wybiciu drugiego) na powłoce K ekranuje ładunek jądra. (Przypomnijmy, że na powłoce K nie ma dwóch elektronów, ponieważ jeden stan elektronu jest nieobsadzony). Częstotliwość emitowanych fotonów może być określona na podstawie różnicy energii powłok L i K.

Rozwiązanie

Różnica energii między powłokami L i K w atomie wodoru wynosi $10{,}2\text{ eV}$. Zakładając, że inne elektrony na powłoce L lub powłoce o wyższej energii nie ekranują ładunku jądra, różnica energii między powłokami L i K w atomie o $Z = 13$ wynosi w przybliżeniu

$$\Delta E_{L\longrightarrow K} \approx (Z-1)^2 \cdot 10{,}2\,\text{eV} = (13-1)^2 \cdot 10{,}2\,\text{eV} = 1{,}47 \cdot 10^3\text{ eV}\,. \tag{8.39}$$

Na podstawie związku $\nu = \Delta E_{L\longrightarrow K} \,/\, h$ częstotliwość promieniowania rentgenowskiego wynosi

$$\nu = \frac{1{,}47 \cdot 10^3\text{ eV}}{4{,}14 \cdot 10^{-15}\text{ eV s}} = 3{,}55 \cdot 10^{17}\text{ Hz}\,.$$

Znaczenie

Długość fali typowego promieniowania rentgenowskiego zawiera się w zakresie $0{,}1\text{ nm} - 10\text{ nm}$. W rozważanym przykładzie jej wartość wynosi

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8\text{ m / s}}{3{,}55 \cdot 10^{17}\text{ Hz}} = 8{,}5 \cdot 10^{-10}\text{ m} = 0{,}85\,\text{nm}\,.$$

W związku z tym stwierdzamy, że w aluminium przejście $L \longrightarrow K$ wytwarza promieniowanie rentgenowskie.

Wytwarzanie promieniowania rentgenowskiego jest argumentem potwierdzającym słuszność zasad mechaniki kwantowej. Według modelu Bohra energia promieniowania rentgenowskiego K_α zależy od ładunku jądrowego, czyli liczby atomowej Z. Jeśli Z jest duże, siły kulombowskie w atomie też przyjmują duże wartości, stąd różnice energii (ΔE) są znaczne, podobnie jak energia wypromieniowanych fotonów. Aby to zilustrować, rozważmy najpierw pojedynczy elektron w atomie wieloelektronowym, który jest pozbawiony pozostałych elektronów (jest to tzw. jon wodoropodobny). Dozwolone poziomy energetyczne dane są wzorem

$$E_n = -\frac{Z^2 \cdot 13{,}6\,\mathrm{eV}}{n^2}, \tag{8.40}$$

gdzie $n = 1, 2, \ldots$, a Z jest liczbą atomową jądra. W atomie z Z elektronami, przy pominięciu oddziaływań pomiędzy nimi, jeżeli jeden elektron na powłoce K został wcześniej wybity, elektron na powłoce L ($n = 2$) „widzi” wewnętrzny ładunek $(Z - 1)e$, ponieważ pozostały na powłoce K elektron ekranuje ładunek jądra. Przy tych założeniach przybliżone energie elektronu na powłokach L i K dane są wzorami

$$E_L \approx -\frac{(Z-1)^2 \cdot 13{,}6\,\mathrm{eV}}{2^2},$$

$$E_K \approx -\frac{(Z-1)^2 \cdot 13{,}6\,\mathrm{eV}}{1^2}.$$

Energia niesiona przez foton emitowany przy przejściu z powłoki L na powłokę K jest zatem równa

$$\Delta E_{L \longrightarrow K} = (Z-1)^2 \cdot 13{,}6\,\mathrm{eV} \cdot \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = (Z-1)^2 \cdot 10{,}2\,\mathrm{eV},$$

gdzie Z jest liczbą atomową. Podsumowując, energia fotonu promieniowania rentgenowskiego emitowanego przy przejściu z zewnętrznej powłoki L na powłokę K wynosi

$$\Delta E_{L \longrightarrow K} = h\nu = \mathrm{const} \cdot (Z-1)^2.$$

Stąd mamy równanie

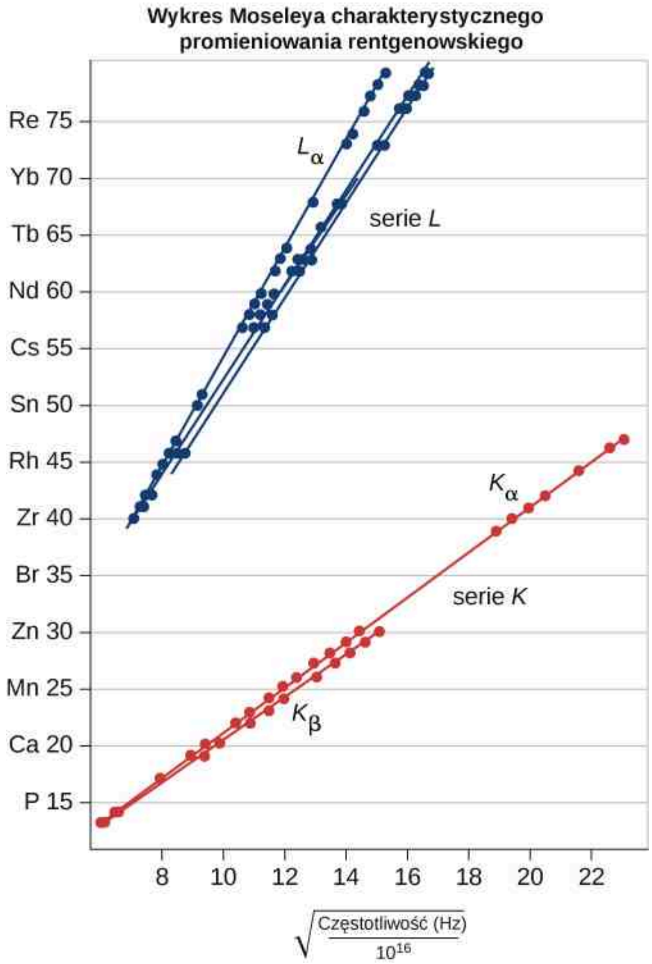
$$Z - 1 \sim \sqrt{\nu}, \tag{8.41}$$

gdzie ν jest częstotliwością promieniowania rentgenowskiego K_α. Równanie to nazywane jest **prawem Moseleya** (ang. **Moseley's law**). Dla dużych wartości Z mamy przybliżony wzór

$$Z \sim \sqrt{\nu}.$$

To przewidywanie może być sprawdzone przez pomiar ν dla różnych metali, które stanowią tarcze w anodzie. Poprawność modelu zastosowanego do opisu promieniowania rentgenowskiego jest potwierdzona, jeśli wykres Z w funkcji $\sqrt{\nu}$, tzw. **wykres Moseleya** (ang. **Moseley plot**), jest liniowy. Porównanie prawa Moseleya z wynikami doświadczalnymi, zarówno dla serii K, jak i L, pokazano na Rysunku 8.24. Dane te potwierdzają model, według którego promieniowanie rentgenowskie jest wytwarzane, gdy elektron z zewnętrznej powłoki przechodzi na powłokę o niższej energii (powłokę wewnętrzną) w celu wypełnienia na niej wakansu (luki).

8.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Promieniowanie rentgenowskie wytwarzane jest przez bombardowanie metalowej tarczy elektronami o wysokiej energii. Jeśli tarcza jest zastąpiona inną, składającą się z atomów o dwa razy większej liczbie atomowej, to co dzieje się z częstotliwością promieniowania rentgenowskiego?



Rysunek 8.24 Wykres Moseleya. Dane zostały zaadaptowane z oryginalnych danych Moseleya (H. G. J. Moseley, Philos. Mag (6). 77: 703, 1914).

Przykład 8.8

Charakterystyczna energia promieniowania rentgenowskiego

Obliczmy przybliżoną energię linii K_α promieniowania rentgenowskiego, emitowanego przez lampę rentgenowską z tarczą wolframową.

Strategia rozwiązania

Powłokę K zapełniają całkowicie dwa elektrony. W przypadku gdy jeden elektron opuści tę powłokę, efektywny ładunek dla elektronu na powłoce L będzie wynosił $Z - 1$ zamiast Z. Dla wolframu $Z = 74$, a więc efektywny ładunek wynosi 73. Liczba ta może być używana do obliczania różnicy energii między powłokami L i K, a zatem energii unoszonej przez foton przy przejściu $L \longrightarrow K$.

Rozwiązanie

Ponieważ efektywne Z wynosi 73, energia promieniowania rentgenowskiego K_α wynosi

$$E_{K_\alpha} = \Delta E = E_2 - E_1,$$

gdzie

$$E_1 = -\frac{Z^2}{1^2}E_0 = -73^2 \cdot 13{,}6\,\text{eV} = -72{,}5\,\text{keV}$$

oraz

$$E_2 = -\frac{Z^2}{2^2} E_0 = -\frac{73^2}{4} \cdot 13{,}6\,\text{eV} = -18{,}1\,\text{keV} .$$

Stąd

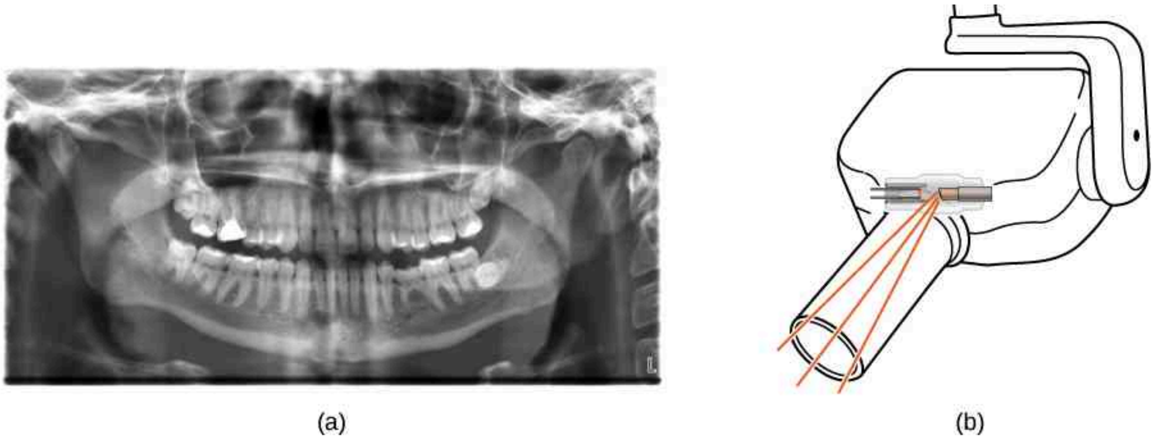
$$E_{K_\alpha} = -18{,}1\,\text{keV} - (-72{,}5\,\text{keV}) = 54{,}4\,\text{keV} .$$

Znaczenie

Tak duża energia fotonu jest typowa dla promieniowania rentgenowskiego. Energie tego promieniowania stają się stopniowo coraz większe dla coraz cięższych pierwiastków, ponieważ ich energia wzrasta w przybliżeniu jak Z^2. Aby wybić wewnętrzny elektron z atomu wolframu, potrzebne jest napięcie przyspieszenia o wartości ponad $50\,000$ woltów ($50\,\text{kV}$).

Technologia promieniowania rentgenowskiego

Promienie rentgenowskie mają wiele zastosowań związanych między innymi z diagnostyką medyczną (Rysunek 8.25), kontrolą bagażu na lotniskach (Rysunek 8.26), a nawet wykrywaniem pęknięć w istotnych dla bezpieczeństwa elementach samolotów. Najczęściej zdjęcia rentgenowskie przedstawiają cienie powstające w trakcie napromieniowania. Ponieważ fotony rentgenowskie mają dużą energię, przenikają przez substancje, które są nieprzezroczyste dla światła widzialnego. Im większą energię posiada foton, tym głębiej wnika w materiał. Głębokość penetracji jest związana zarówno z gęstością materiału, jak i energią fotonów. Im gęstszy materiał, tym mniej fotonów rentgenowskich go przenika i tym ciemniejszy jest cień. Promienie rentgenowskie są skuteczne w identyfikacji złamań kości i wykrywaniu nowotworów; jednak nadmierne naświetlanie promieniami rentgenowskimi może uszkadzać komórki organizmów biologicznych.



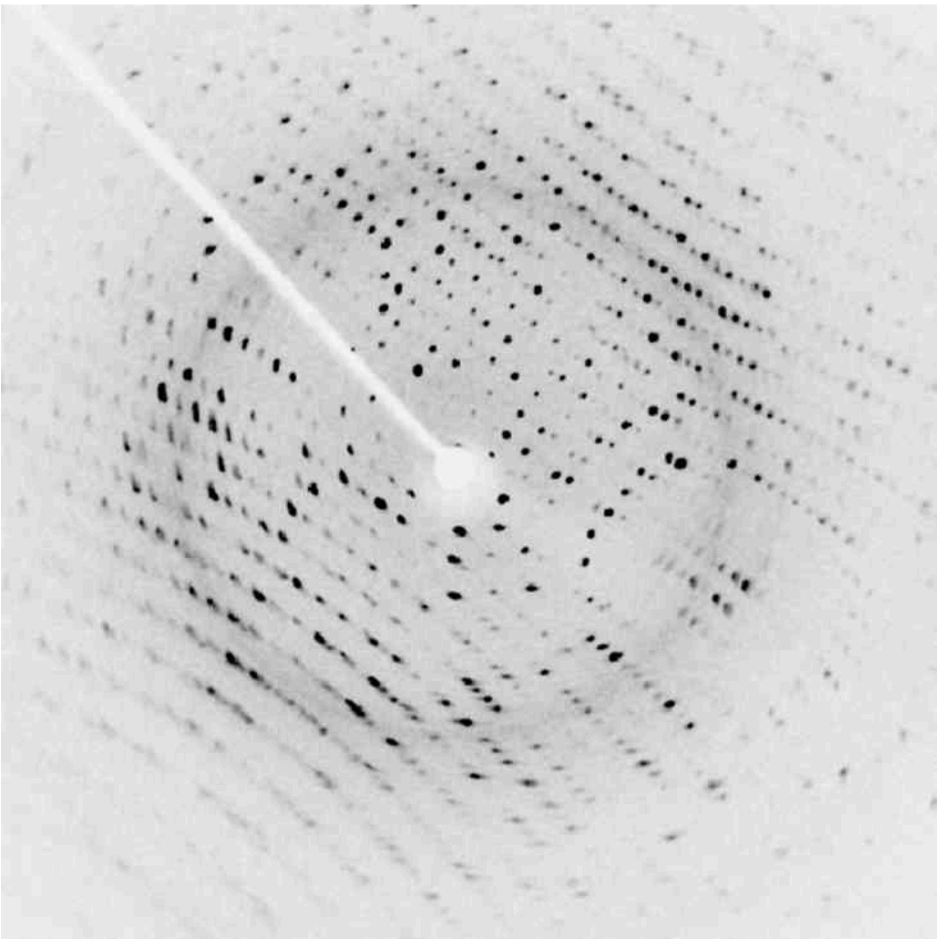
Rysunek 8.25 (a) Zdjęcie rentgenowskie zębów pacjenta. (b) Typowy aparat rentgenowski w gabinecie dentystycznym, który wytwarza promieniowanie o stosunkowo małej intensywności w celu zminimalizowania stopnia naświetlania pacjenta. Źródło (a): modyfikacja pracy „Dmitry G”/Wikimedia Common



Rysunek 8.26 Obraz rentgenowski bagażu. Im gęstszy materiał, tym ciemniejszy cień. Kolory przedmiotów odnoszą się do składu materiałów np. obiekty metalowe wyświetlane są jako niebieskie. Źródło: „IDuke”/Wikimedia Commons

Standardowy obraz rentgenowski zawiera dwuwymiarowy widok przedmiotu. Jednak w zastosowaniach medycznych widok ten często nie dostarcza informacji wystarczających do wyciągnięcia jednoznacznych wniosków diagnostycznych. Na przykład w dwuwymiarowym obrazie rentgenowskim ciała tkanki miękkiej lub narządy łatwo mogą być zasłonięte przez kości. Problem ten obchodzi tak zwana komputerowa tomografia osiowa (CAT, ang. **computerized axial tomography**). W metodzie tej oprócz ruchu lampy rentgenowskiej występuje również podłużny (osiowy) ruch łoża z pacjentem. Dzięki temu lampa co chwilę prześwietla kolejny fragment, warstwę („plaster”) ciała pacjenta. Kompleksowa komputerowa obróbka obrazu absorpcji promieni rentgenowskich w różnych kierunkach daje bardzo szczegółowy trójwymiarowy rentgenowski obraz ciała.

Promieniowanie rentgenowskie może być również stosowane do badania struktury cząsteczek i ciał stałych. Rozważmy promienie rentgenowskie padające na powierzchnię krystalicznego ciała stałego. Niektóre fotony rentgenowskie odbijają się od atomów na powierzchni, a pozostałe odbijają się od warstwy atomów tuż poniżej powierzchni. Interferencja tych fotonów (albo fal rentgenowskich) dla różnych kątów padania tworzy piękny obraz na ekranie (Rysunek 8.27). Oddziaływanie promieni rentgenowskich z ciałami stałymi nazywa się dyfrakcją rentgenowską. Najbardziej znanym przykładem użycia dyfrakcji rentgenowskiej jest odkrycie struktury podwójnej helisy DNA.



Rysunek 8.27 Obraz interferencyjny wytworzony przez dyfrakcję rentgenowską na kryształe białka (lizozymu z jajka kurzego). Analiza tego obrazu dostarcza informacji o strukturze białka. Źródło: „Del45”/Wikimedia Commons

8.6 | Lasery

Cel dydaktyczny

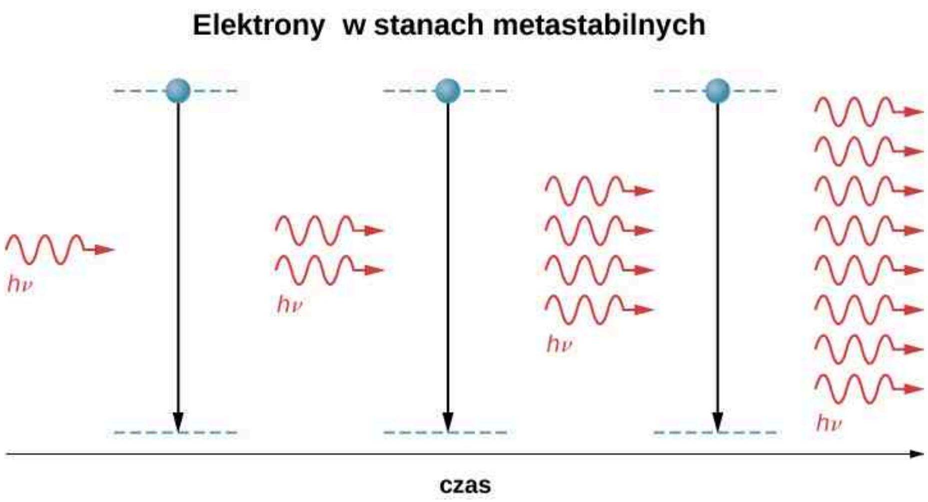
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać procesy fizyczne niezbędne do wytwarzania światła laserowego;
- wyjaśniać różnicę między światłem spójnym i niespójnym;
- na czym polega zastosowanie laserów w odtwarzaczach CD i Blu-Ray.

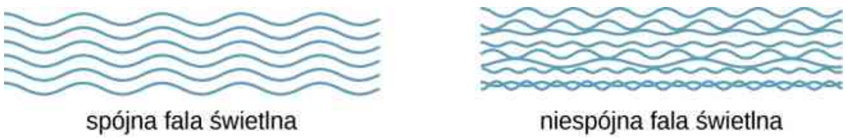
Laser (ang. **laser**) jest urządzeniem, które emituje światło monochromatyczne i spójne. Światło jest spójne, jeśli fotony, które tworzą to światło, mają tę samą fazę, a **monochromatyczne** (ang. **monochromatic light**), jeśli fotony mają tę samą, jedną częstotliwość (kolor). Gdy gaz w laserze absorbuje energię, elektrony w atomach gazu są wzbudzane na różne wyższe poziomy energetyczne. Większość elektronów natychmiast powraca do stanu podstawowego, ale niektóre pozostają w stanie wzbudzonym; taki stan nazywa się **stanem metastabilnym** (ang. **metastable state**). Możliwe jest umieszczenie większości elektronów w atomach w stanie metastabilnym – sytuacja taka nazywa się **inwersją obsadzeń** (ang. **population inversion**).

Gdy foton o odpowiedniej energii oddziałuje z elektronem w stanie metastabilnym (Rysunek 8.28), elektron przechodzi („spada”) do stanu o niższej energii i emituje dodatkowy foton. W rezultacie oba fotony – wymuszający i wyemitowany – poruszają się razem. Proces ten nazywany jest **emisją wymuszoną** (ang. **stimulated emission**). Występuje on ze stosunkowo dużym prawdopodobieństwem, gdy energia fotonu wejściowego jest równa różnicy między energią wzbudzonego i podstawowego poziomu energetycznego elektronu ($\Delta E = h\nu$). Stąd foton wymuszający przejście elektronu i foton wytwarzany mają taką samą energię, $h\nu$. Te dwa poruszające się razem fotony napotykają kolejne elektrony w stanie metastabilnym i proces się powtarza. Rezultatem jest kaskada (lub reakcja łańcuchowa)

kolejnych aktów emisji wymuszonej. Światło lasera jest spójne, ponieważ w jego przypadku wszystkie fale świetlne mają taką samą częstotliwość (kolor) oraz tę samą fazę (dowolne dwa punkty w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku ruchu fali znajdują się w tym samym miejscu fali). Schemat spójnej i niespójnej fali świetlnej jest pokazany na Rysunku 8.29.



Rysunek 8.28 Fizyka lasera. Padający foton o częstotliwości ν wywołuje kaskadę fotonów o tej samej częstotliwości.

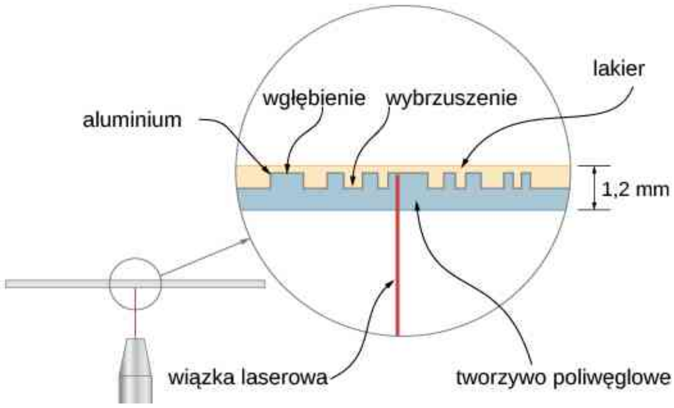


Rysunek 8.29 Spójna fala świetlna zawiera fale o tej samej częstotliwości i tej samej fazie. Fala niespójna składa się z fal o różnych częstotliwościach i różnych fazach.

Lasery mają szeroki zakres zastosowań, np. w komunikacji (światłowodowe linie telefoniczne), w rozrywce (laserowe pokazy świetlne), w medycynie (usuwanie guzów i kauteryzacja naczyń w siatkówce) oraz w sprzedaży detalicznej (czytniki kodów kreskowych). Lasery mogą być wytwarzane z szerokiej gamy materiałów, w tym z gazów (gazowych mieszanin helu i neonu), jak również substancji stałych (na przykład z kryształu rubinu) i płynów (barwniki organiczne). Ostatnio laser został skonstruowany z zastosowaniem jadalnej żelatyny! Poniżej omówimy szczegółowo dwa praktyczne zastosowania laserów: odtwarzacze CD i Blu-Ray.

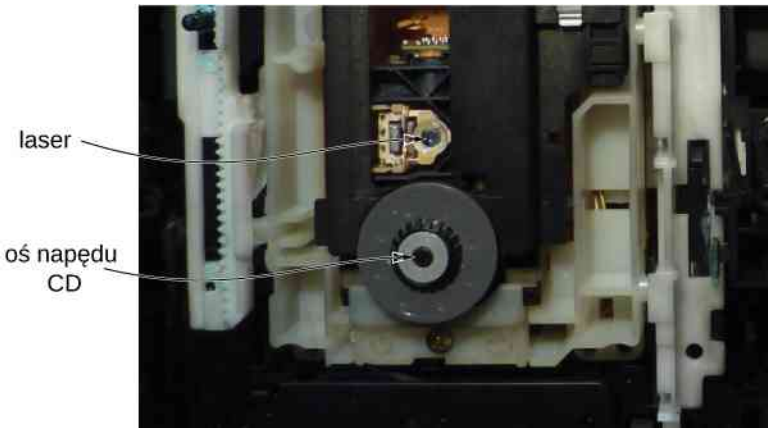
Odtwarzacz CD

Odtwarzacz CD (ang. **CD player**) odczytuje cyfrową informację zapisaną na płycie kompaktowej (CD). Płyta CD to płyta o średnicy $12\ \text{cm}$, zawierająca nośnik z tworzywa poliwęglanowego, na którego powierzchni znajdują się miliony mikroskopijnych wgłębień kodujących dane (Rysunek 8.30). Wgłębienia te układają się w kształt bardzo cienkiej spirali, rozciągającej się w kierunku zewnętrznej krawędzi nośnika. Szerokość toru nie sięga $1\ /\ 20$ szerokości ludzkiego włosa, a wysokości wgłębień są jeszcze mniejsze. Płyta składa się z czterech warstw: warstwy nośnej z poliwęglanu (plastikowa tarcza), warstwy barwnej (topi się podczas zapisu), aluminiowej (lub złotej) warstwy odbijającej i ochronnej warstwy lakieru.



Rysunek 8.30 Płyta kompaktowa jest płytą z tworzywa sztucznego, która wykorzystuje wgłębienia w pobliżu powierzchni w celu zakodowania informacji cyfrowych. Powierzchnia płyty zawiera wiele warstw, łącznie z warstwą aluminium i jedną z tworzywa poliwęglanowego.

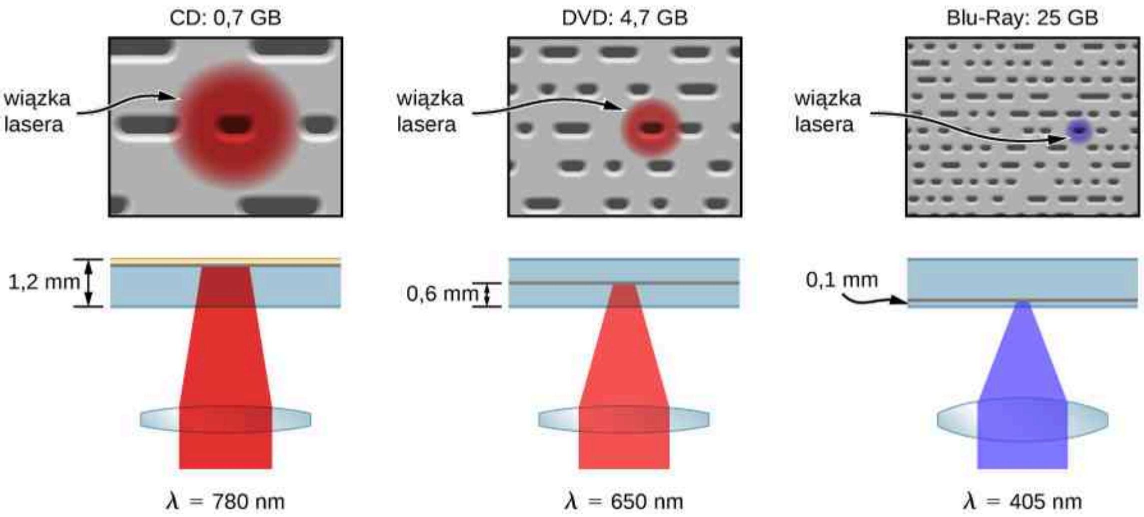
Odtwarzacz CD wykorzystuje laser do odczytu informacji cyfrowej zakodowanej na płycie. Światło laserowe nadaje się do tego celu, ponieważ spójne światło może być skupiane na niezwykle małym obszarze. Szerokość wiązki laserowej przy wejściu do warstwy plastiku wynosi $0{,}8\text{ mm}$, ale warstwa ta wspomaga skupianie wiązki lasera, działając jak soczewka i redukując szerokość wiązki do $0{,}001\text{ mm}$, a zatem pozwala odróżnić wgłębienia w płycie. Wiązka lasera zostaje skupiona na warstwie aluminium nieco ponad powierzchnią dolnej części dysku, tak więc drobne rysy i uszkodzenia nie powodują utrudnień w odczycie. Światło lasera zostaje odbite od warstwy i trafia ponownie do czujnika optycznego w odtwarzaczu, przy czym światło odbite od powierzchni warstwy (poza wgłębieniem) jest jedynie odbite, a światło, które trafia we wgłębienie, ulega destruktywnej interferencji, która wygasza światło powracające (szczegóły tego procesu nie są ważne dla tej dyskusji). Odbite światło jest interpretowane jako „1”, a brak odbicia (wygaszenie) – jako „0”. Uzyskany sygnał cyfrowy przekształcany jest na sygnał analogowy, a sygnał analogowy wprowadzany do wzmacniacza, który zasila urządzenie, takie jak para słuchawek. System laserowy odtwarzacza CD jest pokazany na Rysunku 8.31.



Rysunek 8.31 Odtwarzacz CD z będącym jego częścią laserem.

Odtwarzacz Blu-Ray

Podobnie jak odtwarzacz CD, **odtwarzacz Blu-Ray** (ang. **Blu-Ray player**) odczytuje informację cyfrową (wideo lub audio) zapisaną na dysku, a laser jest używany do nagrywania tej informacji. Wgłębienia na płycie Blu-Ray są znacznie mniejsze i ściślej upakowane niż na CD, tak że można na niej przechowywać więcej informacji. Z tego powodu zdolność rozdzielcza lasera musi być większa. Osiąga się to za pomocą niebieskiego (stąd nazwa „Blu-Ray”) lasera o mniejszej długości fali, $\lambda = 405\text{ nm}$ (CD i DVD korzystają z czerwonego światła laserowego). Porównanie rozmiarów wgłębień, konfiguracji sprzętowych odtwarzaczy CD, DVD i Blu-Ray i związanych z tym rozdzielczości zostało pokazane na Rysunku 8.32. Wielkości wgłębień na dysku Blu-Ray są więcej niż dwa razy mniejsze od wgłębień na płycie DVD lub CD, co daje przynajmniej czterokrotnie większą gęstość zapisu (gęstość zapisu jest w przybliżeniu proporcjonalna do kwadratu długości fali lasera). W odróżnieniu od płyt CD Blu-Ray przechowują dane na warstwie poliwęglanu, która umieszcza dane bliżej obiektywu i pozwala uniknąć problemów z ich odczytem.



Rysunek 8.32 Porównanie rozdzielczości lasera w CD, DVD i Blu-Ray.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 8

KLUCZOWE POJĘCIA

efekt Zeemana (ang. Zeeman effect) rozszczepienie poziomów energetycznych pod wpływem zewnętrznego pola magnetycznego

elektron walencyjny (ang. valence electron) elektron na zewnętrznej powłoce atomu, który bierze udział w wiązaniu chemicznym

emisja wymuszona (ang. stimulated emission) działanie fotonu o ściśle określonej energii, który powoduje przejście elektronu ze stanu metastabilnego do stanu podstawowego i prowadzi do emisji dodatkowego fotonu

fluorescencja (ang. fluorescence) promieniowanie powstałe na skutek stopniowego powrotu wzbudzonego elektronu do stanu podstawowego

grupa chemiczna (ang. chemical group) grupa pierwiastków chemicznych z tej samej kolumny układu okresowego pierwiastków, które posiadają podobne właściwości chemiczne

główna liczba kwantowa (ang. principal quantum number) liczba kwantowa związana z całkowitą energią elektronów w atomie wodoru

inwersja obsadzeń (ang. population inversion) stan, w którym większość elektronów w atomie jest w stanie metastabilnym

konfiguracja elektronowa (ang. electron configuration) opis rozmieszczenia elektronów w atomie na powłokach i podpowłokach, jak np. $1s^2 2s^1$ dla litu

laser (ang. laser) urządzenie emitujące spójne światło wytwarzane przez kaskady elektronów spadających z poziomu metastabilnego do poziomu podstawowego

magnetogram (ang. magnetogram) obrazowe przedstawienie lub mapa aktywności magnetycznej powierzchni Słońca

magneton Bohra (ang. Bohr magneton) moment magnetyczny elektronu, równy $9{,}3 \cdot 10^{-24}$ J / T lub $5{,}8 \cdot 10^{-5}$ eV / T

magnetyczna liczba kwantowa (ang. angular momentum projection quantum number , magnetic orbital quantum number)
liczba kwantowa określająca z-ową składową orbitalnego momentu pędu elektronu w atomie

magnetyczna spinowa liczba kwantowa (ang. spin projection quantum number) liczba kwantowa związana z z-ową składową spinowego momentu pędu elektronu w atomie

metal przejściowy (ang. transition metal) pierwiastek z grupy 3–12, pierwiastki metali przejściowych zawierają elektrony zapełniające podpowłokę d

orbital atomowy (ang. atomic orbital) obszar w przestrzeni, który cechuje pewne prawdopodobieństwo (zwykle około 90 %) znalezienia się w nim elektronów

orbitalna (poboczna) liczba kwantowa (ang. angular momentum orbital quantum number) liczba kwantowa związana z orbitalnym momentem pędu elektronów w atomie

orbitalny magnetyczny moment dipolowy (ang. orbital magnetic dipole moment) miara wielkości pola magnetycznego związanego z orbitalnym momentem pędu elektronu

prawo Moseleya (ang. Moseley's law) zależność pomiędzy liczbą atomową pierwiastka i częstotliwością emitowanych fotonów promieniowania rentgenowskiego

promieniowanie hamowania (ang. braking radiation) promieniowanie powstające przy zderzeniu wiązki elektronów o dużej energii z metalową tarczą (lub promieniowanie wytworzone podczas przyspieszania dowolnej naładowanej cząstki w ośrodku materialnym)

przejścia z odwróceniem spinu (ang. spin-flip transitions) (przejścia spin-flip, przeskok spinowy) przejścia między stanem atomowego układu elektron–proton o zgodnych momentach magnetycznych a stanem o przeciwnych momentach magnetycznych elektronu i protonu

radialna funkcja gęstości prawdopodobieństwa (ang. radial probability density function) funkcja używana w celu określania prawdopodobieństwa znalezienia elektronów w przestrzennym przedziale w otoczeniu r

reguły wyboru (ang. selection rules) zasady, które określają, czy przejścia atomowe są dozwolone czy wzbronione

spinowa liczba kwantowa (ang. spin quantum number) liczba kwantowa związana ze spinowym momentem pędu elektronu

sprzężenie spin-orbita (ang. spin-orbit coupling) oddziaływanie pomiędzy spinowym momentem magnetycznym elektronu a polem magnetycznym wytworzonym przez orbitalny moment pędu elektronu

stan metastabilny (ang. metastable state) stan wzbudzony, w którym elektron pozostaje przez dłuższy czas

struktura nadsubtelna (ang. hyperfine structure) struktura widm atomowych, która wynika z oddziaływań spinowych momentów magnetycznych elektronów z momentem magnetycznym jądra atomowego

struktura subtelna (ang. fine structure) struktura widm atomowych wywołana przez sprzężenie spin-orbita

wiązanie jonowe (ang. ionic bond) wiązanie chemiczne utworzone przez przyciąganie elektryczne pomiędzy dwoma przeciwnie naładowanymi jonami

wiązanie kowalencyjne (ang. covalent bond) wiązanie chemiczne utworzone przez podział „chmury elektronowej” między dwoma atomami

wykres Moseleya (ang. Moseley plot) wykres zależności liczby atomowej pierwiastka od pierwiastka kwadratowego z częstotliwości fali rentgenowskiej

zakaz Pauliego (ang. Pauli’s exclusion principle) żadne dwa elektrony w atomie nie mogą mieć tych samych wartości wszystkich czterech liczb kwantowych (n, l, m_l, m_s)

światło monochromatyczne (ang. monochromatic light) światło, które składa się z fotonów o tej samej częstotliwości

światło spójne (ang. coherent light) światło składające się z fotonów o tej samej częstotliwości i tej samej fazie

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Wartość orbitalnego momentu pędu	$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$
z-owa składowa orbitalnego momentu pędu	$L_z = m_l \hbar$
Radialna funkcja gęstości prawdopodobieństwa	$P(r)\,\mathrm{d}r = \lvert\psi_{n00}\rvert^2 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$
Wartość spinowego momentu pędu	$S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$
z-owa składowa spinowego momentu pędu	$S_z = m_s \hbar$
Spinowy magnetyczny moment dipolowy elektronu	$\vec{\mu}_s = \frac{e}{m_\mathrm{e}} \cdot \vec{S}$
Orbitalny magnetyczny moment dipolowy elektronu	$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m_\mathrm{e}} \cdot \vec{L}$
Energia potencjalna oddziaływania między orbitalnym magnetycznym momentem dipolowym a zewnętrznym polem magnetycznym	$E_\mathrm{p}(\theta) = -\mu_z B = m_l \mu_B B$
Maksymalna liczba elektronów na podpowłoce	$N = 4l + 2$
Reguła wyboru dla przejść atomowych w atomie wodoropodobnym	$\Delta l = \pm 1$
Prawo Moseleya dla promieniowania rentgenowskiego	$Z - 1 \sim \sqrt{\nu}$

PODSUMOWANIE

8.1 Atom wodoru

- Elektron w atomie wodoru może być opisany przez jego funkcję falową, gęstość prawdopodobieństwa, całkowitą energię i orbitalny moment pędu.
- Stan atomu wodoru jest określony przez jego liczby kwantowe (n, l, m_l) (pomijając spin).
- W przeciwieństwie do modelu atomu wodoru Bohra model Schrödingera daje przewidywania oparte na stwierdzeniach dotyczących prawdopodobieństwa.
- Liczby kwantowe atomu wodoru mogą być użyte do obliczania ważnych informacji dotyczących atomów.

8.2 Orbitalny dipolowy moment magnetyczny elektronu

- Atom wodoru ma właściwości magnetyczne, ponieważ ruch elektronu odpowiada przepływowi prądu w zamkniętej pętli.
- Poziomy energetyczne atomu wodoru, związane z orbitalnym momentem pędu, są rozszczepiane przez zewnętrzne pole magnetyczne, ponieważ orbitalny moment magnetyczny oddziałuje z zewnętrznym polem magnetycznym.
- Liczby kwantowe elektronu w atomie wodoru mogą być wykorzystane do obliczenia wielkości i orientacji orbitalnego dipolowego momentu magnetycznego atomu.

8.3 Spin elektronu

- Stan elektronu w atomie wodoru może być wyrażony przez pięć liczb kwantowych (n, l, m_l, s, m_s).
- Liczba kwantowa spinowego momentu pędu elektronu $s = +1 / 2$. Magnetyczna spinowa liczba kwantowa wynosi $m_s = +1 / 2$ lub $m_s = -1 / 2$ (spin w górę lub w dół).
- Struktury subtelne i nadsubtelne widma wodoru są wyjaśnione przez oddziaływania magnetyczne wewnątrz atomu.

8.4 Zakaz Pauliego i układ okresowy pierwiastków

- Zakaz Pauliego stwierdza, że żadne dwa elektrony w atomie nie mogą mieć tego samego zestawu liczb kwantowych.
- Struktura układu okresowego pierwiastków może być wyjaśniona przez całkowitą energię, orbitalny moment pędu i spin elektronów w atomie.
- Stan atomu może być wyrażony przez podanie jego konfiguracji elektronowej, która opisuje sposób zapełnienia przez elektrony powłok i podpowłok atomowych.

8.5 Widma atomowe oraz promieniowanie rentgenowskie

- Promieniowanie jest pochłaniane i emitowane przy przejściach elektronów pomiędzy poziomami energetycznymi atomów (przejściach atomowych).
- Liczby kwantowe mogą być wykorzystane do oszacowania energii, częstotliwości i długości fali fotonu wytwarzanego podczas przejść atomowych.
- Fluorescencja atomowa pojawia się, gdy elektron w atomie jest wzbudzony o kilka poziomów powyżej poziomu stanu podstawowego przez absorpcję wysokoenergetycznych ultrafioletowych (UV) fotonów.
- Fotony rentgenowskie wytwarzane są, gdy wolne miejsce w wewnętrznej powłoce atomu zostaje wypełnione przez elektron z zewnętrznej powłoki atomu.
- Częstotliwość promieniowania rentgenowskiego jest związana z liczba atomową Z atomu.

8.6 Lasery

- Światło lasera jest spójne (koherentne, czyli monochromatyczne i „powiązane fazowo”).
- Światło lasera jest wytwarzane przez uzyskanie inwersji obsadzeń i następującą wymuszoną emisję elektronów w ośrodku (stałym, ciekłym, gazowym).
- W odtwarzaczach CD i Blu-Ray używa się laserów do odczytywania cyfrowych informacji przechowywanych na dyskach.

PYTANIA

8.1 Atom wodoru

1. Określ fizyczne znaczenie każdej z liczb kwantowych atomu wodoru.

2. Opisz stan podstawowy atomu wodoru za pomocą funkcji falowej, funkcji gęstości prawdopodobieństwa i orbitali atomowych.

3. Porównaj model atomu wodoru Bohra z modelem Schrödingera. W szczególności porównaj wartości energii i orbitalnego momentu pędu dla stanu podstawowego, wynikające z obu modeli.

8.2 Orbitalny dipolowy moment magnetyczny elektronu

4. Wyjaśnij, dlaczego linie widmowe atomu wodoru są rozszczepiane przez zewnętrzne pole magnetyczne. Od czego zależy liczba i wielkość rozszczepienia tych linii?

5. Atom wodoru znajduje się w polu magnetycznym. Która z następujących wielkości ulega zmianie z tego powodu:
a. całkowita energia;
b. wartość momentu pędu;
c. z-owa składowa momentu pędu;
d. kąt polarny?

6. Od czego zależy orbitalny dipolowy magnetyczny moment elektronu?

8.3 Spin elektronu

7. Wyjaśnij, jak atom wodoru w stanie podstawowym $(l = 0)$ może oddziaływać z zewnętrznym polem magnetycznym.

8. Porównaj orbitalny moment pędu ze spinowym momentem pędu elektronu w atomie wodoru.

9. Podaj wszystkie możliwe wartości s i m_s dla elektronu. Czy istnieją cząstki, dla których wartości te są inne?

10. Czy wektory momentu pędu $\vec{L}$ i $\vec{S}$ muszą być ustawione zgodnie względem siebie?

11. Co to jest sprzężenie spin-orbita?

8.4 Zakaz Pauliego i układ okresowy pierwiastków

12. Co to jest zakaz Pauliego? Wyjaśnij jego znaczenie dla zrozumienia struktur atomowych i wiązań w cząsteczkach.

13. Porównaj konfiguracje elektronowe pierwiastków w tej samej kolumnie układu okresowego.

14. Porównaj konfiguracje elektronowe pierwiastków, które należą do tego samego wiersza układu okresowego.

8.5 Widma atomowe oraz promieniowanie rentgenowskie

15. Widma atomowe i molekularne są dyskretne. O czym to świadczy i jak widma dyskretne związane są z kwantowaniem energii i orbit elektronów w atomach i cząsteczkach?

16. Omów proces absorpcji światła przez materię przy uwzględnieniu struktury atomowej absorbującego ośrodka.

17. NGC 1763 jest mgławicą emisyjną w Wielkim Obłoku Magellana na obrzeżach Drogi Mlecznej. Światło ultrafioletowe gorących gwiazd jonizuje atomy wodoru w mgławicy. Gdy protony i elektrony rekombinują, emitowane jest światło w zakresie widzialnym. Jakie są energie fotonów uczestniczących w tych dwóch przejściach?

18. Dlaczego promieniowanie rentgenowskie emitowane jest tylko przy przejściu elektronów na powłoki wewnętrzne? Jaki rodzaj fotonów jest emitowany podczas przejść pomiędzy powłokami zewnętrznymi?

19. W jaki sposób dozwolone orbity elektronów w atomach różnią się od dozwolonych orbit planet krążących wokół Słońca?

8.6 Lasery

20. Opisz różnice między światłem spójnym i monochromatycznym.

21. Dlaczego do wytwarzania światła laserowego niezbędny jest stan metastabilny?

22. Jaka jest różnica między światłem żarówki i światłem laserowym?

23. W jaki sposób odtwarzacz Blu-Ray jest w stanie odczytać więcej informacji niż odtwarzacz CD?

24. Jakie są podobieństwa i różnice między odtwarzaczami CD i Blu-Ray?

ZADANIA

8.1 Atom wodoru

25. Mamy obliczyć funkcję falową w punkcie $(x, y, z) = (2, 1, 1)$, w prostokątnym układzie współrzędnych (w umownych jednostkach). Jakie są współrzędne sferyczne tego punktu?

26. Jeśli atom ma elektron w stanie $n = 5$ z $m_l = 3$, to jakie są możliwe wartości l?

27. Jakie są możliwe wartości m_l elektronu w stanie $n = 4$?

28. Jakie są, jeśli w ogóle istnieją, ograniczenia dla

innych liczb kwantowych elektronu w atomie, jeśli magnetyczna liczba kwantowa $m_l = 1$?

29. a. Ile kątów może tworzyć wektor $\vec{L}$ z osią z dla elektronów z $l = 2$?
b. Oblicz wartość najmniejszego kąta.

30. Siła działająca na elektron jest „ujemnym gradientem funkcji energii potencjalnej". Skorzystaj z tego oraz z Równania 8.1, aby pokazać, że siła działająca na elektron w atomie wodoru jest dana przez prawo Coulomba.

31. Jaka jest łączna liczba stanów z orbitalnym momentem pędu $l = 0$ (pomiń spin elektronu)?

32. Funkcja falowa jest określona w punkcie o współrzędnych sferycznych $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{3}, 45°, 45°)$, gdzie r jest podane w umownych jednostkach. Jakie są współrzędne kartezjańskie tego położenia?

33. Prawo Coulomba stwierdza, że siła pomiędzy dwoma naładowanymi cząstkami wynosi: $F = kQq / r^2$. Za pomocą tego wyrażenia określ funkcję energii potencjalnej.

34. Napisz wyrażenie na łączną liczbę stanów z orbitalną liczbą kwantową l.

35. Rozpatrz wodór w stanie podstawowym, opisany funkcją falową ψ_{100}.
a. Przy pomocy pochodnej określ radialne położenie (odległość od centrum), dla którego gęstość prawdopodobieństwa $P(r)$ jest maksymalna;
b. Korzystając z określenia średniej wartości funkcji za pomocą całki, znajdź średnie radialne położenie elektronu. (Jest to tak zwana wartość oczekiwana radialnego położenia elektronu). Przedstaw otrzymane wyniki, używając promienia Bohra, a_0;
c. Dlaczego te wartości się różnią?

36. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że elektron w stanie $1s$ atomu wodoru znajduje się w odległości od jądra większej niż promień Bohra?

37. Ile jest możliwych polarnych kątów dla elektronu w stanie $l = 5$?

38. Jaka jest maksymalna liczba stanów elektronu w atomie wodoru na powłoce $n = 2$ (pomiń spin elektronu)?

39. Jaka jest maksymalna liczba stanów elektronu w atomie wodoru na powłoce $n = 3$ (pomiń spin elektronu)?

8.2 Orbitalny dipolowy moment magnetyczny elektronu

40. Znajdź wielkość orbitalnego magnetycznego momentu dipolowego elektronu w stanie $3p$. Wyraź swoją odpowiedź przez μ_B.

41. Prąd o natężeniu $I = 2\,\text{A}$ przepływa przez kwadratową ramkę o długości boku $2\,\text{cm}$. Jaki jest moment magnetyczny ramki?

42. Oszacuj stosunek momentu magnetycznego elektronu do momentu magnetycznego mionu dla tego samego stanu orbitalnego momentu pędu. Wskazówka: $m_\mu = 105{,}7\,\text{MeV} / c^2$.

43. Znajdź wielkość orbitalnego dipolowego magnetycznego momentu pędu elektronu w stanie $4d$. Wyraź swoją odpowiedź przez μ_B.

44. Dla elektronu w stanie $3d$ w zewnętrznym polu magnetycznym $2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{T}$ znajdź
a. natężenie prądu związanego z orbitalnym momentem pędu;
b. maksymalny moment siły (obrotowy) działający ze strony zewnętrznego pola magnetycznego.

45. Elektron w atomie wodoru jest w stanie $n = 5$, $l = 4$. Znajdź najmniejszy kąt, jaki moment magnetyczny tworzy z osią z. (W odpowiedzi wykorzystaj μ_B).

46. Znajdź wielkość minimalnego momentu siły $\left|\vec{M}\right|$, który działa na orbitalny dipolowy moment magnetyczny elektronu w stanie $3p$ w zewnętrznym polu magnetycznym $2{,}5 \cdot 10^{-3}\,\text{T}$.

47. Elektron w atomie wodoru znajduje się w stanie $3p$. Znajdź najmniejszy kąt, jaki moment magnetyczny tworzy z osią z. (W odpowiedzi użyj μ_B).

48. Pokaż, że $E_\text{p} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Wskazówka: Ile wynosi nieskończenie mała praca wykonywana w celu dostosowania kierunku momentu magnetycznego do kierunku zewnętrznego pola? Oblicz najpierw pracę podczas obracania wektora momentu magnetycznego o kąt $-\text{d}\theta$ (w stronę dodatnich wartości osi z), gdzie $\text{d}\theta$ jest dodatnią zmianą kąta.

8.3 Spin elektronu

49. Jaka jest wartość spinowego momentu pędu elektronu (w odpowiedzi użyj $\hbar$)?

50. Jakie są możliwe kierunki polarne (kąty polarne) wektora spinowego momentu pędu elektronu?

51. Dla $n = 1$ napisz wszystkie możliwe zestawy liczb

kwantowych (n, l, m_l, m_s).

52. Atom wodoru znajduje się w jednorodnym zewnętrznym polu magnetycznym ($B = 200\,\text{T}$). Oblicz długości fali promieniowania wytwarzanego przy przejściu ze stanu „spin w górę” do stanu „spin w dół”.

53. Jeśli pole magnetyczne z poprzedniego zadania wzrośnie czterokrotnie, to jak zmieni się długość fali promieniowania wytwarzanego przy przejściu ze stanu „spin w górę” do stanu „spin w dół”?

54. Jeżeli moment magnetyczny w poprzednim zadaniu będzie dwukrotnie większy, co się stanie z częstotliwością światła wytwarzanego przy przejściu ze stanu „spin w górę” do stanu „spin w dół”?

55. Dla $n = 2$ napisz wszystkie możliwe zestawy liczb kwantowych (n, l, m_l, m_s).

8.4 Zakaz Pauliego i układ okresowy pierwiastków

56. a. Ile elektronów może być na powłoce $n = 4$?
b. Jakie są to podpowłoki i ile elektronów może być na każdej z nich?

57. a. Jaka jest minimalna wartość l podpowłoki, na której znajduje się 11 elektronów?
b. W przypadku gdy ta podpowłoka należy do powłoki $n = 5$, jaka jest notacja spektroskopowa tego atomu?

58. **Nieracjonalne wyniki.** Które z następujących notacji spektroskopowych nie są dozwolone?
a. $5s^1$;
b. $1d^1$;
c. $4s^3$;
d. $3p^7$;
e. $5g^{15}$.

Podaj, jaka reguła została naruszona przy niedozwolonych notacjach.

59. Zapisz konfigurację elektronową dla potasu.

60. Zapisz konfigurację elektronową dla żelaza.

61. Elektron walencyjny w potasie jest wzbudzony do stanu $5d$.
a. Jaka jest wielkość orbitalnego momentu pędu elektronu?
b. Ile stanów jest możliwych wzdłuż wybranego kierunku?

62. a. Jeżeli atom na pewnej podpowłoce ma dziewięć elektronów, to jaka jest minimalna wartość l?
b. Jaka jest notacja spektroskopowa dla tego atomu, jeśli ta podpowłoka jest częścią powłoki o $n = 3$?

63. Zapisz konfigurację elektronową dla atomu magnezu.

64. Zapisz konfigurację elektronową dla atomu węgla.

65. Wartości wypadkowego spinu elektronów pierwiastków od B do Ne w stanie podstawowym wynoszą odpowiednio: $\sqrt{3}\hbar/2$, $\sqrt{2}\hbar$, $\sqrt{15}\hbar/2$, $\sqrt{2}\hbar$, $\sqrt{3}\hbar/2$ i 0. Wykaż, że te wartości są zgodne z regułą Hunda.

8.5 Widma atomowe oraz promieniowanie rentgenowskie

66. Jaka jest minimalna częstotliwość fotonu potrzebna do jonizacji
a. jonu He^+ w stanie podstawowym;
b. jonu Li^{2+} w pierwszym stanie wzbudzonym?

67. Jon Li_2^+ przechodzi ze stanu opisanego główną liczbą kwantową $n = 4$ do stanu o $n = 2$.
a. Jaka jest energia fotonu emitowanego w czasie przejścia?
b. Jaka jest długość fali tego fotonu?

68. Czerwone światło emitowane przez laser rubinowy ma długość fali $694{,}3\,\text{nm}$. Jaka jest różnica między energiami stanów początkowego i końcowego, odpowiadającymi emisji tego światła?

69. Żółte światło z sodowej lampy ulicznej jest wytwarzane przez przejście atomów sodu ze stanu $3p$ do stanu $3s$. Jeśli różnica energii tych dwóch stanów wynosi $2{,}1\,\text{eV}$, to jaka jest długość fali światła żółtego?

70. Oszacuj długość fali linii K_α promieniowania rentgenowskiego wapnia.

71. Oszacuj długość fali linii K_α promieniowania rentgenowskiego cezu.

72. Promienie rentgenowskie są wytwarzane przez uderzenie w tarczę wiązką elektronów. Przed uderzeniem elektrony są przyspieszone w polu elektrycznym o różnicy energii potencjalnej: $\Delta E_\text{p} = -e\Delta V$, gdzie e jest ładunkiem elektronu, a ΔV jest różnicą potencjałów. Jaka jest minimalna długość emitowanej fali, jeśli $\Delta V = 15\,\text{kV}$?

73. Co się stanie z minimalną długością fali w poprzednim zadaniu, gdy napięcie lampy rentgenowskiej zwiększymy dwukrotnie?

74. Załóżmy, że eksperyment z poprzedniego zadania jest przeprowadzony z mionami. Czy zmieni się minimalna długość fali?

75. Lampa rentgenowska z przyłożonym napięciem $50\,\text{kV}$ przyspiesza elektrony w stronę metalowej tarczy.

a. Jaka jest najkrótsza długość fali promieniowania rentgenowskiego wysyłana przez tę tarczę?
b. Oblicz energię wysyłanych fotonów w eV;
c. Wyjaśnij zależność energii fotonów od zastosowanego napięcia.

76. Kineskop kolorowego telewizora generuje nieco promieniowania rentgenowskiego, gdy wiązka elektronów pada na ekran. Jaka jest najmniejsza długość fali tego promieniowania, gdy do przyspieszenia elektronów zastosowano napięcie równe $30\,\mathrm{kV}$ (należy pamiętać, że telewizory posiadają ekranowanie chroniące widzów przed naświetlaniem promieniowaniem rentgenowskim)?

77. Do lampy rentgenowskiej przyłożono napięcie $100\,\mathrm{kV}$.
a. Ile wynosi maksymalna energia fotonu, który może zostać wytworzony przez lampę rentgenowską? Podaj odpowiedź w elektronowoltach i dżulach;
b. Znajdź długość fali takiego fotonu.

78. Maksymalna charakterystyczna energia fotonów promieniowania rentgenowskiego pochodzi z wychwytywania wolnego elektronu przez lukę na powłoce K. Ile wynosi ta energia, wyrażona w keV, dla wolframu, przy założeniu, że swobodny elektron nie ma początkowej energii kinetycznej?

79. Jakie są przybliżone energie fotonów promieniowania rentgenowskiego K_α i K_β dla miedzi?

80. Porównaj długości fal fotonów promieniowania rentgenowskiego charakterystycznego dla miedzi i złota.

81. Przybliżone energie fotonów promieniowania rentgenowskiego K_α i K_β dla miedzi wynoszą odpowiednio $8\,\mathrm{keV}$ i $9{,}48\,\mathrm{keV}$. Ustal stosunek częstotliwości rentgenowskich złota do miedzi, a następnie użyj tej wartości do oszacowania odpowiednich energii fotonów promieniowania K_α i K_β dla złota.

8.6 Lasery

82. Laser molekularny stosowany w chirurgii emituje promieniowanie w podczerwieni o długości fali $10{,}6\,\mathrm{\mu m}$. Naświetlenie wiązką tego lasera powoduje odparowanie $1\,\mathrm{cm}^3$ ciała poprzez podniesienie jego temperatury do $100\,\mathrm{°C}$ w czasie błysku, trwającego $1\,\mathrm{ms}$.
a. Ile fotonów bierze udział w tym procesie? Możesz założyć, że ciało ma takie samo ciepło parowania jak woda;
b. Jaka była minimalna moc wyjściowa lasera podczas błysku?

83. Laser ekscymerowy, wykorzystywany do korekcji wzroku, emituje promieniowanie UV o długości fali $193\,\mathrm{nm}$.
a. Oblicz energię emitowanych fotonów w eV;
b. Te fotony są stosowane do odparowania tkanki rogówki, której właściwości są bardzo podobne do wody. Oblicz ilość energii potrzebną do tego, aby cząsteczka wody zmieniła fazę z ciekłej na gazową – czyli podziel ciepło parowania wody w kJ/kg przez liczbę cząsteczek wody w kilogramie;
c. Wyraź tę energię w eV i porównaj ją z energią fotonu. Przedyskutuj wnioski.

ZADANIA DODATKOWE

84. Wykaż, że w stanie wzbudzonym atomu wodoru o głównej liczbie kwantowej n najmniejszy kąt, jaki wektor orbitalnego momentu pędu może tworzyć z osią z, wynosi $\theta = \arccos\left(\sqrt{(n-1)/n}\right)$.

85. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że elektron $1s$ atomu wodoru znajduje się między $r = 0$ i $r \longrightarrow \infty$?

86. Naszkicuj funkcję energii potencjalnej elektronu atomu wodoru.
a. Jaka jest wartość tej funkcji dla $r = 0$ oraz w granicy $r \longrightarrow \infty$?
b. Skomentuj wynik dotyczący $r = 0$.

87. Znajdź wartość pobocznej liczby kwantowej l dla Księżyca krążącego wokół Ziemi.

88. Wykaż, że maksymalna liczba stanów elektronowych z różnymi magnetycznymi liczbami kwantowymi na n-tej powłoce atomu wynosi n^2 (pomiń spin elektronów). Wskazówka: Sporządź dla każdej podpowłoki tabelę liczby stanów z różnymi magnetycznymi liczbami kwantowymi i znajdź wzór.

89. Jaka jest wartość momentu magnetycznego elektronu?

90. Jaka jest maksymalna liczba stanów elektronowych na powłoce $n = 5$?

91. Atom wodoru w stanie podstawowym jest umieszczony w jednorodnym polu magnetycznym, a fotony emitowane są podczas przejścia ze stanu „spin w górę” do stanu „spin w dół”. Długość fali fotonu wynosi $168\,\mathrm{\mu m}$. Jaka jest wartość indukcji pola magnetycznego?

92. Wykaż, że maksymalna liczba stanów elektronowych w n-tej powłoce atomu wynosi $2n^2$.

93. Elektron walencyjny chloru jest wzbudzony do stanu $3p$.

a. Jaka jest wartość orbitalnego momentu pędu elektronu?
b. Jakie są możliwe wartości jego z-owej składowej?

94. Które z poniższych zapisów są dopuszczalne (czyli które nie naruszają żadnej z zasad dotyczących wartości liczb kwantowych)?
a. $1s^1$;
b. $1d^3$;
c. $4s^2$;
d. $3p^7$;
e. $6h^{20}$.

95. Jon Be^{3+} dokonuje przejścia ze stanu $n = 3$ do stanu $n = 2$.
a. Jaka jest energia fotonu emitowanego podczas przejścia?
b. Jaka jest długość fali fotonu?

96. Maksymalna energia fotonów charakterystycznego promieniowania rentgenowskiego pochodzi od wychwytywania wolnego elektronu przez lukę (wakans) na powłoce K. Ile wynosi częstotliwość fotonów dla wolframu przy założeniu, że swobodny elektron nie ma początkowej energii kinetycznej?

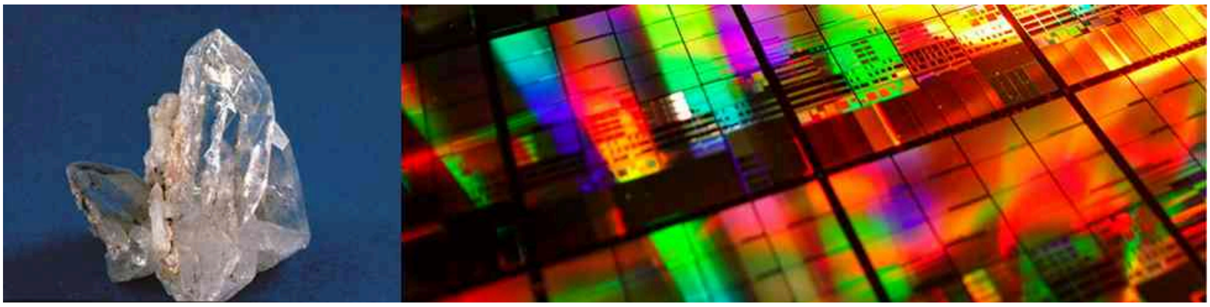
97. Wyprowadź wyrażenie określające stosunek częstotliwości fotonów promieniowania rentgenowskiego dla dwóch pierwiastków o liczbach atomowych Z_1 i Z_2.

98. Porównaj długości fal fotonów rentgenowskich promieniowania charakterystycznego dla miedzi i srebra.

99. a. Jakie napięcie musi być stosowane w lampie rentgenowskiej do uzyskania fali promieniowania rentgenowskiego, używanego w celu badania szczegółów budowy jąder, o długości $0{,}01\ \text{fm}$?
b. Co wydaje się nielogiczne w tym wyniku?
c. Jakie założenia są nieuzasadnione lub sprzeczne?

100. Student w laboratorium fizyki obserwuje widmo wodoru otrzymane z siatki dyfrakcyjnej w celu pomiaru długości fali emitowanego promieniowania. W widmie zauważa on żółtą linię i stwierdza, że jej długość fali wynosi $589\ \text{nm}$.
a. Zakładając, że jest ona częścią serii Balmera, ustal główną liczbę kwantową n dla stanu początkowego;
b. Czy wynik jest poprawny?
c. Które założenie jest nieuzasadnione?

9 | FIZYKA FAZY SKONDENSOWANEJ



Rysunek 9.1 Struktura kryształu kwarcu pozwala na formowanie gładkich płaszczyzn, które załamują światło, dzięki czemu kryształ nadaje się do wytwarzania biżuterii. Krzem, główny składnik kwarcu, może również występować w postaci krystalicznej. Kryształy krzemu są półprzewodnikami, na których opiera się światowy przemysł elektroniczny. Źródło lewej części rysunku: modyfikacja pracy wykonanej przez United States Geological Survey

Treść rozdziału

Wstęp

W tym rozdziale zobaczymy, jak mechanikę kwantową stosuje się do bardziej złożonych układów, takich jak molekuły, metale, półprzewodniki i nadprzewodniki. Przypomnimy i rozwiniemy koncepcje z poprzednich rozdziałów, w tym funkcje falowe, orbitale i stany kwantowe. Wprowadzimy także wiele innych pojęć, m.in. wiązania kowalencyjnego, rotacyjnych poziomów energetycznych, energii Fermiego, pasm energetycznych, domieszkowania oraz par Coopera.

Głównym tematem tego rozdziału jest struktura krystaliczna ciał stałych. Przez wieki kryształy ceniono za ich piękno, na przykład klejnoty takie jak diamenty czy szmaragdy, a także kryształy geologiczne, jak kwarc czy rudy metali. Jednakże struktury krystaliczne półprzewodników takich jak krzem umożliwiły powstanie współczesnego przemysłu elektronicznego. W tym rozdziale dowiemy się, jak struktura ciał stałych wpływa na ich właściwości, począwszy od twardości i przezroczystości aż po przewodnictwo elektryczne.

9.1 | Rodzaje wiązań cząsteczkowych

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- rozróżniać różne typy wiązań cząsteczkowych;
- wyznaczać energię dysocjacji cząsteczki, wykorzystując koncepcję energii jonizacji, powinowactwa elektronowego i siły Coulomba;
- opisywać wiązanie kowalencyjne za pomocą symetrii wymiany;
- wyjaśniać strukturę fizyczną cząsteczki, używając koncepcji hybrydyzacji.

Mechanika kwantowa odniosła wielki sukces w wyjaśnianiu struktury i wiązań w cząsteczkach i dlatego stała się fundamentem całej chemii. Chemia kwantowa, jak często się ją nazywa, odpowiada na takie podstawowe pytania jak: dlaczego istnieje cząsteczka H_2O, dlaczego kąt między wiązaniami atomów wodoru wynosi dokładnie $104{,}5°$ i dlaczego w temperaturze pokojowej cząsteczki te łączą się, tworząc ciecz. Stosowanie mechaniki kwantowej do cząsteczek wymaga zaawansowanego aparatu matematycznego, dlatego nasza dyskusja będzie miała jedynie charakter jakościowy.

Ponieważ będziemy badać cząsteczki, a następnie ciała stałe, zastosujemy wiele różnych naukowych modeli. W niektórych przypadkach popatrzymy na cząsteczkę lub na kryształ jak na układ punktowych jąder z elektronami krążącymi w przestrzeni wokół nich po dobrze określonych trajektoriach, jak w modelu Bohra. W innych zaś wykorzystamy w pełni naszą wiedzę z mechaniki kwantowej, aby zbadać te układy, wykorzystując funkcje falowe oraz pojęcie spinu elektronu. Należy jednak pamiętać o tym, że opisujemy fizykę współczesną za pomocą modeli i że różne modele służą różnym celom. Nie zawsze trzeba używać tych najbardziej zaawansowanych, jeśli sprawdzi się prostszy, łatwiejszy do zastosowania.

Rodzaje wiązań

W związkach chemicznych występuje wiele rodzajów wiązań chemicznych (ang. **chemical bonds**). **Wiązanie jonowe** (ang. **ionic bond**) powstaje, kiedy elektron przemieszcza się z jednego atomu do drugiego. **Wiązanie kowalencyjne** (ang. **covalent bond**) – gdy elektrony uwspólniane są przez atomy. **Wiązanie van der Waalsa** (ang. **van der Waals bond**) jest wynikiem przyciągania się spolaryzowanych cząsteczek i jest ono znacznie słabsze niż wiązanie jonowe czy kowalencyjne. Istnieje także wiele innych typów wiązań. Wiązania często powstają w wyniku jednoczesnego działania kilku mechanizmów. W tym rozdziale skupimy się na wiązaniach jonowych i kowalencyjnych.

Wiązania jonowe

Wiązanie jonowe jest przypuszczalnie najłatwiejszym do zrozumienia typem wiązania. Tłumaczy ono między innymi, w jaki sposób tworzone są sole, takie jak chlorek sodu, NaCl. Atom sodu (symbol Na) ma taki sam układ elektronów jak atom neonu oraz jeden elektron w stanie $3s$. Aby usunąć ten jeden elektron z atomu sodu, potrzeba tylko $5{,}14\,\mathrm{eV}$ energii, toteż Na łatwo oddaje go sąsiedniemu atomowi, co prowadzi do bardziej stabilnego układu. Chlor (symbol Cl) potrzebuje tylko jednego elektronu, aby zapełnić powłokę walencyjną, dlatego chętnie przyjmuje elektron, który znajdzie się w pobliżu atomu sodu. Z tego powodu mówi się, że chlor posiada duże **powinowactwo elektronowe** (ang. **electron affinity**), które jest energią uwalnianą przy przyłączeniu elektronu. Energia oddana w tym procesie przez atom chloru wynosi $3{,}62\,\mathrm{eV}$. Po przejściu elektronu z atomu sodu do atomu chloru atom sodu staje się jonem dodatnim, a atom chloru jonem ujemnym. Całkowita energia potrzebna do tego przejścia wynosi

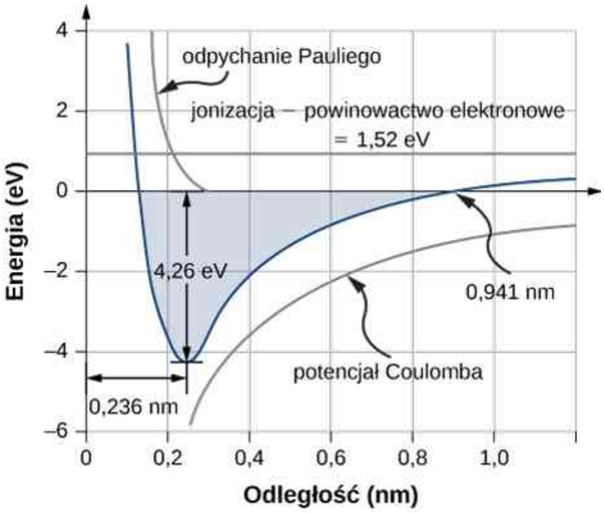
$$E_{\text{przejścia}} = 5{,}14\,\mathrm{eV} - 3{,}62\,\mathrm{eV} = 1{,}52\,\mathrm{eV}\,.$$

Dodatni jon sodu i ujemny jon chloru podlegają przyciągającej sile Coulomba. Energia potencjalna związana z tą siłą wynosi

$$E_{\text{Coul}} = -\frac{ke^2}{r_0}, \qquad (9.1)$$

gdzie $ke^2 = 1{,}44\,\mathrm{nm\,eV}$, a r_0 jest odległością między jonami.

W miarę jak jony sodu i chloru zbliżają się do siebie („zsuwają się ze zbocza energii potencjalnej”), występująca między nimi siła przyciągająca rośnie. Jednak gdy jony są zbyt blisko, funkcje falowe elektronów rdzeni tych jonów zaczynają się na siebie nakładać. Z powodu zakazu Pauliego taka sytuacja powoduje wzrost energii elektronów rdzeni i wzrost energii całej cząsteczki. **Odległość równowagowa** (ang. **equilibrium separation distance**) lub **długość wiązania** (ang. **bond length**) między jonami odpowiada najniższemu stanowi energetycznemu cząsteczki. Dla dwuatomowej NaCl odległość ta to $0{,}236\,\text{nm}$. Rysunek 9.2 pokazuje energię całkowitą NaCl w funkcji odległości między jonami Na i Cl.



Rysunek 9.2 Wykres energii całkowitej w funkcji odległości między jonami w chlorku sodu. Odległość równowagowa odpowiada minimum energii całkowitej ($-4{,}26\,\text{eV}$).

Całkowita energia potrzebna do utworzenia pojedynczej cząsteczki soli wynosi

$$E_{\text{tworzenia}} = E_{\text{przejścia}} + E_{\text{Coul}} + E_{\text{odpychania}}, \tag{9.2}$$

gdzie $E_{\text{odpychania}}$ jest energią związaną z odpychaniem między elektronami rdzenia, spowodowanym zakazem Pauliego (ang. **Pauli’s exclusion principle**). Wartość $E_{\text{tworzenia}}$ musi być ujemna, aby wiązanie zachodziło spontanicznie. **Energia dysocjacji** (ang. **dissociation energy**) definiowana jest jako energia potrzebna do rozłożenia cząsteczki na jony składowe i wynosi

$$E_{\text{dysocjacji}} = -E_{\text{tworzenia}}. \tag{9.3}$$

Każdy rodzaj cząsteczki dwuatomowej ma swoją charakterystyczną energię dysocjacji oraz odległość równowagową. Przykładowe wartości podane są w Tabeli 9.1.

Cząsteczka	Energia dysocjacji (eV)	Odległość równowagowa lub długość wiązania (nm)
NaCl	4,26	0,236
NaF	4,99	0,193
NaBr	3,80	0,250
NaI	3,10	0,271
NaH	2,08	0,189
LiCl	4,86	0,202
LiH	2,47	0,239

Tabela 9.1 Długość wiązania. Wartości energii dysocjacji i długości wiązań wybranych cząsteczek dwuatomowych.

Cząsteczka	Energia dysocjacji (eV)	Odległość równowagowa lub długość wiązania (nm)
LiI	3,67	0,238
KCl	4,43	0,267
KBr	3,97	0,282
RbF	5,12	0,227
RbCl	4,64	0,279
CsI	3,57	0,337
H–H	4,50	0,075
N–N	9,80	0,110
O–O	5,20	0,120
F–F	1,60	0,140
Cl–Cl	2,50	0,200

Tabela 9.1 Długość wiązania. Wartości energii dysocjacji i długości wiązań wybranych cząsteczek dwuatomowych.

Przykład 9.1

Energia soli

Jaka jest energia dysocjacji cząsteczki soli (NaCl)?

Strategia rozwiązania

Chlorek sodu (NaCl) jest solą, w której występuje wiązanie jonowe. Na zmianę energii towarzyszącą temu wiązaniu składają się trzy główne procesy: jonizacja Na, przejęcie elektronu z atomu Na przez atom Cl i wzajemne przyciąganie Coulomba utworzonych jonów (Na^+ i Cl^-). Jeśli jony znajdą się zbyt blisko siebie, odpychają się z powodu zakazu Pauliego ($0{,}32\,eV$). Odległość równowagowa wynosi $r_0 = 0{,}236\,nm$.

Rozwiązanie

Zamiana energii towarzysząca przejściu elektronu z Na na Cl wynosi $1{,}52\,eV$, tak jak pokazano wcześniej w tym rozdziale. W położeniach równowagowych atomy znajdują się w odległości $r_0 = 0{,}236\,nm$ od siebie. Elektrostatyczna energia potencjalna atomów wynosi

$$E_{Coul} = -\frac{ke^2}{r_0} = -\frac{1{,}44\,nm\,eV}{0{,}236\,nm} = -6{,}1\,eV\,.$$

Energia całkowita potrzebna do utworzenia cząsteczki NaCl ma wartość

$$E_{tworzenia} = E_{przejścia} + E_{Coul} + E_{odpychania} = 1{,}52\,eV - 6{,}1\,eV + 0{,}32\,eV = -4{,}26\,eV\,.$$

Tak więc energia dysocjacji NaCl wynosi $4{,}26\,eV$.

Znaczenie

Utworzenie cząsteczki NaCl jest korzystne energetycznie. Energia dysocjacji lub energia potrzebna do rozbicia cząsteczki NaCl na jony Na^+ i Cl^- wynosi $4{,}26\,eV$, co jest zgodne z Rysunkiem 9.2.

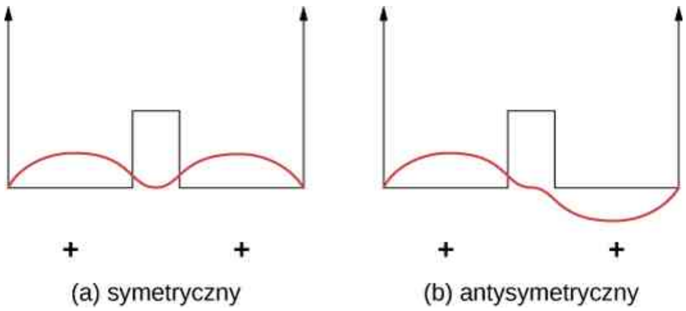
9.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Dlaczego energia potencjalna związana z zakazem Pauliego jest dodatnia w Przykładzie 9.1?

Dla jonu sodu występującego w krysztale NaCl wyrażenie opisujące energię potencjalną Coulomba U_{Coul} musi być zmodyfikowane przez czynnik zwany **stałą Madelunga** (ang. **Madelung constant**). Czynnik ten uwzględnia oddziaływanie jonu sodu ze wszystkimi sąsiadującymi jonami chloru i sodu. Dla NaCl wynosi on ok. $1{,}75$. Wartość ta prowadzi do odległości równowagowej między jonami Na^+ i Cl^- równej $0{,}28\,nm$ – trochę większej niż dla dwuatomowego NaCl. Wrócimy do tego zagadnienia później.

Wiązanie kowalencyjne

W wiązaniu jonowym elektron zostaje przeniesiony z jednego atomu na drugi. W wiązaniu kowalencyjnym elektron „dzielony" jest między dwa atomy (jest uwspólniany). Mechanizm wiązania jonowego nie wyjaśnia istnienia takich cząsteczek jak H_2, O_2 i CO, ponieważ w ramach modelu takiego wiązania nie istnieje odległość, dla której ujemna energia potencjalna przyciągania byłaby większa co do modułu od energii potrzebnej do wytworzenia jonów. Dokładne zrozumienie, dlaczego atomy w tych cząsteczkach związane są kowalencyjnie, wymaga zastosowania mechaniki kwantowej, co wykracza poza ramy tego podręcznika. Jednak mechanizm ten opiszemy jakościowo poniżej.

Wiązanie kowalencyjne łatwo zrozumieć na prostym przykładzie cząsteczki H_2^+ , która zawiera jeden elektron w polu elektrycznym dwóch protonów. Taki układ można wymodelować jako elektron umieszczony w podwójnej prostokątnej studni potencjału (Rysunek 9.3). Elektron ten znajduje się z jednakowym prawdopodobieństwem w obu studniach, dlatego funkcja falowa jest albo symetryczna, albo antysymetryczna względem punktu środkowego między studniami.



Rysunek 9.3 Jednowymiarowy model wiązania kowalencyjnego w cząsteczce H_2^+ . (a) Symetryczna funkcja falowa elektronu dzielonego przez dwa protony o ładunkach dodatnich (reprezentowane przez dwie skończone prostokątne studnie potencjału); (b) odpowiednia antysymetryczna funkcja falowa.

Wyobraźmy sobie teraz, że studnie te są znacznie oddalone od siebie. W stanie podstawowym funkcja falowa przyjmuje jeden z dwóch możliwych stanów: albo pojedynczy dodatni pik (sinusoidalne „wzniesienie") w obu studniach (przypadek symetryczny), albo dodatni pik w jednej studni i ujemny w drugiej (przypadek antysymetryczny). Oba stany mają taką samą energię. Jednak gdy studnie zbliżymy do siebie, symetryczna funkcja falowa staje się stanem podstawowym, a antysymetryczna pierwszym wzbudzonym stanem, innymi słowy poziomy energetyczne elektronu rozszczepiają się. Zauważmy, że stan symetryczny staje się energetycznie preferowanym (ma niższą energię).

Taka sama analiza jest właściwa również dla elektronu związanego z dwoma atomami wodoru. Tutaj kształt funkcji falowej stanu podstawowego ma postać w jednym wymiarze e^{-r/a_0} lub $e^{-|x|/a_0}$. Energetycznie preferowany przestrzennie symetryczny stan implikuje dużą gęstość ładunku elektrycznego w obszarze pomiędzy protonami, co powoduje, że elektron tam zlokalizowany przyciąga do siebie dodatnie protony.

Jeśli do tego układu dodamy drugi elektron, by uzyskać cząsteczkę H_2, funkcja falowa musi opisywać obie cząstki, w tym ich wzajemną zależność przestrzenną oraz względne spiny. Ta funkcja falowa musi również uwzględniać nierozróżnialność cząstek. („Jeśli zobaczyłeś jeden elektron, to zobaczyłeś oba"). W szczególności odwrócenie spinów lub zamiana elektronów miejscami nie może dawać efektu zauważalnego doświadczalnie; właściwość ta nazywana jest **symetrią wymiany** (ang. **exchange symmetry**). Funkcja falowa jest albo symetryczna względem operacji zamiany cząstek, a więc nie zmienia się, albo antysymetryczna, czyli zmienia znak. Zmiana znaku funkcji falowej nie wpływa na wyniki pomiarów.

Jak to przedstawimy później, całkowita funkcja falowa dwóch elektronów musi być antysymetryczna ze względu na wymianę. Na przykład dwa elektrony związane z cząsteczką wodoru mogą być w stanie przestrzennie symetrycznym z antyrównoległymi spinami (↑↓) lub przestrzennie symetrycznym z równoległymi spinami (↑↑). Stan z antyrównoległymi spinami jest energetycznie preferowany, a więc tworzy wiązanie kowalencyjne. Jeśli protony zbliżą się zbytnio do siebie, odpychanie między nimi staje się istotne. W rezultacie H_2 osiąga długość równowagową ok. $0{,}074\,\mathrm{nm}$ z energią wiązania $4{,}52\,\mathrm{eV}$.

Odwiedź PBS Learning Media tutorial and interactive simulation (https://openstaxcollege.org/l/21covalentbond) , aby zbadać siły przyciągające i odpychające, które działają na atomy, i wiązanie kowalencyjne w cząsteczce H_2.

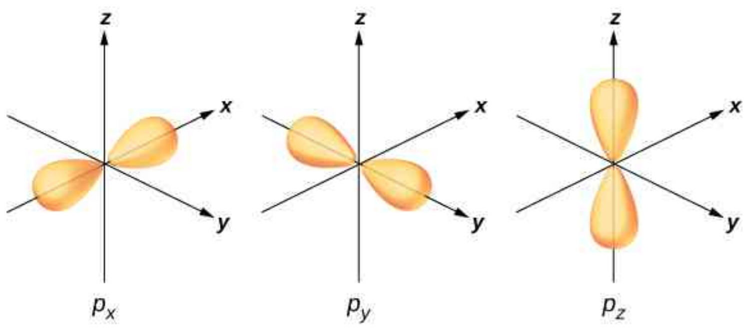
Mechanika kwantowa wyklucza istnienie wielu typów cząsteczek. Na przykład cząsteczka H_3 nie powstanie, ponieważ jeśli trzeci atom H zbliży się do dwuatomowej cząsteczki wodoru, jego funkcja elektronowa nałoży się na funkcję elektronową dwóch pozostałych atomów. Jeśli wszystkie trzy elektrony są w stanie podstawowym odpowiadających im atomów, to jedna para elektronów opisana jest takimi samymi wartościami wszystkich liczb kwantowych, czego nie dopuszcza zakaz Pauliego. Z tego powodu jeden z elektronów zmuszony jest do przejścia na wyższy poziom energe-

tyczny. Nie istnieje taka odległość między trzema protonami, przy której całkowita zmiana energii związana z tym procesem byłaby ujemna, to znaczy spontanicznie utworzyłoby się wiązanie. Podobnie cząsteczka He_2 w normalnych warunkach nie jest związana kowalencyjnie, ponieważ atomy nie posiadają elektronów walencyjnych, które mogłyby zostać uwspólnione. Gdy atomy zbliżą się do siebie, funkcje falowe elektronów nakładają się i z powodu zakazu Pauliego cząstki te są zmuszone do przejścia na wyższe stany energetyczne. Nie istnieje taka odległość, przy której powstanie takiej cząsteczki byłoby energetycznie preferowane.

Wiązania w cząsteczkach wieloatomowych

Cząsteczka wieloatomowa (ang. **polyatomic molecule**) to cząsteczka złożona z więcej niż dwóch atomów. Istnieją liczne przykłady, od prostej cząsteczki wody aż po złożone cząsteczki protein. Struktury tych cząsteczek można zrozumieć, używając pojęć wiązania kowalencyjnego oraz **hybrydyzacji** (ang. **hybridization**). Hybrydyzacja jest zmianą struktury energetycznej atomu, w której stany biorące udział w wiązaniach można przedstawić jako liniową superpozycję innych stanów.

Aby zilustrować hybrydyzację, rozważmy wiązanie w prostej cząsteczce wody – H_2O. Konfiguracja elektronowa w tlenie ma postać $1s^2 2s^2 2p^4$. Elektrony $1s$ i $2s$ znajdują się na zamkniętych powłokach i nie biorą udziału w wiązaniu. Pozostałe cztery elektrony są elektronami walencyjnymi. Mogą one znaleźć się w sześciu możliwych stanach ($l = 1, m_l = 0, \pm 1$ oraz dodatkowo ze spinem do góry lub spinem w dół). Energie tych stanów są takie same, a zatem dowolna liniowa kombinacja tych stanów może tworzyć wiązanie z atomem wodoru. Stany te (o których była mowa w rozdziale o strukturze atomowej) nazywa się orbitalami atomowymi i oznacza się je jako p_x , p_y i p_z . Rozkład ładunku elektronowego dla tych orbitali pokazuje Rysunek 9.4.



Rysunek 9.4 Tlen posiada cztery elektrony walencyjne. W cząsteczce wody dwa elektrony walencyjne zapełniają orbital p_z , a po jednym elektronie znajduje się na orbitalach p_x i p_y . Orbitale p_x i p_y wchodzą w wiązania z atomami wodoru, tworząc cząsteczkę H_2O. Bez wzajemnego odpychania atomów H kąt między wiązaniami wynosiłby $90°$.

Transformacja elektronowych funkcji falowych tlenu w obecności atomów wodoru w orbitale p_x , p_y i p_z jest przykładem hybrydyzacji. Dwa elektrony znajdują się na orbitalu p_z ze sparowanymi spinami (↑↓). Po jednym elektronie znajduje się na każdym orbitalu p_x i p_y , a ich spiny są niesparowane. Te ostatnie orbitale biorą udział w wiązaniach z atomami wodoru. Na podstawie Rysunku 9.4 można się spodziewać, że kąt między wiązaniami w H–O–H wynosi $90°$. Jednak, jeśli uwzględnimy odpychanie między atomami, kąt między wiązaniami wyniesie $104{,}5°$. Te same argumenty można zastosować, żeby zrozumieć czworościenny kształt metanu (CH_4) i innych cząsteczek.

9.2 | Widma cząsteczkowe

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- wykorzystywać koncepcje energii oscylacyjnej i rotacyjnej, aby opisać przejścia energetyczne w cząsteczce dwuatomowej;
- wyjaśniać najważniejsze cechy widma oscylacyjno-rotacyjnego cząsteczki dwuatomowej;
- określać dozwolone energie rotacji cząsteczki dwuatomowej;
- wyznaczać odległość równowagową pomiędzy atomami w cząsteczce dwuatomowej w oparciu o widmo oscylacyjno-rotacyjne.

Poziomy energetyczne cząsteczek są bardziej złożone niż poziomy w atomach, ponieważ cząsteczki mogą również drgać (wibrować, oscylować) i obracać się. Wartości energii związane z różnymi typami ruchu mieszczą się w różnych jej zakresach i dlatego można je analizować niezależnie. Energie przejść elektronowych są rzędu $1\ \mathrm{eV}$, oscylacyjnych rzędu $10^{-2}\ \mathrm{eV}$, a rotacyjnych (obrotowych) rzędu $10^{-3}\ \mathrm{eV}$. W cząsteczkach złożonych te zmiany energii są trudne do opisania, dlatego zaczniemy od prostego przypadku cząsteczki dwuatomowej.

Zgodnie z mechaniką klasyczną energia ruchu obrotowego (rotacyjna) molekuły dwuatomowej dana jest formułą

$$E_{\mathrm{r}} = \frac{L^2}{2I}, \tag{9.4}$$

gdzie I jest **momentem bezwładności** (ang. **moment of inertia**), a L **momentem pędu** (ang. **angular momentum**). Zgodnie z mechaniką kwantową moment pędu jest skwantowany

$$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar, \tag{9.5}$$

gdzie $l = 0, 1, 2, 3, \ldots$ jest orbitalną liczbą kwantową. Dozwolone **rotacyjne poziomy energetyczne** (ang. **rotational energy levels**) są zatem dane wzorem

$$E_{\mathrm{r}} = l(l+1) \cdot \frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1) \cdot E_{0\mathrm{r}} \quad (l = 0, 1, 2, 3, \ldots), \tag{9.6}$$

gdzie charakterystyczna energia rotacyjna cząsteczki dwuatomowej jest zdefiniowana jako

$$E_{0\mathrm{r}} = \frac{\hbar^2}{2I}. \tag{9.7}$$

W cząsteczce dwuatomowej moment bezwładności z masą zredukowaną μ dany jest wyrażeniem

$$I = \mu r_0^2, \tag{9.8}$$

gdzie r_0 jest odległością między atomami. Różnica energii między poziomami rotacyjnymi wynosi zatem

$$\Delta E_{\mathrm{r}} = E_{l+1} - E_l = 2(l+1) \cdot E_{0\mathrm{r}}. \tag{9.9}$$

Można pokazać, że w przypadku przejść między rotacyjnymi poziomami energetycznymi związanymi z absorpcją lub emisją promieniowania (tzw. **elektryczne przejście dipolowe**; ang. **electric dipole transition**) musi zostać spełniony warunek

$$\Delta l = \pm 1. \quad (9.10)$$

Zasada ta, znana jako **reguła wyboru** (ang. **selection rule**), ogranicza możliwe przejścia z jednego stanu kwantowego do innego. Równanie 9.10 określa regułę wyboru dla przejść rotacyjnych. Odnosi się ona tylko do cząsteczek dwuatomowych posiadających elektryczny moment dipolowy. W cząsteczkach symetrycznych, takich jak H_2 czy N_2, nie występują rotacyjne przejścia energetyczne spowodowane absorpcją lub emisją promieniowania.

Przykład 9.2

Energia rotacyjna HCl

Wyznaczmy energię rotacyjną cząsteczki chlorku wodoru (HCl).

Strategia rozwiązania

Chlorek wodoru (HCl) jest cząsteczką dwuatomową o odległości równowagowej $0{,}127\,\text{nm}$. Rotacyjne poziomy energetyczne zależą tylko od momentu bezwładności I oraz od orbitalnej liczby kwantowej l (w tym przypadku $l = 0, 1, 2$). Z kolei moment bezwładności zależy od odległości równowagowej między jonami (która jest podana) i masy zredukowanej, która zależy od mas atomów H i Cl.

Rozwiązanie

Najpierw obliczamy masę zredukowaną. Jeśli cząstka 1 to wodór, a cząstka 2 to chlor, wówczas

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1\text{u} \cdot 35{,}4\text{u}}{1\text{u} + 35{,}4\text{u}} = 0{,}97\text{u} \cdot \frac{931{,}5\,\text{MeV} / c^2}{1\text{u}} = 906\,\text{MeV} / c^2.$$

Odpowiadająca jej energia spoczynkowa wynosi

$$\mu c^2 = 9{,}06 \cdot 10^8\ \text{eV}.$$

Można teraz obliczyć energię charakterystyczną

$$E_{0\text{r}} = \frac{\hbar^2}{2I} = \frac{\hbar^2}{2\mu r_0^2} = \frac{(\hbar c)^2}{2\mu c^2 r_0^2} = \frac{(197{,}3\,\text{nm}\,\text{eV})^2}{2 \cdot 9{,}06 \cdot 10^8\ \text{eV} \cdot (0{,}127\,\text{nm})^2} = 1{,}33 \cdot 10^{-3}\ \text{eV}.$$

(Zauważmy, jak wyrażenie to jest zapisane z wykorzystaniem energii spoczynkowej. Taka technika jest powszechnie stosowana w obliczeniach fizyki współczesnej). Poziomy energetyczne energii rotacyjnej dane są wyrażeniem

$$E_\text{r} = l(l+1) \cdot \frac{\hbar^2}{2I} = l(l+1) \cdot E_{0\text{r}},$$

gdzie l jest orbitalną liczbą kwantową. Trzy najniższe poziomy energetyczne cząsteczki HCl mają zatem następujące wartości

$$l = 0,\ E_\text{r} = 0\,\text{eV}\ \ \text{(brak obrotów)},$$
$$l = 1,\ E_\text{r} = 2E_{0\text{r}} = 2{,}66 \cdot 10^{-3}\ \text{eV},$$
$$l = 2,\ E_\text{r} = 6E_{0\text{r}} = 7{,}99 \cdot 10^{-3}\ \text{eV}.$$

Znaczenie

Widmo rotacyjne związane jest z przejściami o małej energii (od $1 / 1000\,\text{eV}$ do $1 / 100\,\text{eV}$). Dla porównania, energia stanu podstawowego atomu wodoru wynosi $-13{,}6\,\text{eV}$.

9.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaką wielkość można wyznaczyć na podstawie różnicy energii między liniami absorpcyjnymi widma rotacyjnego cząsteczki dwuatomowej?

Oscylacyjne poziomy energetyczne (ang. **vibrational energy levels**), czyli poziomy związane z energią drgań (oscylacji, wibracji) cząsteczki, są trudniejsze do wyznaczenia niż poziomy rotacyjne. Jednakże możemy je wyznaczyć, zakładając, że dwa atomy w cząsteczce dwuatomowej połączone są idealną sprężyną o stałej sprężystości k. Energię potencjalną takiego układu określa wyrażenie

$$E_{\text{p osc}} = \frac{1}{2}k\Delta r^2, \tag{9.11}$$

gdzie Δr jest zmianą „naturalnej długości” cząsteczki wzdłuż linii łączącej atomy. Rozwiązanie równania Schrödingera dla takiej energii potencjalnej przyjmuje postać

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \tag{9.12}$$

gdzie ω jest **częstością kołową** (ang. **angular frequency**) drgań, a $n = 0, 1, 2, \ldots$ jest oscylacyjną liczbą kwantową. Założenie, że oscylacyjne poziomy energetyczne są równo odległe od siebie ($\Delta E = \hbar\omega$), okazuje się prawdziwe dla kilku pierwszych poziomów (małych energii).

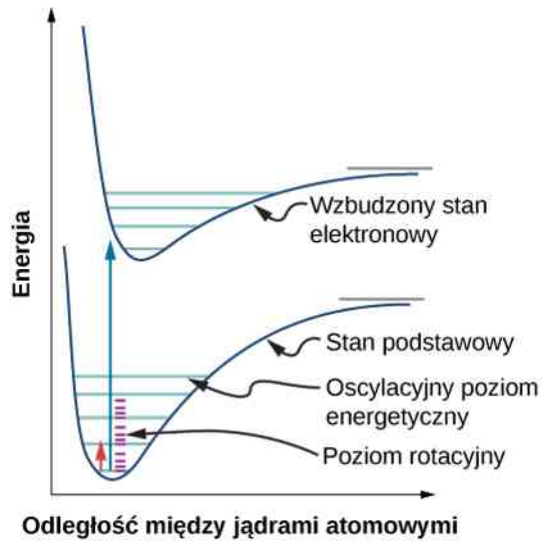
Jeśli przejścia pomiędzy oscylacyjnymi poziomami energii związane są z absorpcją lub emisją promieniowania (dokładnie chodzi o tzw. elektryczne przejścia dipolowe), musi być spełniony warunek

$$\Delta n = \pm 1. \tag{9.13}$$

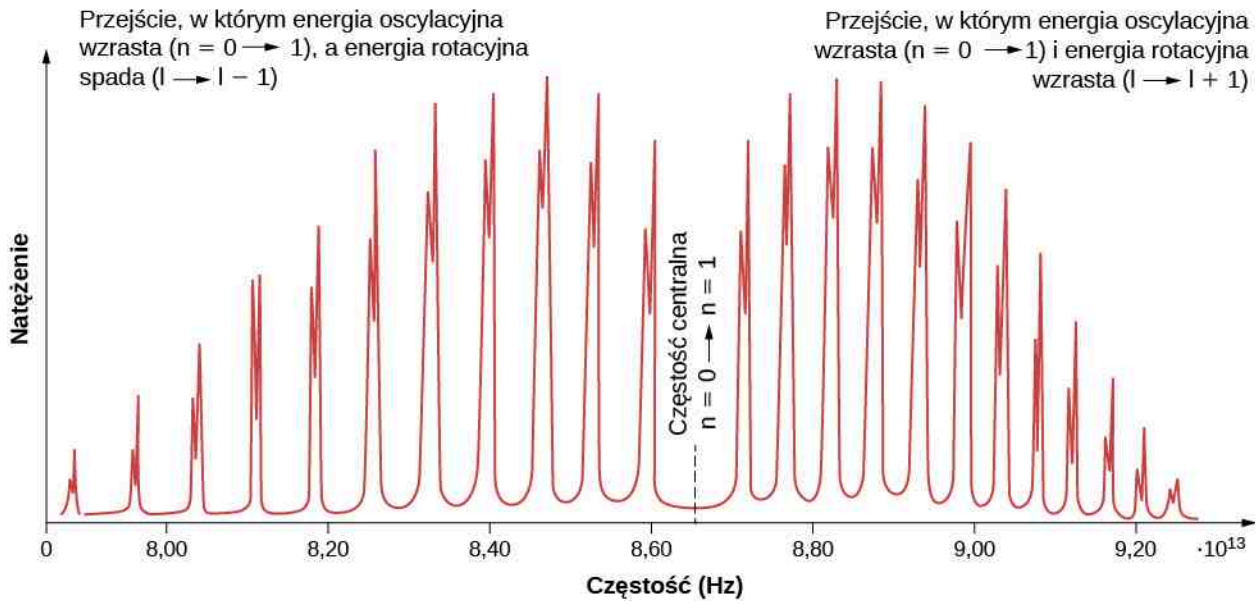
Równanie 9.13 określa regułę wyboru dla oscylacyjnych przejść energetycznych. Jak wspomniano wcześniej, reguła ta stosuje się tylko do cząsteczek dwuatomowych, które posiadają elektryczny moment dipolowy. W cząsteczkach symetrycznych nie występują przejścia wywołane emisją czy absorpcją promieniowania.

Zgodnie z regułami wyboru absorpcja lub emisja promieniowania przez cząsteczkę dwuatomową wiąże się z przejściem pomiędzy stanami oscylacyjnymi i rotacyjnymi. Dokładniej, jeśli oscylacyjna liczba kwantowa (n) zmienia się o jeden, wówczas rotacyjna liczba kwantowa (l) również zmienia się o jeden. Diagram poziomów energetycznych dla możliwych przejść pokazany jest na Rysunku 9.5. Widmo absorpcyjne dla takich przejść w chlorku wodoru (HCl) jest pokazane na Rysunku 9.6. Piki absorpcji związane są z przejściami między stanami oscylacyjnymi $n = 0$ i $n = 1$. Kolejne piki w pasmach pików po lewej i po prawej stronie odpowiadają następującym różnicom energii: $\Delta E_{l\longrightarrow l+1} = \hbar\omega + 2\,(l+1)\cdot E_{0r} = \hbar\omega + 2E_{0r}, \hbar\omega + 4E_{0r}, \hbar\omega + 6E_{0r}, \ldots$ (prawe pasmo) i $\Delta E_{l\longrightarrow l-1} = \hbar\omega - 2lE_{0r} = \hbar\omega - 2E_{0r}, \hbar\omega - 4E_{0r}, \hbar\omega - 6E_{0r}, \ldots$ (lewe pasmo).

Moment bezwładności można wyznaczyć zatem z odległości energetycznej między poszczególnymi pikami ($2E_{0r}$) lub z przerwy pomiędzy lewym a prawym pasmem ($4E_{0r}$). Częstość w środku tej przerwy to częstość oscylacji.



Rysunek 9.5 Trzy rodzaje poziomów energetycznych w cząsteczce dwuatomowej: elektronowy, oscylacyjny i rotacyjny. Jeśli oscylacyjna liczba kwantowa (n) zmienia się o jeden, wówczas rotacyjna liczba kwantowa (l) także zmienia się o jeden.



Rysunek 9.6 Widmo absorpcyjne chlorku wodoru (HCl) odpowiadające przejściom między poziomami oscylacyjnymi $n = 0$ i $n = 1$. Dyskretne piki związane są z kwantowaniem momentu pędu cząsteczki. Pasma pików po lewej odpowiadają zmniejszaniu się momentu pędu, a po prawej z jego zwiększaniem.

9.3 | Wiązania w ciałach stałych

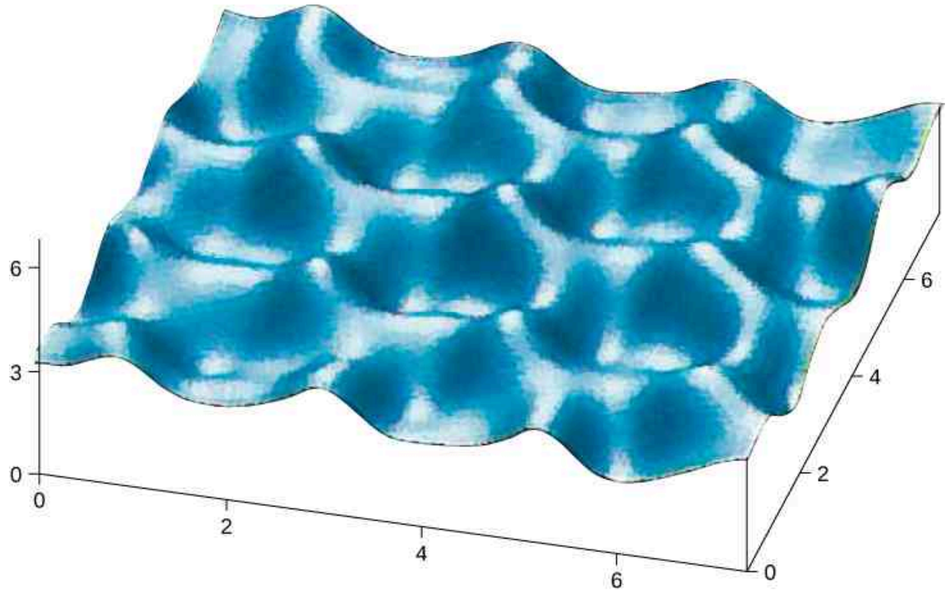
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać struktury upakowania popularnych kryształów;
- wyjaśniać różnicę pomiędzy wiązaniami w kryształach a wiązaniami w cząsteczkach;
- wyznaczać odległość równowagową w oparciu o inne właściwości kryształu;
- wyznaczać energię dysocjacji w oparciu o inne właściwości kryształu.

W rozdziale tym zajmiemy się ciałami stałymi krystalicznymi, które składają się z atomów ułożonych na dużym obszarze w regularny wzór (tzw. uporządkowanie dalekiego zasięgu) nazywany **siecią** (ang. **lattice**). Ciała stałe, które nie są kryształami lub nie mogą ich tworzyć, klasyfikujemy jako **ciała stałe amorficzne** (ang. **amorphous solids**). Chociaż ciała amorficzne (jak np. szkło) mają wiele interesujących technologicznych zastosowań, w rozdziale tym skupimy się na krystalicznych ciałach stałych.

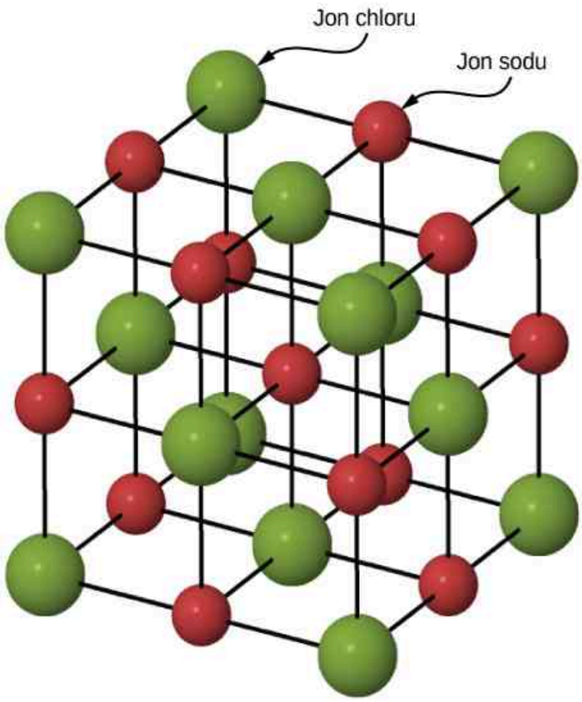
W krysztale atomy układają się w sieć z powodu istnienia wypadkowej siły przyciągającej między jądrami atomowymi a elektronami z których się składają. Kryształy utworzone przez wiązania pomiędzy atomami należą do jednej z trzech kategorii, sklasyfikowanych według ich wiązania: jonowego, kowalencyjnego i metalicznego. Cząsteczki również mogą wiązać się i tworzyć kryształy dzięki występowaniu wiązań molekularnych, jednak kryształy te nie będą przez nas omawiane. Na początku XX wieku model atomowy ciał stałych był przedmiotem spekulacji. Dzisiaj dysponujemy bezpośrednimi dowodami na istnienie atomów w ciałach stałych (Rysunek 9.7).



Rysunek 9.7 Obraz powierzchni grafitu wykonany techniką skaningowej mikroskopii tunelowej. Wierzchołki reprezentują atomy ułożone w sześciokąty. Osie wyskalowane są w angstremach.

Wiązania jonowe w ciałach stałych

Wiele ciał stałych tworzonych jest przez wiązania jonowe. Typowym przykładem jest chlorek sodu (sól kuchenna), o którym dyskutowaliśmy wcześniej. Tu elektrony przenoszone są z sodu na sąsiadujące z nimi atomy chloru, ponieważ elektrony walencyjne sodu są słabo związane, a chlor ma duże powinowactwo elektronowe. Dodatnio naładowane jony sodu i ujemnie naładowane jony chloru układają się w rozległą, regularną strukturę atomową (Rysunek 9.8).



Rysunek 9.8 Struktura kryształu chlorku sodu. Jony sodu i chloru ułożone są w strukturę regularną powierzchniowo centrowaną (FCC; ang. face-centered cubic).

Rozkład gęstości ładunku w jonach sodu i chloru jest sferycznie symetryczny, a jon chloru ma około dwukrotnie większy promień niż jon sodu. Struktura krystaliczna NaCl, której odpowiada minimum energii jonów, jest nazywana **kubiczną powierzchniowo centrowaną** (FCC; ang. **face-centered cubic**). W takiej strukturze każdy jon Na^+ jest otoczony sześcioma jonami Cl^- i na odwrót. Komórka elementarna jest sześcianem, w którym atomy położone są w narożach każdej ściany. Energia potencjalna przyciągania jonu Na^+ przez sześć jonów Cl^- wynosi

$$E_{\text{p1}} = -6 \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{9.14}$$

gdzie znak minus oznacza potencjał przyciągający (tutaj $k = 1 / (4\pi\varepsilon_0)$). W odległości $\sqrt{2}r$ znajdują się następne najbliżej sąsiadujące atomy (tzw. najbliżsi sąsiedzi): dwanaście jonów Na^+ o takim samym ładunku. Całkowita energia potencjalna wynikająca z oddziaływania odpychającego pomiędzy jonem Na^+ i tymi jonami wynosi

$$E_{\text{p2}} = 12 \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{2}r}. \tag{9.15}$$

Następni najbliżsi sąsiedzi to osiem jonów Cl^- w odległości $\sqrt{3}r$ od jonu Na^+. Energia potencjalna jonu Na^+ w polu tych ośmiu jonów to

$$E_{\text{p3}} = -8 \cdot \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{3}r}. \tag{9.16}$$

Kontynuując to rozumowanie uwzględniające zmieniające się naprzemiennie zbiory jonów Cl^- i Na^+, znajdujemy formułę pozwalającą obliczyć wypadkową energię potencjalną $E_{\text{p A}}$ pojedynczego jonu Na^+

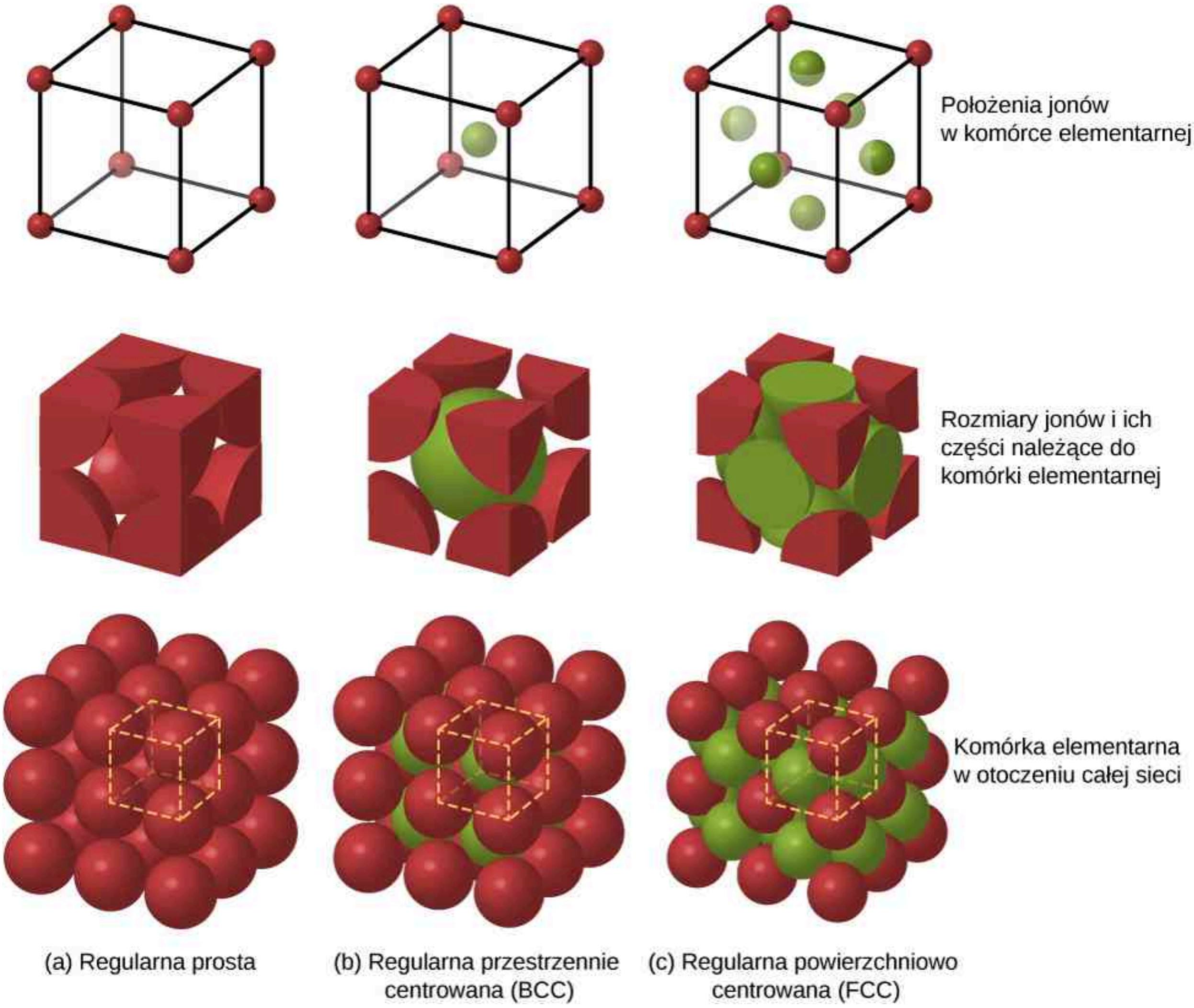
$$E_{\text{Coul}} = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}, \tag{9.17}$$

gdzie α jest wprowadzoną wcześniej stałą Madelunga. Z powyższej analizy wynika, że stała ta jest nieskończoną zbieżną sumą

$$\alpha = 6 - \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{3}} + \ldots \tag{9.18}$$

Odległe jony mają istotny wkład do tej sumy, która jest wolnozbieżna i trzeba uwzględnić wiele członów, żeby dokładnie obliczyć α. Dla wszystkich kryształów jonowych FCC α wynosi w przybliżeniu $1{,}75$.

Inne możliwe struktury upakowania atomów w kryształach to m.in. sieć **kubiczna prosta** (ang. **simple cubic**) i **kubiczna przestrzennie centrowana** (BCC; ang. **body-centered cubic**). Te trzy różne struktury porównano na Rysunku 9.9. Pierwszy rząd pokazuje tylko położenie jonów bez ich rozmiaru; w drugim rzędzie widać komórkę elementarną każdej struktury (lub sieci); trzeci rząd pokazuje położenie i rozmiar jonów. W strukturze BCC jest ośmiu najbliższych sąsiadów, a stała Madelunga wynosi około $1{,}76$ – niewiele różniąc się od wartości dla struktury FCC. Wyznaczanie stałej Madelunga dla określonych kryształów jest trudnym zadaniem i wciąż stanowi przedmiot badań.



Rysunek 9.9 Struktury upakowania jonów w kryształach, od lewej do prawej: (a) regularna, (b) regularna przestrzennie centrowana (BCC) i (c) regularna powierzchniowo centrowana (FCC). Każdej z tych struktur odpowiada minimum energii całkowitej układu w danym związku.

Energia jonów kryształu chlorku sodu związana jest nie tylko z siłami przyciągania elektrostatycznego działającymi pomiędzy różnoimiennie naładowanymi jonami. Jeśli jony zbytnio się zbliżą, wówczas funkcje falowe rdzeni nakładają się na siebie i elektrony odpychają się zgodnie z zakazem Pauliego. Całkowita energia potencjalna jonu Na^+ jest zatem sumą energii potencjalnej przyciągania elektrostatycznego (E_{Coul}) i energii potencjalnej odpychania związanej z zakazem Pauliego ($E_{\text{odpychania}}$). Obliczanie tej ostatniej wymaga użycia komputerów dużej mocy. Jednakże energię tę można wyrazić dokładnie za pomocą prostej formuły, zawierającej kilka parametrów dopasowania

$$E_{\text{odpychania}} = \frac{A}{r^n}, \tag{9.19}$$

gdzie parametry A i n wybiera się tak, aby prowadziły do przewidywań zgodnych z danymi doświadczalnymi. W zadaniu umieszczonym na końcu tego rozdziału parametr n nazwany jest **stałą odpychania** (ang. **repulsion constant**). Całkowita energia potencjalna jonu Na^+ dana jest więc wyrażeniem

$$E_{\text{p}} = -\alpha \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{A}{r^n}. \tag{9.20}$$

W położeniu równowagi wypadkowa siła działająca na jon wynosi zero, tak że odległość między sąsiadującymi jonami Na^+ i Cl^-, r_0, musi odpowiadać minimum energii potencjalnej E_{p}. Uwględniając warunek $\text{d}E_{\text{p}} / \text{d}r = 0$, otrzymujemy

$$0 = \frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2} - \frac{nA}{r_0^{n+1}}. \tag{9.21}$$

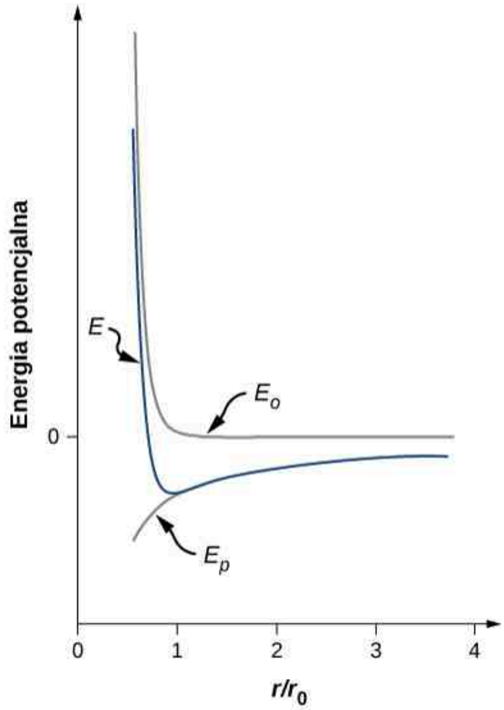
Stąd

$$A = \frac{\alpha e^2 r_0^{n-1}}{4\pi\varepsilon_0 n}. \tag{9.22}$$

Wstawiając to wyrażenie do formuły opisującej całkowitą energię potencjalną, otrzymujemy

$$E_{\text{p}} = -\frac{\alpha e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \left[\frac{r_0}{r} - \frac{1}{n} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \right]. \tag{9.23}$$

Zauważmy, że we wzorze wyrażającym całkowitą energię potencjalną jest teraz tylko jeden parametr dopasowania, n. Parametr A został zastąpiony funkcją zawierającą r_0, odległość równowagową, którą można wyznaczyć w eksperymencie dyfrakcyjnym (czym jest dyfrakcja, dowiedziałeś się w poprzednim rozdziale). Całkowita energia potencjalna dla $n = 8$, przybliżonej wartości n dla NaCl, pokazana jest na Rysunku 9.10.



Rysunek 9.10 Energia potencjalna jonu sodu w krysztale NaCl dla $n = 8$. Równowagowa długość wiązania odpowiada minimum tej energii.

O ile tylko $n > 1$, krzywa E_p ma jakościowo taki sam kształt: E_p dąży do nieskończoności przy $r \longrightarrow 0$ i E_p dąży do zera przy $r \longrightarrow \infty$. Wartość minimum energii potencjalnej jest dana przez

$$E_{\text{p min}}\,(r = r_0) = -\alpha \frac{ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{9.24}$$

Energia przypadająca na jeden jon (potrzebna, aby rozłożyć kryształ na jony) wynosi zatem

$$E_{\text{dysocjacji}} = \alpha \frac{ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right). \tag{9.25}$$

Jest to **energia dysocjacji** (ang. **dissociation energy**) kryształu. Energię dysocjacji można wykorzystać do wyznaczenia całkowitej energii potrzebnej, by rozłożyć jeden mol substancji na jony składowe, często wyrażanej w jednostkach kJ / mol. Energię dysocjacji wyznacza się doświadczalnie z wyniku pomiaru ciepła utajonego parowania. Przykładowe wartości energii dysocjacji podane są w poniższej tabeli.

	F^-	Cl^-	Br^-	I^-
Li^+	1036	853	807	757
NaCl	923	787	747	704
K^+	821	715	682	649
Rb^+	785	689	660	630
Cs^+	740	659	631	604

Tabela 9.2 Energia dysocjacji (sieciowa) halogenków metali alkalicznych $[\text{kJ} / \text{mol}]$.

Tak więc stałą Madelunga można wyznaczyć, korzystając ze struktury kryształu, a n z energii sieciowej. Dla NaCl mamy $r_0 = 2{,}81\,\text{Å}$, $n \approx 8$ i $E_{\text{dysocjacji}} = 7{,}84\,\text{eV} / \text{para jonów}$. Energia dysocjacji jest stosunkowo duża. Dla porównania najbardziej energetyczny foton z zakresu widzialnego ma energię w przybliżeniu równą

$$hf = 4{,}14 \cdot 10^{-15}\,\text{eV s} \cdot 7{,}5 \cdot 10^{14}\,\text{Hz} = 3{,}1\,\text{eV}.$$

Silne wiązanie jonów w kryształach jonowych determinuje ich ogólne cechy:

1. Są dość twarde i stabilne.
2. Parują w stosunkowo wysokich temperaturach ($1000\,\text{K}$ do $2000\,\text{K}$).
3. Są przezroczyste dla promieniowania widzialnego, ponieważ fotony z pasma widzialnego mają zbyt małą energię, aby wzbudzić elektron.
4. Są słabymi przewodnikami prądu elektrycznego, ponieważ nie ma w nich swobodnych elektronów.
5. Zwykle rozpuszczają się w wodzie, ponieważ cząsteczki wody mają duży elektryczny moment dipolowy, którego pole elektryczne jest wystarczająco silne, aby rozerwać elektrostatyczne wiązania między jonami.

Przykład 9.3

Energia dysocjacji soli kuchennej

Wyznaczmy energię dysocjacji soli kuchennej (NaCl) w kJ / mol. Wskazówka: Stała odpychania n w NaCl wynosi w przybliżeniu 8.

Strategia rozwiązania

W chlorku sodu odległość równowagowa wynosi $0{,}282\,\text{nm}$. (Porównamy tę wartość z analogiczną wartością dla cząsteczki NaCl, $0{,}236\,\text{nm}$). Energia dysocjacji zależy od odległości między jonami, stałej odpychania oraz stałej Madelunga dla struktury FCC. Odległość między jonami z kolei związana jest z masą molową i gęstością, którą można zmierzyć. Możemy wyznaczyć odległość między jonami, a następnie wyznaczyć energię dysocjacji jednego mola tego kryształu.

Rozwiązanie

Masy atomowe Na i Cl wynoszą 23μ i $35{,}4\mu$, stąd masa molowa NaCl jest równa $58{,}4\,\text{g} / \text{mol}$. Gęstość NaCl ma wartość $2{,}16\,\text{g} / \text{cm}^3$. Związek między tymi wielkościami ma postać

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{2N_\text{A} r_0^3},$$

gdzie M jest masą jednego mola soli, N_A jest liczbą Avogadro, a r_0 jest odległością równowagową. Czynnik 2 jest potrzebny, ponieważ zarówno na sód, jak i na chlor przypada objętość r_0^3. Rozwiązując równanie względem odległości, otrzymujemy

$$r_0^3 = \frac{M}{2N_\text{A}\rho} = \frac{58{,}4\,\text{g} / \text{mol}}{2 \cdot 6{,}03 \cdot 10^{23} \cdot 2{,}16\,\text{g} / \text{cm}^3} = 2{,}23 \cdot 10^{-23}\,\text{cm}^3$$

lub

$$r_0 = 2{,}8 \cdot 10^{-8}\,\text{cm} = 0{,}28\,\text{nm}.$$

Energia potencjalna przypadająca na jedną parę jonów ($Na^+ Cl^-$) wynosi

$$E_\text{p} = -\alpha \frac{ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

gdzie α jest stałą Madelunga, r_0 jest odległością równowagową, a n stałą odpychania. NaCl jest kryształem FCC, dla którego stała Madelunga wynosi $\alpha = 1{,}7476$. Podstawiając tę wartość, otrzymujemy

$$E_\text{p} = -1{,}75 \cdot \frac{1{,}44\,\text{nm eV}}{0{,}28\,\text{nm}} \cdot \left(1 - \frac{1}{8}\right) = -7{,}88\,\text{eV} / \text{para jonów}.$$

Energia dysocjacji jednego mola chlorku sodu wynosi zatem

$$D = 7{,}88\,\text{eV} \;/\; \text{para jonów} \cdot \frac{23{,}052\,\text{kcal} \;/\; \text{mol}}{1\,\text{eV} \;/\; \text{para jonów}} = 182\,\text{kcal} \;/\; \text{mol} = 760\,\text{kJ} \;/\; \text{mol}\,.$$

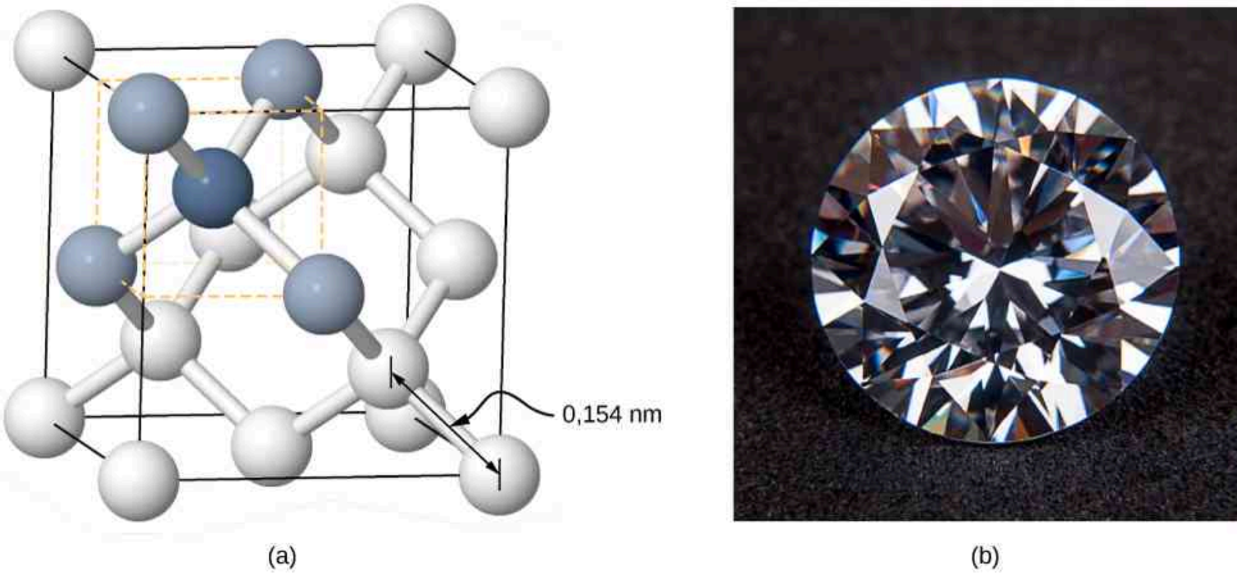
Znaczenie

Taka wartość energii dysocjacji, $760\,\text{kJ} / \text{mol}$, jest bliska wartości wyznaczonej doświadczalnie, $787\,\text{kJ} \;/\; \text{mol}$. Zauważmy, że dla większej gęstości równowagowa odległość między jonami jest mniejsza. Mniejsza odległość prowadzi do większych sił i w związku z tym większej energii dysocjacji. Zmianę jednostek na końcu równania wykonano, korzystając ze stałej konwersji $1\,\text{kJ} = 0{,}239\,\text{kcal}$.

9.3 **Sprawdź czy rozumiesz.** Jeśli energia dysocjacji jest większa, to łatwiej czy trudniej rozbić kryształ na kawałki?

Wiązania kowalencyjne w kryształach

Kryształy mogą być tworzone także przez wiązania kowalencyjne. Wiązania kowalencyjne odpowiadają na przykład za utrzymywanie razem atomów węgla w krysztale diamentu. Konfiguracja elektronowa atomu węgla to $1s^2 2s^2 2p^2$ – rdzeń typu atomu He oraz cztery elektrony walencyjne. To znaczy, że do konfiguracji pełnej powłoki brakuje czterech elektronów, czyli dzielenie (uwspólnianie) tych elektronów z czterema sąsiednimi atomami węgla w wiązaniu kowalencyjnym prowadzi do zapełnienia powłoki walencyjnej w każdym atomie. Diament ma bardziej skomplikowaną strukturę niż większość kryształów jonowych (Rysunek 9.11). Każdy atom węgla znajduje się w środku czworościanu foremnego utworzonego przez sąsiadów, a kąt między wiązaniami wynosi $110°$. Jest on bezpośrednią konsekwencją kierunkowości orbitali p atomu węgla.



Rysunek 9.11 Struktura kryształu diamentu. (a) Atom węgla, reprezentowany przez ciemnoniebieską sferę, jest kowalencyjnie związany z czterema innymi atomami węgla, reprezentowanymi przez jasnoniebieskie sfery. (b) Brylant to diament oszlifowany wzdłuż gładkich płaszczyzn, które położone są względem siebie pod wieloma różnymi kątami. Zjawiska załamania światła i całkowitego wewnętrznego odbicia nadają temu klejnotowi tak ceniony blask i piękno.

Kryształy o wiązaniach kowalencyjnych są bardziej różnorodne niż kryształy jonowe, ale są stosunkowo twarde, trudno topliwe i nierozpuszczalne w wodzie. Na przykład diament ma ekstremalnie wysoką temperaturę topnienia ($4000\,\text{K}$) i jest przezroczysty dla światła. Dla porównania, kowalencyjnie związana cyna (znana jako cyna-alfa lub szara cyna, która nie jest metalem) jest stosunkowo miękka, topi się w temperaturze $600\,\text{K}$ i odbija światło. Dwa inne

ważne przykłady kryształów kowalencyjnych to krzem i german. Oba te kryształy są intensywnie wykorzystywane do wytwarzania diod, tranzystorów i układów scalonych. Wrócimy do tych materiałów później, przy okazji omawiania półprzewodników.

Wiązania metaliczne w kryształach

Jak już sama nazwa wskazuje, **wiązanie metaliczne** (ang. **metallic bonding**) odpowiada za tworzenie kryształów metali. Elektrony walencyjne nie są związane z poszczególnymi atomami lecz z całym kryształem i mogą swobodnie poruszać się w całej objętości kryształu. Wiązanie to powstaje w skutek działania sił przyciągania elektrostatycznego pomiędzy dodatnimi jonami a elektronami przewodnictwa. Wiązania metaliczne są słabsze od jonowych i kowalencyjnych, z energią dysocjacji w granicach od $1\,\text{eV}$ do $3\,\text{eV}$.

9.4 | Model elektronów swobodnych w metalach

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać klasyczny model elektronów swobodnych w metalu, używając koncepcji koncentracji elektronów;
- wyjaśniać kwantowy model elektronów swobodnych w metalu i znaczenie zakazu Pauliego w tym modelu;
- obliczać wartości poziomów energetycznych i odległości między nimi w ramach modelu elektronów swobodnych w metalu.

Metale, takie jak miedź czy aluminium, są (w warunkach normalnych) materią skondensowaną dzięki wiązaniom, które jednak znacznie różnią się od wiązań w cząsteczkach. Jony, zamiast dzielić lub wymieniać elektrony, związane są głównie przez układ elektronów swobodnie przemieszczających się w krysztale. Najprostszy model metalu to **model elektronów swobodnych** (ang. **free electron model**). W ramach niego elektrony traktowane są jak gaz. Zaczniemy od prostego przypadku jednowymiarowego, kiedy elektrony poruszają się swobodnie wzdłuż linii, tak jakby poruszały się wzdłuż cienkiego metalowego pręta. Energia potencjalna dla tego przypadku to nieskończona prostokątna studnia, w której położenie ścian odpowiada końcom pręta. Model pomija oddziaływanie między elektronami, ale uwzględnia zakaz Pauliego. W szczególnym przypadku, gdy $T = 0\,\text{K}$, N elektronów zapełnia poziomy energetyczne od najniższego do najwyższego, po dwa na jednym poziomie (ze spinem do góry i w dół), aż do najwyższego zapełnionego poziomu. Energia najwyższego zapełnionego poziomu nazywana jest **energią Fermiego** (ang. **Fermi energy**).

Jednowymiarowy model swobodnych elektronów można ulepszyć, rozpatrując przypadek trójwymiarowy: elektrony poruszają się swobodnie w trójwymiarowym bloku metalu. Układ taki modeluje się trójwymiarową nieskończoną studnią (pudłem) potencjału. Wyznaczenie dozwolonych poziomów wymaga rozwiązania niezależnego od czasu równania Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(x,y,z) = E\,\psi(x,y,z), \tag{9.26}$$

gdzie zakładamy, że energia potencjalna jest zerowa wewnątrz pudła i nieskończona poza nim. Dozwolone funkcje falowe opisujące elektronowe stany kwantowe (funkcje własne równania) można zapisać jako

$$\psi(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{L_x}}\sin\left(\frac{n_x \pi x}{L_x}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{L_y}}\sin\left(\frac{n_y \pi y}{L_y}\right)\cdot\sqrt{\frac{2}{L_z}}\sin\left(\frac{n_z \pi z}{L_z}\right), \tag{9.27}$$

gdzie n_x, n_y i n_z to dodatnie liczby całkowite reprezentujące ruch w kierunkach odpowiednio x, y, i z, a L_x, L_y, L_z są rozmiarami pudła w tych kierunkach. Równanie 9.27 jest po prostu iloczynem trzech jednowymiarowych funkcji falowych. Dozwolone energie elektronu w pudle ($L = L_x = L_y = L_z$) to

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} \left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 \right). \quad (9.28)$$

Z każdym zestawem liczb kwantowych $\left(n_x, n_y, n_z\right)$ związane są dwa stany kwantowe, ze spinem w górę i spinem w dół. W rzeczywistym materiale liczba zapełnionych stanów jest ogromna. Na przykład w centymetrze sześciennym metalu liczba ta wynosi 10^{22}. Obliczanie liczby elektronów w tych stanach jest trudnym zadaniem i często wymaga komputerów o dużej mocy obliczeniowej. Wysiłek jednak się opłaca, ponieważ informacja ta jest efektywnym sposobem sprawdzenia modelu.

Przykład 9.4

Energie elektronowe w kostce metalu

Rozważmy sześcienną kostkę metalu o długości krawędzi $2\,\mathrm{cm}$.

a. Jaki jest najniższy poziom elektronowy wewnątrz tego metalu?
b. Jaka jest odległość energetyczna między tym i kolejnym poziomem?

Strategia rozwiązania

Elektron w metalu reprezentowany jest przez falę. Najniższa energia odpowiada fali o największej długości i najmniejszej wartości liczb kwantowych: $\left(n_x, n_y, n_z\right) = (1, 1, 1)$. Równanie 9.28 pozwala obliczyć wartość energii stanu podstawowego. Energia rośnie wraz z liczbą kwantową, dlatego też następny poziom odpowiada najmniejszemu wzrostowi liczb kwantowych, czyli $\left(n_x, n_y, n_z\right) = (2, 1, 1)$, $\left(n_x, n_y, n_z\right) = (1, 2, 1)$ lub $\left(n_x, n_y, n_z\right) = (1, 1, 2)$.

Rozwiązanie

a. Najniższy poziom energetyczny odpowiada liczbom kwantowym $n_x = n_y = n_z = 1$. Z Równania 9.28 wyznaczamy energię poziomu

$$E(1, 1, 1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_\mathrm{e}L^2} \cdot \left(1^2 + 1^2 + 1^2\right) = \frac{3\pi^2 \cdot \left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}$$
$$= 4{,}48 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J} = 2{,}8 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV}.$$

b. Następny wyższy poziom energetyczny wyznaczmy, zwiększając jedną z liczb kwantowych o 1 (są trzy stany kwantowe o tej samej energii). Przypuśćmy, że zwiększamy n_x o 1. Wówczas uzyskujemy energię

$$E(2, 1, 1) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_\mathrm{e}L^2} \cdot \left(2^2 + 1^2 + 1^2\right) = \frac{6\pi^2 \cdot \left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\right)^2}$$
$$= 8{,}96 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J} = 5{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV}.$$

Odległość energetyczna między stanem podstawowym a następnym wyższym stanem jest zatem równa

$$E(2, 1, 1) - E(1, 1, 1) = 2{,}8 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV}.$$

Znaczenie

Różnica ta jest bardzo mała. Porównajmy tę wartość ze średnią energią kinetyczną elektronu, $k_\mathrm{B}T$, gdzie k_B jest stałą Boltzmana, a T temperaturą (np. dla $T = 1\,\mathrm{K}$). Jaka jest różnica między iloczynem $k_\mathrm{B}T$ a wyznaczoną odległością energetyczną?

9.4 Sprawdź, czy rozumiesz. Co dzieje się z energią stanu podstawowego elektronu, gdy wymiary kostki zwiększają się?

Zwykle nie interesuje nas całkowita liczba cząstek we wszystkich stanach, ale raczej liczba cząstek $\mathrm{d}N$, których energie mieszczą się w wąskim przedziale wartości. Tę liczbę cząstek można wyrazić przez

$$\mathrm{d}N = n(E)\,\mathrm{d}E = g(E)\,\mathrm{d}E \cdot f(E),$$

gdzie $n(E)\,\mathrm{d}E$ jest liczbą elektronów w przedziale energii $\mathrm{d}E$; $g(E)$ jest **gęstością stanów** (ang. **density of states**), czyli liczbą dozwolonych stanów na jednostkę energii; $\mathrm{d}E$ jest wielkością przedziału energii; a $f(E)$ to **czynnik Fermiego** (ang. **Fermi factor**). Wyraża on prawdopodobieństwo, że stan o danej energii jest zapełniony. Na przykład, jeśli $g(E)\,\mathrm{d}E$ daje 100 dostępnych stanów, ale $f(E)$ wynosi $5\,\%$, wówczas liczba cząstek w tym wąskim przedziale energii to zaledwie 5. Znalezienie funkcji $g(E)$ wymaga rozwiązania równania Schrödingera (w trzech wymiarach) w celu wyznaczenia dozwolonych energii. Nawet dla prostego modelu jest to zadanie dość wymagające, ale wynik jest prosty

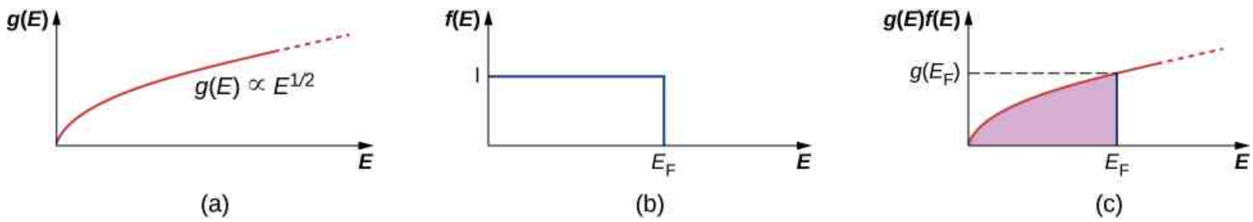
$$g(E) = \frac{\pi V}{2} \cdot \left(\frac{8m_\mathrm{e}}{h^2}\right)^{3/2} E^{1/2}, \tag{9.29}$$

gdzie V jest objętością metalu, m_e to masa elektronu, a E energia stanu. Zwróćmy uwagę, że gęstość stanów rośnie jak pierwiastek z energii. Więcej stanów jest dostępnych przy wyższych energiach niż przy niskich. Wyrażenie to dostarcza informacji o gęstości dozwolonych poziomów w „przestrzeni energii”. Na przykład, studiując strukturę atomową, dowiedzieliśmy się, że poziomy energetyczne wodoru są znacznie bardziej oddalone od siebie w obszarze niskich energii (blisko stanu podstawowego) niż w obszarze energii wyższych.

Funkcja ta mówi nam, ile stanów elektronowych jest dostępnych w trójwymiarowym krysztale metalicznym. Jednakże nie mówi, z jakim prawdopodobieństwem stany te będą obsadzane. Dlatego musimy określić czynnik Fermiego, $f(E)$. Rozważmy prosty przypadek $T = 0\,\mathrm{K}$. Opierając się na fizyce klasycznej, spodziewalibyśmy się, że wszystkie elektrony ($\sim 10^{22}\,\mathrm{cm}^{-3}$) zajmą stan podstawowy, aby osiągnąć najniższą możliwą energię. Jednakże sytuacja taka byłaby sprzeczna z zakazem Pauliego, który mówi, że w jednym stanie kwantowym nie może znaleźć się więcej niż jeden elektron. Dlatego, jeśli będziemy obsadzali stany elektronami, to najpierw obsadzone zostaną stany o najniższej energii, a następnie stopniowo te o energiach coraz wyższych. Ostatni elektron zajmie stan o energii najwyższej. Energia ta nosi nazwę energii Fermiego E_F dla gazu swobodnych elektronów. Stan o energii $E < E_\mathrm{F}$ jest obsadzony przez jeden elektron, a ten o energii $E > E_\mathrm{F}$ pozostaje nieobsadzony. Aby opisać w języku prawdopodobieństwa $f(E)$ to, że stan o energii E jest obsadzony, piszemy dla $T = 0\,\mathrm{K}$

$$\begin{aligned} f(E) &= 1 \;\; (E < E_\mathrm{F}), \\ f(E) &= 0 \;\; (E > E_\mathrm{F}). \end{aligned} \tag{9.30}$$

Gęstość stanów, czynnik Fermiego i gęstość obsadzonych stanów są przedstawione jako funkcje energii na Rysunku 9.12.



Rysunek 9.12 (a) Gęstość stanów gazu swobodnych elektronów. (b) Prawdopodobieństwo obsadzenia stanu w temperaturze $T = 0\,\mathrm{K}$. (c) Gęstość obsadzonych stanów w temperaturze $T = 0\,\mathrm{K}$

Warto zwrócić uwagę na kilka faktów. Po pierwsze, gęstość obsadzonych stanów (ostatni rysunek) gwałtownie maleje do zera przy energii Fermiego. Zgodnie z teorią energia ta dana jest formułą

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8m_e} \cdot \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}, \tag{9.31}$$

gdzie N / V to koncentracja elektronów w metalu.

Energie Fermiego dla wybranych materiałów są podane w poniższej tabeli:

Pierwiastek	Koncentracja elektronów ($10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}$)	Energia Fermiego wg modelu swobodnych elektronów (eV)
Al	18,1	11,7
Ba	3,15	3,64
Cu	8,47	7
Au	5,9	5,53
Fe	17	11,1
Ag	5,86	5,49

Tabela 9.3 Koncentracje elektronów i energie Fermiego dla wybranych metali.

Zauważmy, że tylko wykres w części (c) rysunku, który daje odpowiedź na pytanie „Ile elektronów na jednostkę objętości znajduje się w danym zakresie energii", może być sprawdzony doświadczalnie. **Temperatura Fermiego** (ang. **Fermi temperature**) lub „temperatura efektywna" elektronów o energii Fermiego wynosi

$$T_F = \frac{E_F}{k_B}. \tag{9.32}$$

Przykład 9.5

Energia Fermiego dla srebra

Metaliczne srebro jest świetnym przewodnikiem. Koncentracja elektronów wynosi w tym materiale $5{,}86 \cdot 10^{28}$ na metr sześcienny.

a. Obliczmy energię Fermiego dla srebra.
b. Porównajmy tę energię do energii termicznej $k_B T$, jaką mają elektrony w temperaturze pokojowej $300\ \mathrm{K}$.

Rozwiązanie

a. Jak wynika z Równania 9.31, energia Fermiego wynosi

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m_e} \cdot \left(3\pi^2 n_e\right)^{2/3} = \frac{\left(1{,}05 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J\,s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} \cdot \left(3\pi^2 \cdot 5{,}86 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}\right)^{2/3}$$
$$= 8{,}79 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 5{,}49\ \mathrm{eV}.$$

Jest to typowa wartość energii Fermiego dla metali, jak można zobaczyć w Tabeli 9.3.

b. Możemy związać temperaturę Fermiego T_F z energią Fermiego, zapisując $k_B T_F = E_F$. Stąd znajdujemy temperaturę Fermiego

$$T_F = \frac{8{,}79 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}38 \cdot 10^{-23}\ \text{J / K}} = 6{,}37 \cdot 10^4\ \text{K},$$

która jest o wiele większa niż temperatura pokojowa, a nawet typowa temperatura topnienia ($\sim 10^3$ K) metalu. Stosunek energii Fermiego srebra do energii termicznej odpowiadającej temperaturze pokojowej wynosi

$$\frac{E_F}{k_B T} = \frac{T_F}{T} \approx 210.$$

Aby zwizualizować, w jaki sposób zapełniane są stany kwantowe, możemy wyobrazić sobie powolne nalewanie wody do szklanego kielicha, tak jak to pokazano na Rysunku 9.13. Pierwsze krople wody wypełniają dno naczynia (tak jak elektrony zapełniają stany o najniższej energii). W miarę jak poziom rośnie, zapełniane są stany o wyższej energii. Ponadto, ponieważ kielich rozszerza się ku górze, więcej wody mieści się w górnej jego części niż w dolnej. Podobnie jest w gazie swobodnych elektronów, tych o większej energii jest więcej, gdyż gęstość stanów $g(E)$ jest proporcjonalna do $E^{1/2}$. Wreszcie poziom, do którego kielich jest wypełniony, odpowiada energii Fermiego.



Rysunek 9.13 Powyżej na przykładzie kielicha z wodą zobrazowano w jaki sposób elektrony zapełniają poziomy energetyczne w metalu. W miarę jak elektrony zapełniają poziomy od najniższego do najwyższego, liczba dostępnych stanów rośnie. Najwyższy poziom energetyczny (odpowiadający powierzchni wody) to energia Fermiego. Źródło: modyfikacja pracy „Didriks”/Flickr

Przypuśćmy, że w $T = 0\,\text{K}$ liczba elektronów przewodnictwa na jednostkę objętości wynosi n_e . Ponieważ w każdym zapełnionym stanie znajduje się jeden elektron, liczba zapełnionych stanów na jednostkę objętości jest taka sama jak liczba elektronów na jednostkę objętości.

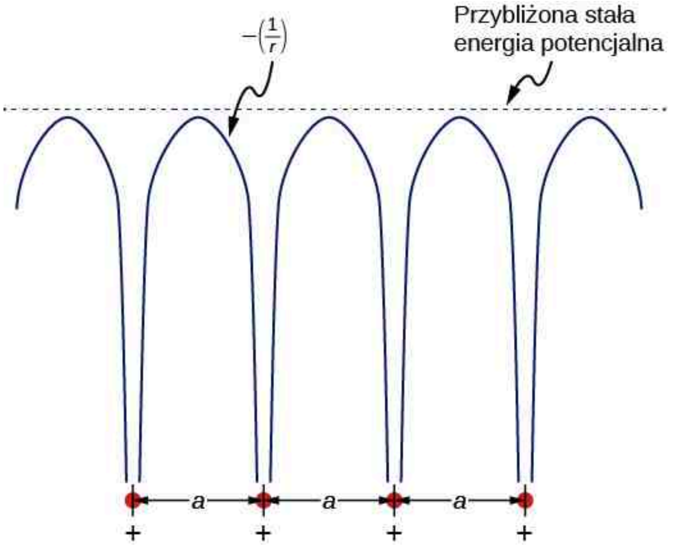
9.5 | Teoria pasmowa ciał stałych

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać dwa główne podejścia do wyznaczania poziomów energetycznych elektronu w krysztale;
- wyjaśniać pochodzenie pasm i przerw energetycznych w krysztale;
- wyjaśniać, dlaczego niektóre materiały są dobrymi przewodnikami, a inne dobrymi izolatorami;
- odróżniać izolator od półprzewodnika.

Model elektronów swobodnych może posłużyć do wyjaśnienia wielu ważnych właściwości przewodników. Ma jednak co najmniej dwie poważne wady. Po pierwsze, zakłada, że potencjał wewnątrz kryształu jest stały (przypomnijmy, że stały potencjał oznacza brak sił). Na Rysunku 9.14 porównano stałą energię potencjalną (linia przerywana) z periodyczną energią potencjalną Coulomba, która maleje jak $-1 / r$ przy każdym punkcie sieci, gdzie r jest odległością od rdzenia jonu (linia ciągła). Po drugie, w modelu elektronów swobodnych zakłada się, że na powierzchni znajduje się nieprzenikalna bariera. Założenie to jest dużym przybliżeniem, ponieważ elektrony mogą opuszczać powierzchnię tak jak w efekcie fotoelektrycznym. Ponadto model gazu elektronów swobodnych nie tłumaczy ogromnych różnic we właściwościach elektronowych przewodników, półprzewodników i izolatorów. Tak więc potrzebny jest model lepiej opisujący rzeczywistość.



Rysunek 9.14 Potencjał okresowy wykorzystywany do modelowania elektronów w przewodniku. Każdy jon w krysztale jest źródłem potencjału Coulomba. Warto zauważyć, że model gazu elektronowego jest uzasadniony tym, że średnia tego potencjału jest w przybliżeniu stała.

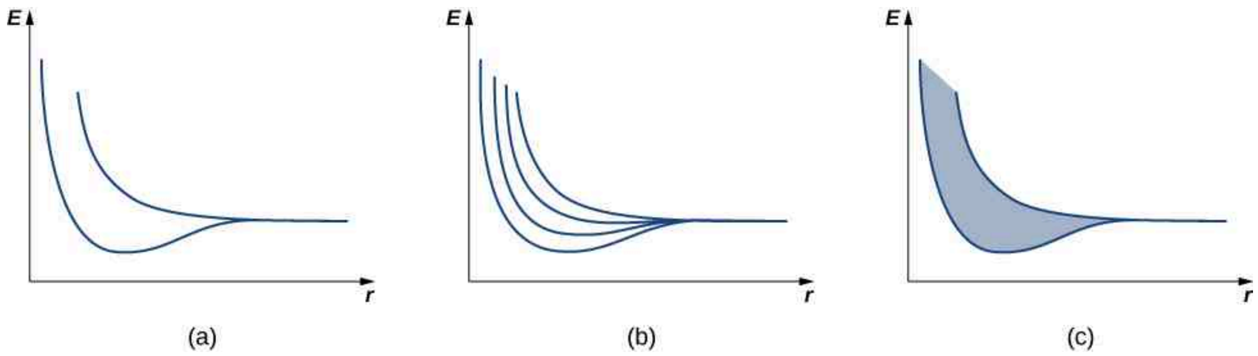
Można zbudować ulepszony model, rozwiązując równanie Schrödingera dla potencjału periodycznego, jak na Rysunku 9.14. Jednakże rozwiązanie takie wymaga zastosowania zaawansowanej matematyki, co znacznie wykracza poza ramy tego podręcznika. Mimo to, by zrobić kolejny krok, poszukamy argumentów jakościowych opartych na mechanice kwantowej.

Najpierw przypomnimy sobie argument użyty do wyjaśnienia struktury energetycznej w wiązaniu kowalencyjnym. Rozważmy dwa identyczne atomy wodoru, na tyle oddalone od siebie, że nie ma między nimi żadnego oddziaływania. Następnie załóżmy, że w każdym z tych atomów elektron znajduje się w stanie podstawowym $1s$ o energii $-13{,}6\,\text{eV}$ (pomijamy spin). Kiedy te dwa atomy zbliżymy do siebie, dwie funkcje falowe z dwóch atomów nakładają się i z powodu zakazu Pauliego nie mogą już reprezentować tego samego stanu. To powoduje rozszczepienie początkowo jednakowych energii na dwa różne poziomy energetyczne. Energie tych poziomów zależą od odległości międzyatomowej, α (Rysunek 9.15).

Jeżeli cztery atomy wodoru zbliżymy do siebie, to w każdej studni potencjału (każdego atomu) powstaną cztery

poziomy z czterech możliwych, symetrycznie nierównoważnych konfiguracji „garbów” funkcji sinus. W granicy dużej liczby N atomów, czyli jak w krysztale, spodziewamy się pewnego przedziału poziomów energetycznych zmieniających się w sposób niemal ciągły (patrz Rysunek 9.15 (c)). Te przedziały energii nazywamy **pasmami energetycznymi** (ang. **energy band**; dozwolone stany są nadal skwantowane, lecz przy dużej liczbie atomów znajdują się tak blisko siebie, że można uważać, iż tworzą pasmo o energii zmieniającej się w sposób ciągły).

Pasma energetyczne różnią się liczbą zawartych w nich elektronów. W pasmach tworzonych przez stany $1s$ i $2s$ na każdym poziomie znajdują się maksymalnie dwa elektrony (o spinie w górę i spinie w dół), tak że każde z tych pasm zawiera najwyżej $2N$ elektronów. W paśmie złożonym ze stanów $2p$ na każdym poziomie znajduje się maksymalnie sześć elektronów, a więc całe pasmo zawiera najwyżej $6N$ elektronów (Rysunek 9.16).



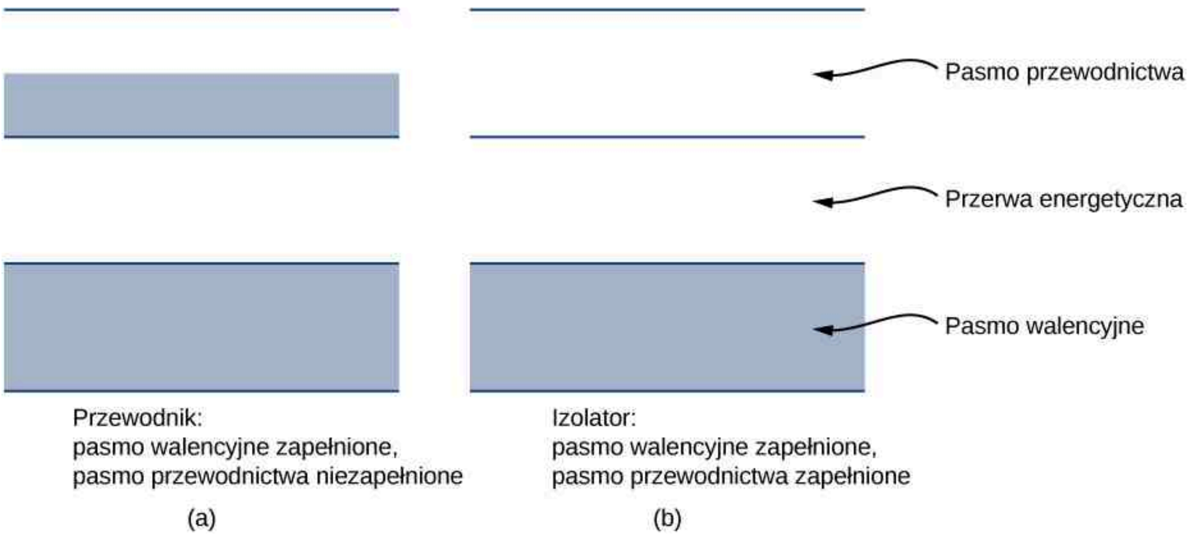
Rysunek 9.15 Zależność rozszczepienia poziomów energetycznych od średniej odległości między (a) dwoma atomami, (b) czterema atomami i (c) dużą liczbą atomów. Przy dużej liczbie atomów powstaje pasmo energetyczne (energia wewnątrz pasma zmienia się w sposób ciągły).



Rysunek 9.16 Prosta reprezentacja struktury energetycznej kryształu. Elektrony należą do pasm oddzielonych przerwami energetycznymi.

Każde pasmo oddzielone jest od sąsiedniego **przerwą energetyczną** (ang. **energy gap**). Właściwości elektryczne przewodników i izolatorów można wyjaśnić, posługując się obrazem pasm. Najwyższe zapełnione pasmo nazywane jest **pasmem walencyjnym** (ang. **valence band**). Następne pasmo dostępne w strukturze energetycznej to **pasmo przewodnictwa** (ang. **conduction band**). W przewodniku najwyższe pasmo zawierające elektrony jest tylko częściowo zapełnione, podczas gdy w izolatorze pasmo to jest całkowicie zapełnione. Różnica między przewodnikiem a izolatorem zilustrowana jest na Rysunku 9.17.

Przewodnik różni się od izolatora sposobem, w jaki elektrony odpowiadają na pole elektryczne. Jeśli znacząca liczba elektronów wprawiana jest w ruch przez pole, wówczas materiał jest przewodnikiem. W obrazie modelu pasm elektrony w częściowo zapełnionym paśmie przewodnictwa zyskują energię kinetyczną od pola elektrycznego, zapełniając wyższe stany energetyczne w ramach tego samego pasma. Inaczej jest w izolatorze, gdzie elektrony należą do całkowicie zapełnionego pasma walencyjnego, a kolejne pasmo jest puste. Gdy przyłożone jest pole elektryczne, elektrony nie mogą wykonać takich przejść z powodu zakazu Pauliego, w wyniku czego materiał nie przewodzi prądu.



Rysunek 9.17 Porównanie przewodnika do izolatora. Najwyższe pasmo energetyczne jest częściowo zapełnione w przewodniku i całkowicie puste w izolatorze.

Odwiedź symulację (https://openstaxcollege.org/l/21bandstructure) , aby dowiedzieć się, skąd biorą się pasma energetyczne w kryształach i jak struktura pasm określa, czy materiał przewodzi prąd. Zbadaj, jak sieć wielu studni kwantowych tworzy strukturę pasmową.

Półprzewodnik (ang. **semiconductor**) ma strukturę energetyczną podobną do izolatora, lecz ze stosunkowo małą przerwą energetyczną między najwyższym pasmem całkowicie zapełnionym a kolejnym całkowicie pustym. Ten typ materiału stanowi podstawę współczesnej elektroniki. W temperaturze $T = 0\,\text{K}$ zarówno izolator, jak i półprzewodnik mają całkowicie zapełnione pasmo walencyjne. Jedyna różnica jest w szerokości przerwy energetycznej E_g pomiędzy najwyższym pasmem zapełnionym (pasmo walencyjne) a następnym całkowicie pustym (pasmo przewodnictwa). W półprzewodnikach przerwa ta jest na tyle mała, że w temperaturze pokojowej znacząca liczba elektronów jest termicznie wzbudzona do pasma przewodnictwa. Elektrony te znajdują się w prawie pustym paśmie i mogą zareagować na przyłożone pole elektryczne. W uproszczeniu przyjmuje się, że półprzewodnik to materiał, w którym przerwa energetyczna wynosi ok. $1\,\text{eV}$. (Patrz Tabela 9.4 dla krzemu). Dla porównania, przerwa energetyczna w diamencie wynosi kilka elektronowoltów.

Materiał	Przerwa wzbroniona E_g (eV)
Si	1,14
Ge	0,67
GaAs	1,43
GaP	2,26
GaSb	0,69
InAs	0,35
InP	1,35
InSb	0,16
C (diament)	5,48

Tabela 9.4 Przerwa energetyczna w różnych materiałach w temperaturze $300\,\text{K}$, w eV. Uwaga: oprócz diamentu, wszystkie materiały zamieszczone w tabeli są półprzewodnikami.

9.6 | Półprzewodniki i domieszkowanie

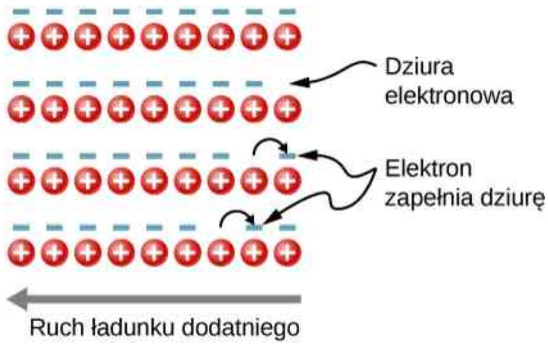
Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać zmiany w strukturze energetycznej półprzewodnika spowodowane domieszkowaniem;
- wskazywać różnicę między półprzewodnikiem typu n a półprzewodnikiem typu p;
- opisywać efekt Halla i wyjaśnić jego znaczenie;
- obliczać ładunek, prędkość unoszenia i gęstość nośników ładunku w półprzewodniku, korzystając z informacji uzyskanej z pomiarów efektu Halla.

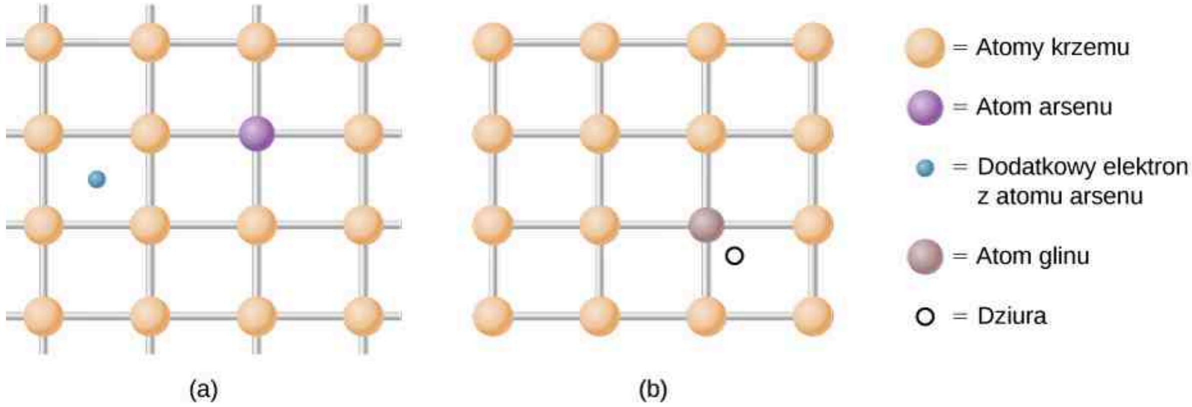
W poprzednim rozdziale rozważaliśmy jedynie następujący problem: jaki jest wkład do prądu elektrycznego od elektronów zajmujących stany w paśmie przewodnictwa. Jednakże, jeśli elektron z pasma walencyjnego wzbudzony jest do pasma przewodnictwa, to pozostawia on po sobie w pasmie walencyjnym nieobsadzony stan nazywany **dziurą** (ang. **hole**). Do tego stanu może łatwo przemieścić się sąsiadujący elektron, przez co przemieści się dziura. Na prąd elektryczny związany z takim przemieszczaniem się można patrzeć albo jak na kolektywny ruch elektronów o ładunku ujemnym, albo ruch dziur o ładunku dodatnim.

Aby to zilustrować, rozważmy jednowymiarową sieć, jak na Rysunku 9.18. Załóżmy, że jeden elektron walencyjny z każdego atomu daje wkład do prądu elektrycznego. Jeśli dziura po prawej stronie (powstała na skutek wzbudzenia elektronu do pasma przewodnictwa) zapełniona zostanie przez sąsiadujący elektron, wówczas przesunie się w lewo. Prąd zatem może być interpretowany jako ruch dodatniego ładunku w lewo. Gęstość dziur lub liczbę dziur przypadającą na jednostkę objętości (koncentrację dziur) oznaczamy przez p. Każdy elektron wzbudzany do pasma przewodnictwa pozostawia po sobie dziurę. Jeśli pasmo przewodnictwa było początkowo puste, wówczas koncentracja elektronów n jest równa koncentracji dziur, czyli $n = p$.



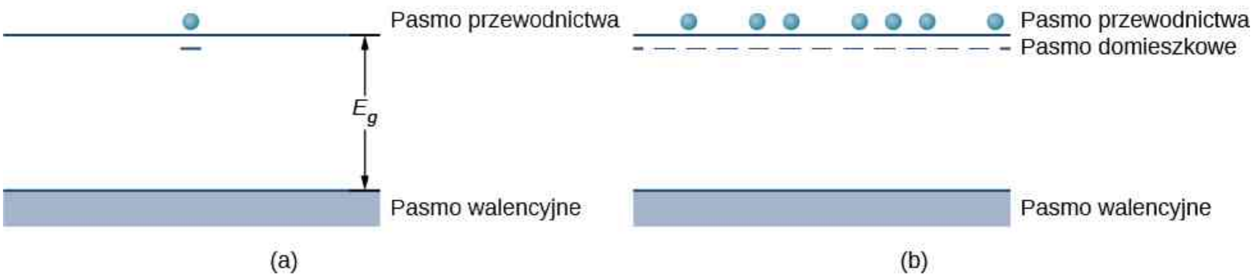
Rysunek 9.18 Ruch dziur w sieci krystalicznej. Gdy elektron przesuwa się w prawo, dziura przemieszcza się w lewo.

Jak już wspomniano, półprzewodnik to materiał z zapełnionym pasmem walencyjnym, pustym pasmem przewodnictwa i stosunkowo niewielką przerwą energetyczną między tymi pasmami. W materiale takim można wprowadzić dodatkowe elektrony lub dziury poprzez umieszczenie w sieci kryształu **atomu domieszki** (ang. **impurity atom**), o nieco innej liczbie elektronów walencyjnych niż materiał macierzysty. Taki proces nazywany jest **domieszkowaniem** (ang. **doping**). Załóżmy na przykład, że dodamy atom arsenu do kryształu krzemu (Rysunek 9.19 (a)).



Rysunek 9.19 (a) Domieszka donorowa; (b) domieszka akceptorowa. Wprowadzanie domieszek donorowych i akceptorowych do kryształu półprzewodnika znacząco zmienia jego właściwości elektronowe.

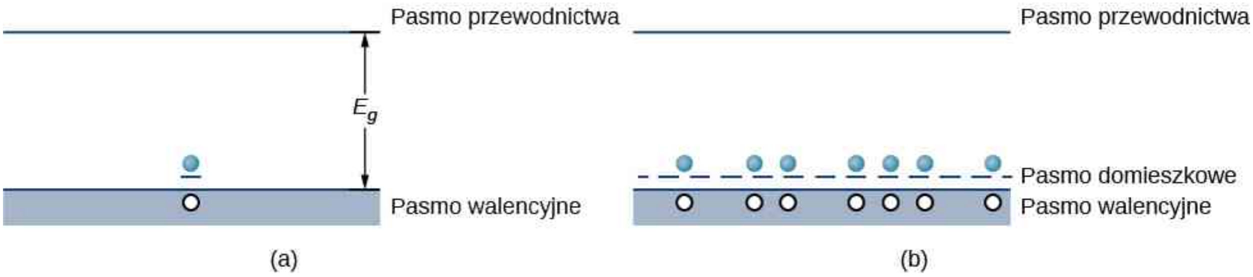
Arsen posiada pięć elektronów walencyjnych, podczas gdy krzem tylko cztery. Ten dodatkowy elektron musi zatem przejść do pasma przewodnictwa, ponieważ nie ma dla niego już miejsca w paśmie walencyjnym. Atom arsenu pozbawiony elektronu ma wypadkowy ładunek dodatni, który słabo wiąże zdelokalizowany elektron. Wiązanie to jest słabe, ponieważ sieć otaczająca jon arsenu ekranuje jego pole elektryczne. Z tego powodu energia wiązania elektronu wynosi zaledwie ok. $0{,}02\,\mathrm{eV}$. Innymi słowy, poziom energetyczny elektronu domieszki znajduje się w przerwie energetycznej o ok. $0{,}02\,\mathrm{eV}$ poniżej krawędzi pasma przewodnictwa. Jest to wartość o wiele mniejsza od wartości przerwy energetycznej Si, równej $1{,}14\,\mathrm{eV}$. W temperaturze pokojowej elektron domieszki jest łatwo wzbudzany do pasma przewodnictwa i wnosi wkład do przewodnictwa (Rysunek 9.20 (a)). Domieszka z dodatkowym elektronem nosi nazwę **domieszki donorowej** (ang. **donor impurity**), a domieszkowany w ten sposób półprzewodnik jest **półprzewodnikiem typu n** (ang. **n-type semiconductor**), ponieważ większościowe nośniki ładunku (elektrony) mają ładunek ujemny.



Rysunek 9.20 (a) Dodatkowy elektron z domieszki donorowej wzbudzony do pasma przewodnictwa; (b) poziom domieszkowy w półprzewodniku typu n.

Poprzez dodanie większej liczby domieszek możemy doprowadzić do pojawienia się **poziomu domieszkowego** (ang. **impurity band**), nowego poziomu energetycznego powstałego poprzez domieszkowanie, jak pokazano na Rysunku 9.20 (b). Poziom Fermiego znajduje się teraz pomiędzy tym poziomem a dolną krawędzią pasma przewodnictwa. W temperaturze pokojowej wiele elektronów jest wzbudzonych termicznie do pasma przewodnictwa, wnosząc wkład do przewodnictwa elektrycznego. Przewodnictwo może również wystąpić na poziomie domieszkowym, gdzie powstają puste miejsca po elektronach (które mogą się przemieszczać). Zauważmy, że zmiany energii elektronu wiążą się z jego ruchem względem półprzewodnika (prędkością lub energią kinetyczną), a nie z ruchem całego półprzewodnika.

Domieszkowanie można również realizować, używając atomów, które mają o jeden elektron walencyjny mniej niż atomy półprzewodnika. Na przykład Al, który ma trzy elektrony walencyjne, może zastąpić Si, jak pokazano na Rysunku 9.19 (b). Taka domieszka nazywana jest **domieszką akceptorową** (ang. **acceptor impurity**), a domieszkowany w ten sposób półprzewodnik staje się **półprzewodnikiem typu p** (ang. **p-type semiconductor**), ponieważ większościowe nośniki (dziury) mają ładunek dodatni. Jeśli potraktujemy dziurę jako dodatni ładunek słabo związany z domieszką, wówczas pusty stan elektronowy powstaje w przerwie energetycznej tuż powyżej górnej krawędzi pasma walencyjnego. Jeśli stan ten jest zapełniony przez elektron termicznie wzbudzony z pasma walencyjengo (Rysunek 9.21 (a)), to w paśmie walencyjnym powstaje mobilna dziura. Poprzez dodanie większej liczby domieszek akceptorowych możemy wytworzyć poziom domieszkowy, jak pokazano na Rysunku 9.21 (b).



Rysunek 9.21 (a) Elektron z pasma walencyjnego jest wzbudzony do pustego stanu powstałego przy domieszcze akceptorowej. (b) Tworzenie poziomu domieszkowego w półprzewodniku typu p

Prąd elektryczny w domieszkowanych półprzewodnikach może być związany z ruchem **nośników większościowych** (ang. **majority carriers**), gdy na przykład dziury pochodzą od atomów domieszki, lub z ruchem **nośników mniejszościowych** (ang. **minority carriers**), gdy dziury pochodzą tylko od wzbudzeń termicznych elektronów poprzez przerwę energetyczną. W półprzewodniku typu n nośnikami większościowymi są swobodne elektrony pochodzące od atomów domieszek, a nośniki mniejszościowe to dziury, które powstały w wyniku pobudzenia termicznego elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa. W półprzewodniku typu p nośnikami większościowymi są dziury pochodzące od atomów domieszek, a nośnikami mniejszościowymi są swobodne elektrony powstałe w wyniku wzbudzeń termicznych poprzez przerwę energetyczną. Zasadniczo liczba nośników większościowych znacznie przewyższa liczbę nośników mniejszościowych. Koncepcja nośników większościowych i mniejszościowych zostanie wykorzystana w następnym rozdziale do wyjaśnienia działania diod i tranzystorów.

Rozważania na temat domieszkowania typu p i typu n w sposób naturalny prowadzą do pytania: czy „elektronowe dziury” rzeczywiście zachowują się jak cząstki? Istnienie dziur w domieszkowanym półprzewodniku typu p można wykazać za pomocą efektu Halla. Efekt ten polega na powstawaniu różnicy potencjałów, gdy przez przewodnik (półprzewodnik) umieszczony w polu magnetycznym płynie prąd (patrz Efekt Halla (https://cnx.org/content/m67205/latest/)). Efekt Halla w sposób schematyczny pokazany jest na Rysunku 9.22 (a). Cienka płytka półprzewodnika znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym (które skierowane jest prostopadle do niej). Gdy dziury elektronowe przemieszczają się przez półprzewodnik zgodnie z kierunkiem prądu, siła Lorentza spycha je w stronę lewej krawędzi płytki (przypomnijmy, że ruch dodatnich ładunków w polu magnetycznym podlega regule prawej ręki). Ładunki dodatnie gromadzą się na lewej krawędzi płytki aż do momentu, gdy siła związana ze skierowanym w prawo polem elektrycznym pomiędzy lewą i prawą krawędzią $(F_{\mathrm{E}} = E_{\mathrm{q}})$ zrównoważy siłę magnetyczną skierowaną w lewo $(F_{\mathrm{B}} = qvB)$. Porównując te dwie siły, otrzymujemy $E = vB$. Napięcie, które powstaje w poprzek płytki, jest zatem równe

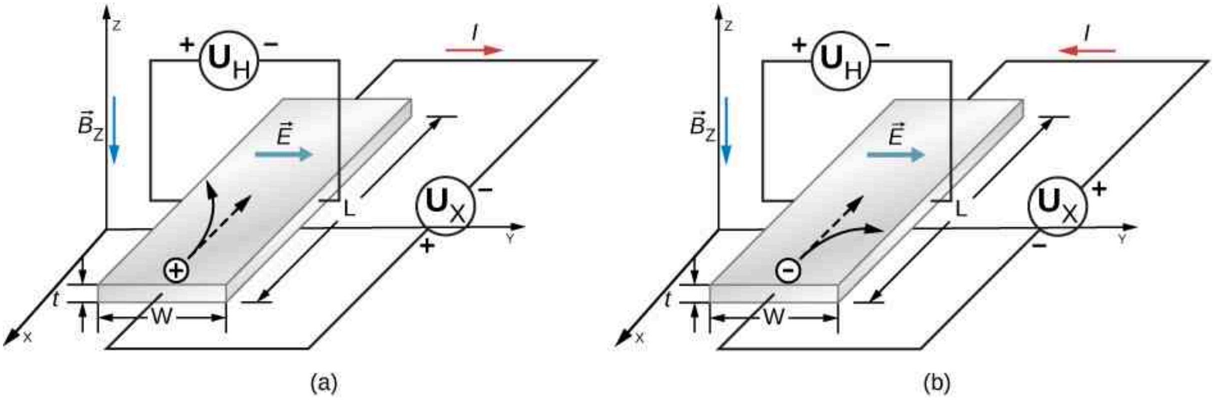
$$U_{\mathrm{H}} = vBw, \tag{9.33}$$

gdzie U_{H} jest napięciem Halla, v to **prędkość unoszenia** (ang. **drift velocity**) dziur lub średnia prędkość przemieszczania się cząstki poruszającej się w sposób częściowo losowy, B jest indukcją pola magnetycznego, a w jest szerokością płytki. Zauważmy, że napięcie Halla jest prostopadłe do napięcia, które powoduje przepływ prądu elektrycznego przez płytkę. Pomiar znaku tego napięcia (różnicy potencjałów) potwierdza, że na lewej krawędzi płytki gromadzą się dziury. Z wartości napięcia Halla można wyznaczyć prędkość unoszenia (v) nośników większościowych.

Z napięcia Halla można uzyskać jeszcze jedną informację. Zauważmy, że gęstość prądu elektrycznego (natężenie prądu na jednostkę pola powierzchni przekroju płytki półprzewodnika) wynosi

$$j = nqv, \tag{9.34}$$

gdzie q jest ładunkiem cząstki, n to koncentracja nośników ładunku, a v jest prędkością unoszenia. Gęstość prądu łatwo wyznacza się poprzez podzielenie natężenia prądu przez pole powierzchni przekroju poprzecznego płytki, q jest ładunkiem dziury (ładunek elektronu ze znakiem plus), a v wyznacza się z efektu Halla według Równania 9.34. Tak więc powyższe wyrażenie na gęstość prądu elektrycznego może być wykorzystane do wyznaczenia koncentracji nośników ładunku, n. Podobną analizę można wykonać dla nośników ładunku ujemnego w materiale typu n (patrz Rysunek 9.22).



Rysunek 9.22 Efekt Halla. W polu magnetycznym skierowanym prostopadle do płytki i do dołu (a) dziury elektronowe o ładunku dodatnim spychane są w lewą stronę, zaś (b) elektrony posiadające ładunek ujemny spychane są w prawo. Powstałe pole elektryczne jest skierowane w prawo.

9.7 | Przyrządy półprzewodnikowe

Cel dydaktyczny

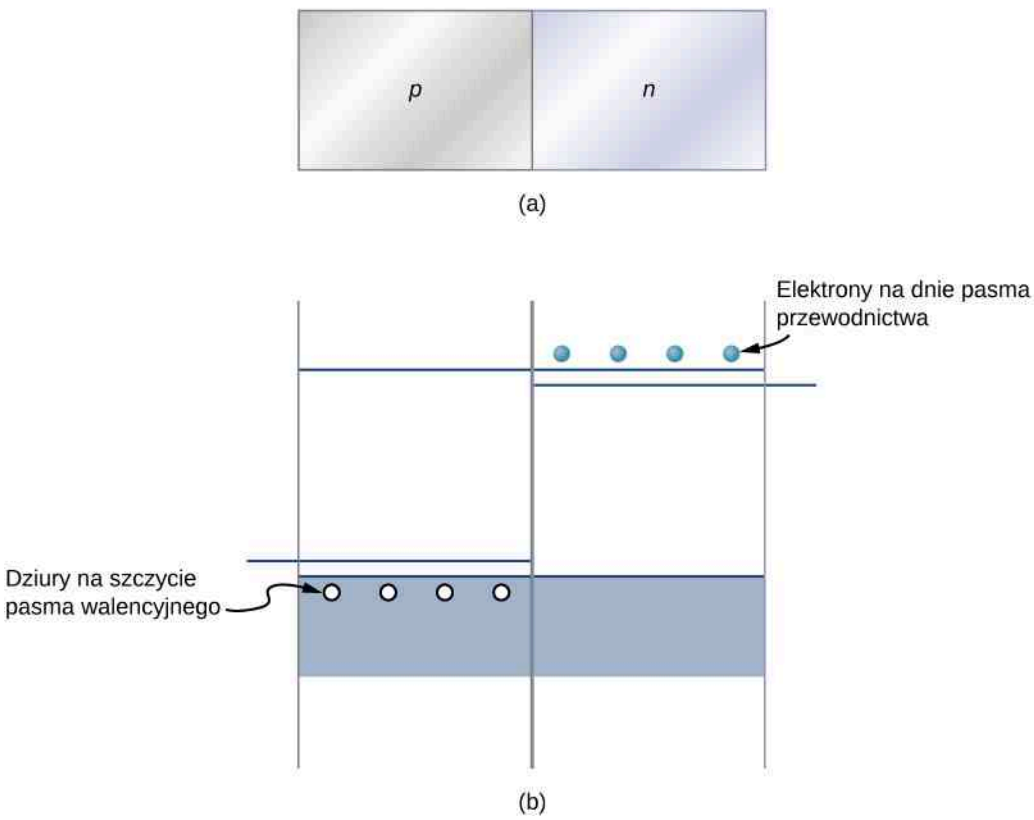
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać, co się dzieje, gdy półprzewodniki typu n i typu p zetkniemy ze sobą, korzystając z koncepcji dyfuzji i prądu unoszenia (przy zerowym napięciu zewnętrznym);
- wyjaśniać zachowanie się złącza po przyłożeniu napięcia w kierunku przewodzenia i zaporowym;
- opisywać działanie tranzystora w obwodzie elektrycznym;
- wykorzystywać koncepcję złącza p–n, aby wyjaśnić jego zastosowanie we wzmacniaczach akustycznych i komputerach.

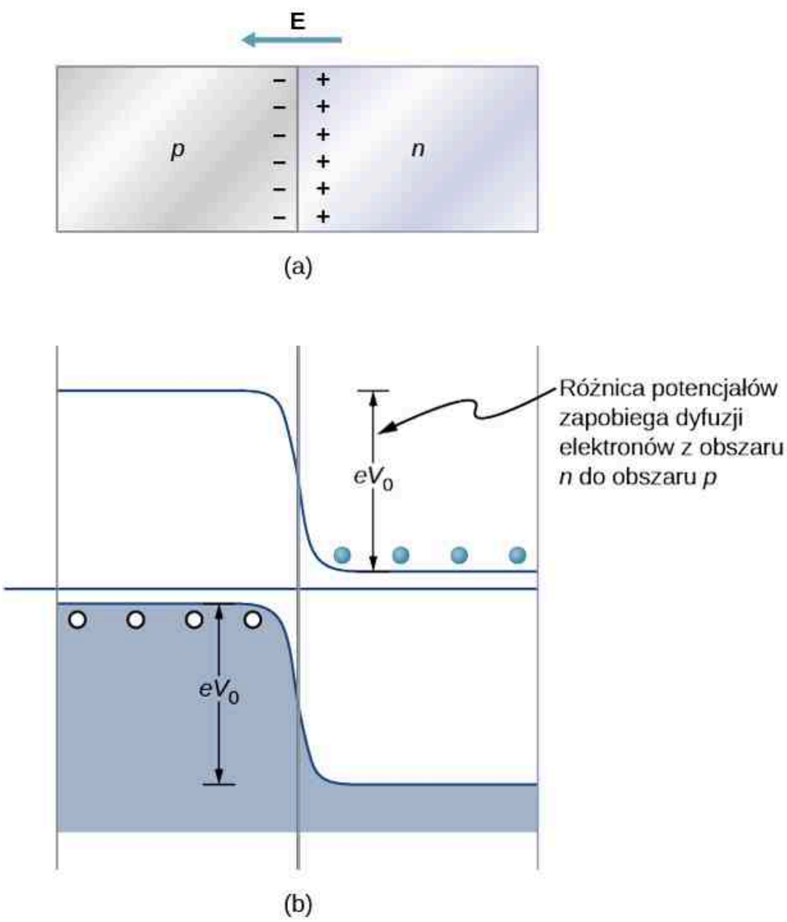
Półprzewodniki mają wiele zastosowań we współczesnej elektronice. W tym rozdziale opiszemy niektóre podstawowe przyrządy półprzewodnikowe. Wielką korzyścią płynącą z użycia półprzewodników do konstrukcji elementów obwodów elektronicznych jest fakt, że wiele tysięcy, a nawet milionów przyrządów półprzewodnikowych można umieścić na jednej niewielkiej płytce krzemu i połączyć je przewodzącymi ścieżkami. Struktura taka nosi nazwę układu scalonego (IC, ang. **integrated circuit**). Takie układy (chipy) są podstawą wielu nowoczesnych urządzeń, od komputerów i smartfonów po Internet i globalne sieci komunikacyjne.

Diody

Przypuszczalnie najprostszym przyrządem, jaki można zbudować z półprzewodnika, jest dioda. Dioda to element obwodu, który pozwala na przepływ prądu elektrycznego tylko w jednym kierunku, jak w modelu zaworu zwrotnego (patrz Model przewodnictwa w metalach (https://cnx.org/content/m67187/latest/)). Element taki tworzy się poprzez połączenie półprzewodników typu p i n (Rysunek 9.23). Połączenie takie nosi nazwę **złącza p–n** (ang. **p–n junction**). Pasma energetyczne w diodzie opartej na krzemie pokazano na Rysunku 9.23 (b). Położenia pasm walencyjnego i przewodnictwa są takie same, ale poziomy domieszkowe zupełnie inne. Kiedy tworzone jest złącze, elektrony z pasma przewodnictwa materiału typu n dyfundują do materiału typu p, a dziury w kierunku przeciwnym – z materiału typu p do materiału typu n. Ta migracja ładunku pozostawia dodatnio naładowane donory po stronie n i ujemnie naładowane akceptory po stronie p, tworząc cienką warstwę podwójną ładunku w obszarze złącza p–n noszącą nazwę **obszaru zubożonego** (ang. **depletion layer**). Pole elektryczne, które powstaje w obszarze zubożonym, przeciwdziała dalszej dyfuzji nośników. Energia potencjalna elektronów w poprzek złącza p–n pokazana jest na Rysunku 9.24.



Rysunek 9.23 (a) Obraz złącza p–n; (b) porównanie pasm energetycznych krzemu typu p i typu n przed osiągnięciem stanu równowagi.



Rysunek 9.24 Obraz złącza p–n w równowadze, (a) ładunek nadmiarowy znajduje się blisko złącza, a wypadkowy prąd wynosi zero, natomiast (b) różnica potencjałów dla elektronów (reprezentowanych przez jasnoniebieskie kółeczka) zapobiega dalszej dyfuzji elektronów do obszaru p.

W świetle powyższego obrazu można zrozumieć zachowanie się diody półprzewodnikowej. Jeśli dodatni biegun baterii przyłączony jest do materiału typu n, wówczas obszar zubożony poszerza się, a różnica potencjałów na złączu p–n zwiększa się. Tylko niewielka liczba elektronów (dziur) ma energię wystarczającą, aby pokonać barierę potencjału, stąd prąd jest bardzo niewielki. Taka konfiguracja nosi nazwę **polaryzacji w kierunku zaporowym** diody (ang. **reverse bias configuration**). Z drugiej strony, jeśli dodatni biegun baterii przyłączony jest do materiału typu p, obszar zubożony zwęża się, różnica potencjałów na złączu p–n zmniejsza się i elektrony (dziury) łatwo przepływają przez złącze. Taka konfiguracja nosi nazwę **polaryzacji w kierunku przewodzenia** diody (ang. **forward bias configuration**). Podsumowując, dioda pozwala na przepływ prądu w jednym kierunku i zapobiega jego przepływowi w drugą stronę. W takim sensie dioda półprzewodnikowa jest zaworem jednokierunkowym.

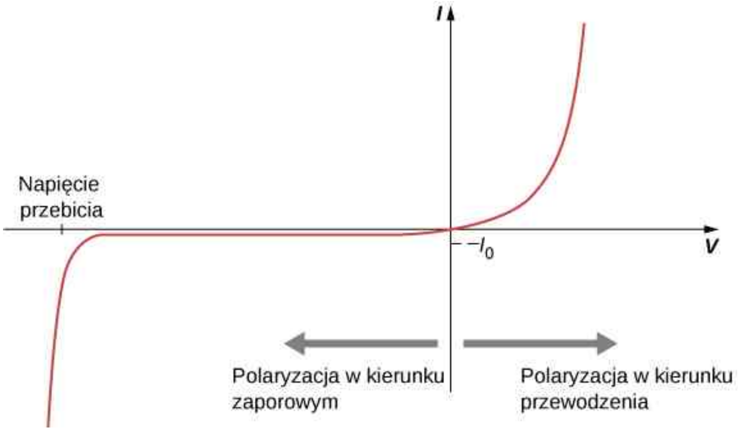
Możemy znaleźć związek matematyczny pomiędzy prądem i napięciem dla diody, wykorzystując koncepcję potencjału elektrycznego. Rozważmy N nośników większościowych o ładunku ujemnym (elektrony pochodzące od atomów domieszek) w materiale typu n oraz barierę potencjału U na złączu p–n. Zgodnie z rozkładem Maxwella-Boltzmanna część elektronów, które mają energię wystarczającą, aby przekroczyć barierę potencjału, dana jest przez $Ne^{-eU/(k_\mathrm{B}T)}$. Jednak gdy napięcie na diodzie U_b polaryzuje ją w kierunku przewodzenia, to część ta zwiększa się do $Ne^{-e(U-U_\mathrm{b})/(k_\mathrm{B}T)}$. Zatem wkład do prądu elektrycznego pochodzący od nośników większościowych w kierunku od n do p wynosi

$$I = Ne^{-eU/(k_\mathrm{B}T)}e^{eU_\mathrm{b}/(k_\mathrm{B}T)} = I_0 e^{eU_\mathrm{b}/(k_\mathrm{B}T)}, \tag{9.35}$$

gdzie I_0 to prąd przy braku zewnętrznego napięcia, a T – temperatura. Wkład do prądu pochodzący od nośników mniejszościowych (czyli wzbudzeń termicznych elektronów z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa po stronie p), a następnie ich dryf na stronę n wynosi I_0, niezależnie od polaryzacji. Prąd wypadkowy jest zatem równy

$$I_{wyp} = I_0 \cdot \left(e^{eU_b/(k_B T)} - 1\right). \qquad (9.36)$$

Przykładowy wykres prądu w zależności od napięcia pokazany jest na Rysunku 9.25. W zakresie polaryzacji w kierunku przewodzenia niewielkie zmiany napięcia prowadzą do dużych zmian prądu. Przy polaryzacji w kierunku zaporowym prąd jest stały i wynosi $I_{wyp} \approx -I_0$. Dla ekstremalnie dużych wartości napięcia przy polaryzacji w kierunku zaporowym atomy materiału są jonizowane, co uruchamia lawinowy przepływ prądu. Napięcie, przy którym dochodzi do tego zjawiska, nosi nazwę **napięcia przebicia** (ang. **breakdown voltage**).



Rysunek 9.25 Prąd w funkcji napięcia w złączu p–n (dioda). Przy polaryzacji w kierunku przewodzenia prąd elektryczny przepływa swobodnie, jednak przy polaryzacji w kierunku zaporowym przepływ prądu jest bardzo niewielki.

Przykład 9.6

Prąd diody

Przyłączając dodatni biegun baterii do strony p diody, a ujemny do strony n, spowodujemy przepływ prądu o natężeniu $0{,}45\,\mathrm{A}$. Przy polaryzacji przeciwnej popłynie prąd nasycenia $2{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A}$ (prąd nasycenia jest prądem przepływającym przez diodę przy polaryzacji w kierunku zaporowym). Napięcie baterii wynosi $0{,}12\,\mathrm{V}$. Jaka jest temperatura diody?

Strategia rozwiązania

Przy pierwszej konfiguracji mamy polaryzację w kierunku przewodzenia, a przy drugiej w kierunku zaporowym. W obu przypadkach popłynie prąd taki jak w Równaniu 9.2.

Rozwiązanie

Prąd przy polaryzacji w kierunku zaporowym i przewodzenia wyraża formuła

$$I_{wyp} = I_0 \cdot \left(e^{eU_b/(k_B T)} - 1\right).$$

Prąd I_0 jest nazywany prądem nasycenia (w kierunku zaporowym)

$$I_0 \approx -I_{nasycenia} = 2{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A}.$$

Stąd

$$\frac{I_{wyp}}{I_0} = \frac{0{,}45\,\mathrm{A}}{2{,}2 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A}} = 2 \cdot 10^8.$$

Równanie 9.2 można zapisać

$$\frac{I_{\text{wyp}}}{I_0} + 1 = e^{eU_\text{b}/(k_\text{B}T)}.$$

Stosunek prądów jest znacznie większy niż jeden, dlatego drugi składnik po lewej stronie można pominąć. Logarytmując obustronnie równanie, otrzymujemy

$$\frac{eU_\text{b}}{k_\text{B}T} = 19.$$

Temperatura wynosi zatem

$$T = \frac{eU_\text{b}}{k_\text{B}} \cdot \frac{1}{19} = \frac{1\,\text{eV} \cdot 0{,}12\,\text{V}}{8{,}617 \cdot 10^{-5}\,\text{eV} \,/\, \text{K}} \cdot \frac{1}{19} = 73\,\text{K}.$$

Znaczenie

Prąd przepływający przez diodę przy polaryzacji w kierunku przewodzenia i zaporowym jest czuły na temperaturę diody. Jeśli energia potencjalna dostarczana przez baterię jest duża w porównaniu z energią termiczną w otoczeniu diody $k_\text{B}T$, wówczas prąd przy polaryzacji w kierunku przewodzenia jest bardzo duży w porównaniu z prądem przy polaryzacji w kierunku zaporowym.

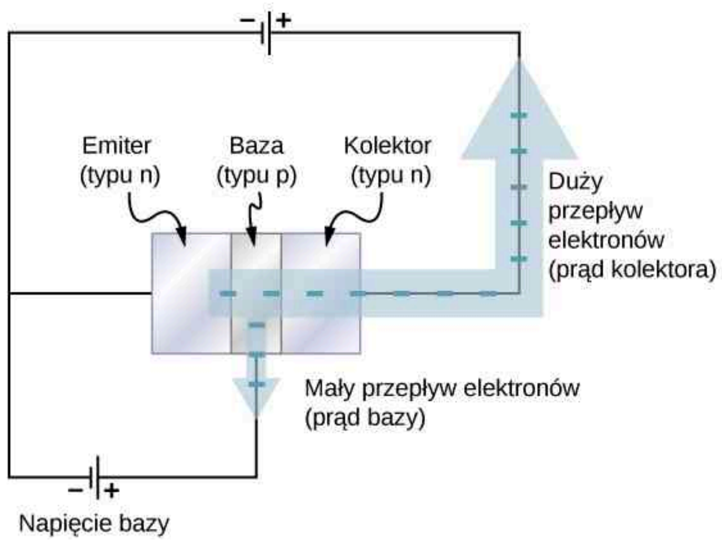
9.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaka jest wartość prądu przy polaryzacji w kierunku przewodzenia w porównaniu z wartością prądu przy polaryzacji w kierunku zaporowym?

Utwórz złącze p–n i obserwuj zachowanie się prostego obwodu przy polaryzacji napięcia w kierunku przewodzenia i zaporowym. Odwiedź stronę (https://openstaxcollege.org/l/21semiconductor) , aby dowiedzieć się więcej na temat diod półprzewodnikowych.

Tranzystor złączowy

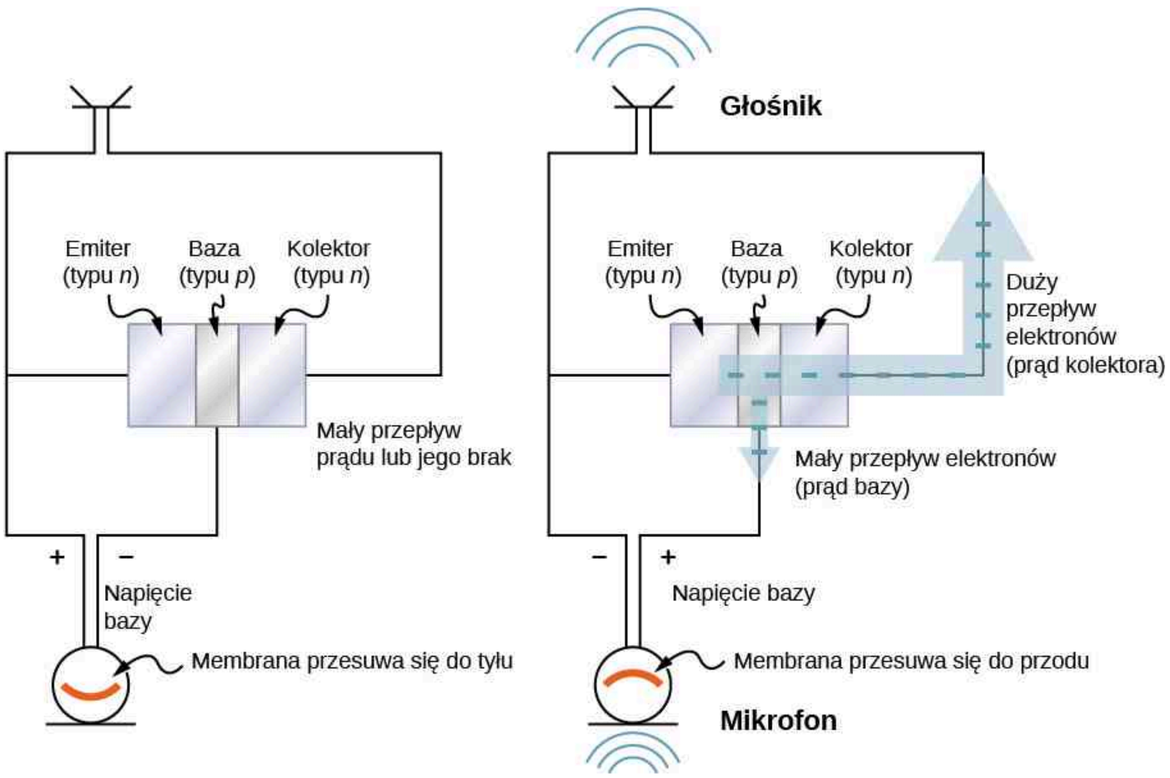
O ile diody są zaworami zwrotnymi, tranzystory są zaworami zwrotnymi, które dodatkowo mogą być precyzyjnie otwierane i zamykane w celu kontrolowania przepływu prądu. **Tranzystor złączowy** (ang. **junction transistor**) składa się z trzech części: półprzewodnika typu n, części nazywanej emiterem; wąskiego obszaru półprzewodnika typu p, stanowiącego bazę, i kolejnej części półprzewodnika typu n, nazywanej kolektorem (Rysunek 9.26). Gdy dodatni biegun baterii przyłączony jest do warstwy typu p (baza), mały prąd elektronów, nazywany **prądem bazy** (ang. **base current**) I_B , wpływa w obszar bazy. To powoduje, że duży **prąd kolektora** (ang. **collector current**) I_C zaczyna płynąć przez kolektor. W ten sposób za pomocą niewielkiego prądu bazy można sterować dużym prądem kolektora. Zysk prądowy wynosi

$$I_\text{C} = \beta I_\text{B}. \tag{9.37}$$



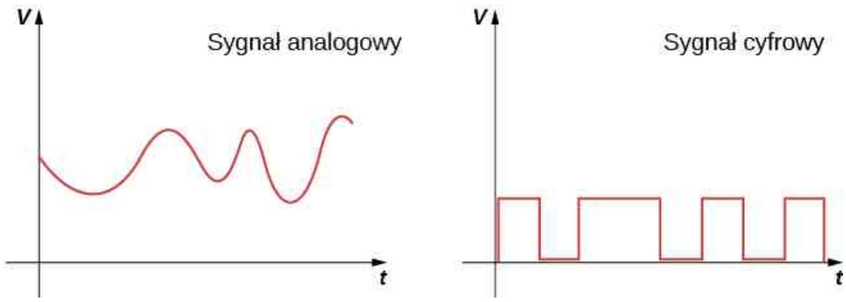
Rysunek 9.26 Tranzystor złączowy zawiera trzy części: emiter, bazę i kolektor. Napięcie przyłożone do bazy powoduje, że działa ona jak zawór kontrolujący prąd elektryczny płynący od emitera do kolektora.

Tranzystor złączowy może być wykorzystany do wzmocnienia napięcia z mikrofonu, by uruchomić głośnik. W zastosowaniu tym fale dźwiękowe powodują, że membrana znajdująca się wewnątrz mikrofonu porusza się szybko w przód i w tył (Rysunek 9.27). Kiedy membrana jest w położeniu „z przodu”, niewielki potencjał dodatni pojawia się na bazie tranzystora. To powoduje otwarcie „zaworu” i pozwala na przepływ dużego prądu do głośnika. Kiedy membrana jest w położeniu „z tyłu”, niewielki potencjał ujemny pojawia się na bazie tranzystora, który zamyka „zawór”, odcinając przepływ prądu do głośnika. W ten sposób prąd płynący do głośnika jest sterowany przez falę dźwiękową i dźwięk jest wzmacniany. Każde urządzenie elektryczne, które wzmacnia sygnał, nazywane jest **wzmacniaczem** (ang. **amplifier**).



Rysunek 9.27 Wzmacniacz audio oparty na tranzystorze złączowym. Napięcie przyłożone do bazy pochodzące od mikrofonu powoduje, że tranzystor działa jak zawór sterujący dużym prądem elektrycznym płynącym do głośnika.

W nowoczesnych przyrządach elektronicznych układy diod i tranzystorów w technice cyfrowej służą do przetwarzania danych. Układy elektroniczne operują na dwóch typach sygnałów: analogowym i cyfrowym (Rysunek 9.28). Sygnał analogowy zmienia się w sposób ciągły, a sygnał cyfrowy zmienia się skokowo między dwiema wartościami napięcia, na przykład $1\,\mathrm{V}$ i $0\,\mathrm{V}$. W układach cyfrowych, jak te w komputerze, tranzystory zachowują się jak przełączniki włączone-wyłączone. Tranzystor jest albo w konfiguracji „włączony”, co oznacza, że zawór jest całkowicie otwarty, albo w konfiguracji „wyłączony”, czyli gdy zawór jest całkowicie zamknięty. Układy scalone (IC) składają się z dużej liczby tranzystorów umieszczonych na niewielkiej płytce krzemu. Zaprojektowane są do przetwarzania sygnałów cyfrowych reprezentujących zera i jedynki, co znane jest jako kod binarny. Wynalezienie IC przyczyniło się do zapoczątkowania rewolucji w technice komputerowej.



Rysunek 9.28 Sygnały płynące ze świata rzeczywistego są najczęściej analogowe, to znaczy zmiany różnych wielkości fizycznych w nich zachodzące mają charakter ciągły. Na przykład zmiany natężenia dźwięku czy natężenia światła w obrazach są zwykle analogowe. Sygnały analogowe zmieniane są w cyfrowe dla celów przetwarzania elektronicznego, w urządzeniach rejestrujących czy komputerach. Sygnał cyfrowy uzyskiwany jest z analogowego poprzez zadanie pewnej wartości odcięcia.

9.8 | Nadprzewodnictwo

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać główne cechy nadprzewodnika;
- opisywać teorię BCS nadprzewodnictwa;
- wyznaczać krytyczne pole magnetyczne dla $T = 0\,\mathrm{K}$, korzystając z danych dla pola magnetycznego;
- obliczać maksymalną siłę elektromotoryczną (SEM) lub prąd dla przewodu, przy których pozostaje on jeszcze nadprzewodzący.

Opór elektryczny można uznać za miarę siły tarcia towarzyszącej przepływowi prądu elektrycznego. Stąd opór elektryczny jest głównym źródłem rozpraszania energii w układach elektrycznych, jak elektromagnesy, silniki elektryczne czy linie transmisyjne. Miedź jest powszechnie używana do wytwarzania przewodów elektrycznych, ponieważ w temperaturze pokojowej ma jedną z najmniejszych wartości oporności właściwej spośród znanych przewodników. (Co prawda srebro ma mniejszą oporność od miedzi, ale jego wysoka cena i mała dostępność przeważają nad potencjalnymi oszczędnościami energii).

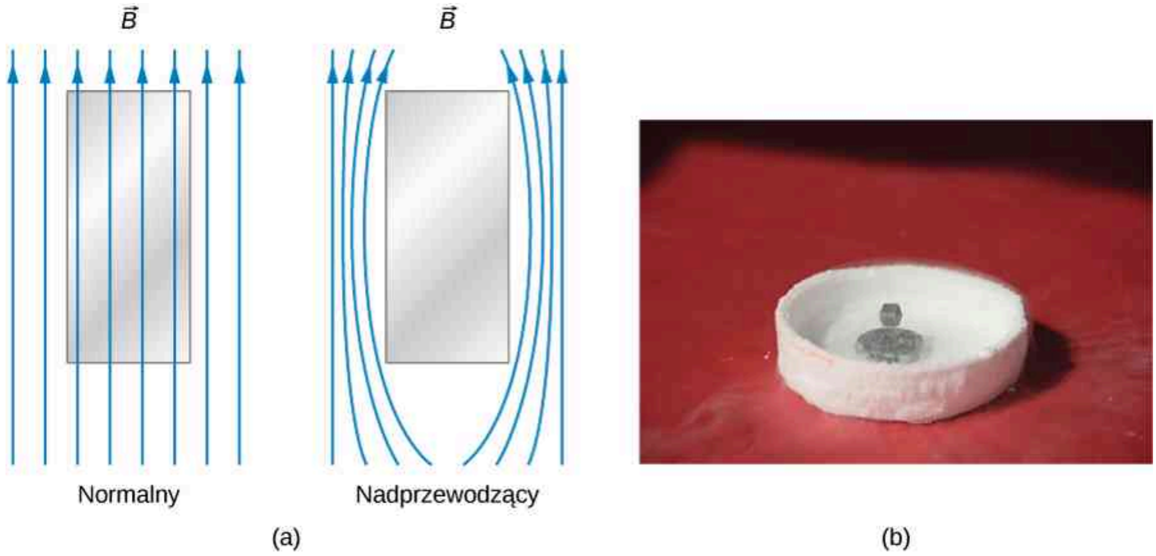
Mimo iż powyższe stwierdzenie sugeruje, że opór elektryczny jest właściwością wszystkich materiałów, wiemy, że tak nie jest. Gdy temperatura spada poniżej pewnej krytycznej wartości, w wielu materiałach opór właściwy spada do zera i stają się one nadprzewodnikami (patrz Nadprzewodniki (https://cnx.org/content/m67191/latest/)).


Popatrz na fragment NOVA video (https://openstaxcollege.org/l/21NOVA) , ochładzanie ciał jako wprowadzenie do tematu nadprzewodnictwa i jego licznych zastosowań.

Właściwości nadprzewodnika

Oprócz zerowej rezystywności nadprzewodniki charakteryzują się idealnym diamagnetyzmem. To znaczy, że w obecności pola magnetycznego wypadkowe pole magnetyczne wewnątrz nadprzewodnika jest zawsze zerowe (Rysunek

9.29). Tak więc linie pola magnetycznego przechodzące przez próbkę nadprzewodnika, kiedy znajduje się jeszcze w stanie normalnym, są wypchnięte na zewnątrz, gdy próbka staje się nadprzewodząca. W ten sposób manifestuje się efekt Meissnera, który omówiliśmy w rozdziale dotyczącym zagadnienia prądu elektrycznego i oporu elektrycznego.



Rysunek 9.29 (a) W efekcie Meissnera pole magnetyczne jest wypychane z materiału, w momencie gdy staje się on nadprzewodnikiem. (b) Magnes lewituje nad płytką nadprzewodnika, podtrzymywany siłą towarzyszącą wypychaniu pola magnetycznego.

Co ciekawe, efekt Meissnera nie jest konsekwencją zerowej oporności. Aby to wyjaśnić, przypuśćmy, że w wyniku przemiany w próbce umieszczonej w polu magnetycznym opór spada do zera. Zgodnie z prawem Ohma gęstość prądu j w próbce związana jest z wypadkowym wewnętrznym polem elektrycznym E i z opornością właściwą ρ przez $j = E / \rho$. Jeśli ρ jest zerowa, E musi mieć również wartość zero, aby j miała wartość skończoną. Pole elektryczne E i strumień magnetyczny Φ_B przez próbkę związane są prawem Faradaya

$$\oint E \mathrm{d} l = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}. \quad (9.38)$$

Jeśli E ma wartość zero, $\mathrm{d}\Phi_B / \mathrm{d}t$ również wynosi zero, czyli strumień magnetyczny przechodzący przez próbkę nie może się zmieniać. Z tego punktu widzenia linie magnetyczne nie mogłyby być wypchnięte z próbki, gdy następuje przemiana. Nie można więc stwierdzić, że w materiale, w którym rezystancja spada do zera, musi wystąpić efekt Meissnera. Efekt Meissnera jest raczej specjalną właściwością nadprzewodników.

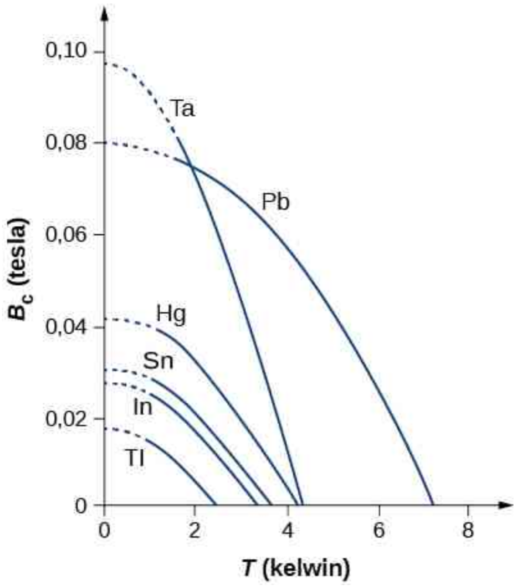
Inną ważną cechą nadprzewodnika jest jego **temperatura krytyczna** (ang. **critical temperature**) T_c, temperatura, poniżej której materiał jest nadprzewodzący. Zakres temperatur krytycznych (znany do tej pory) zaczyna się od ułamków $1\,\mathrm{K}$, a kończy niewiele powyżej $100\,\mathrm{K}$. Nadprzewodniki o wyższych temperaturach krytycznych znane są jako „wysokotemperaturowe”. Z praktycznego punktu widzenia ważne są nadprzewodniki, dla których $T_c \gg 77\,\mathrm{K}$. Obecnie w zastosowaniach często nadal wymaga się, aby materiał nadprzewodzący był zanurzony w ciekłym helu $(4{,}2\,\mathrm{K})$ w celu utrzymania temperatury niższej od krytycznej. Ciekły hel musi być ciągle uzupełniany z powodu parowania i koszty chłodzenia łatwo przekraczają oszczędności wynikające z zastosowania nadprzewodnika. Jednak $77\,\mathrm{K}$ to temperatura ciekłego azotu, który jest o wiele bardziej dostępny i tańszy od helu. Z ekonomicznego punktu widzenia byłoby więc znacznie korzystniej, gdybyśmy mogli łatwo wytwarzać nadprzewodniki wysokotemperaturowe, które chłodzone ciekłym azotem zachowywałyby swoje właściwości nadprzewodzące.

Nadprzewodniki wysokotemperaturowe mają obecnie rozmaite zastosowania. Przykładem jest wytwarzanie pól magnetycznych w akceleratorach cząstek. Ostatecznym celem jest odkrycie materiałów nadprzewodzących w temperaturze pokojowej. Brak wymogu chłodzenia spowodowałby, że liczne elementy elektroniczne i linie transmisyjne mogłyby być nadprzewodzące, co zaowocowałoby bezprecedensowym zwiększeniem ich funkcjonalności i wzrostem efektywności.

Inną ważną właściwością materiału nadprzewodzącego jest **krytyczne pole magnetyczne** (ang. **critical magnetic field**) $B_c\,(T)$, które w danej temperaturze jest maksymalną wartością zewnętrznego pola magnetycznego, przy której materiał pozostaje w stanie nadprzewodzącym. Przekroczenie tej wartości pola magnetycznego skutkuje zniszczeniem stanu nadprzewodzącego. Pole krytyczne wynosi zero w temperaturze krytycznej i rośnie w miarę obniżania temperatury. Wykresy zależności pola krytycznego od temperatury dla kilku materiałów nadprzewodzących pokazano na Rysunku 9.30. Zależność temperaturową pola krytycznego opisuje przybliżona formuła

$$B_c(T) = B_c(0\,\mathrm{K}) \cdot \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right], \tag{9.39}$$

gdzie $B_c\ (0\,\mathrm{K})$ jest polem krytycznym w temperaturze zera bezwzględnego. Tabela 9.5 zawiera krytyczne temperatury i pola dla dwóch klas nadprzewodników: **nadprzewodników typu I** (ang. **type I superconductor**) i **nadprzewodników typu II** (ang. **type II superconductor**). Ogólnie nadprzewodniki typu I to materiały takie jak aluminium czy rtęć. Są doskonałymi diamagnetykami dla pól niższych od krytycznego pola $B_c\ (T)$ i przechodzą w stan normalny, gdy wartość ta jest przekroczona. Krytyczne pola nadprzewodników typu I są zwykle małe (sporo poniżej $1\,\mathrm{T}$). Z tego powodu nie mogą być stosowane w sytuacjach, w których wytwarza się duże pole magnetyczne, ponieważ duże pole zniszczyłoby stan nadprzewodzący.



Rysunek 9.30 Zależność temperaturowa pola krytycznego dla kilku nadprzewodników. Nadprzewodnictwo występuje przy polach magnetycznych i temperaturach poniżej tych krzywych.

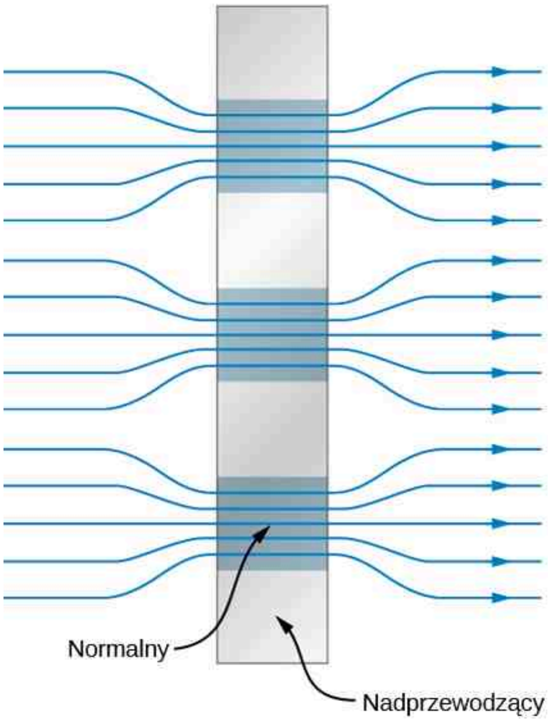
Materiał	Temperatura krytyczna (K)	Krytyczne pole magnetyczne (T)
Typ I		
Al	1,2	$11 \cdot 10^{-3}$
Ga	1,1	$5{,}1 \cdot 10^{-3}$
Hg (α)	4,2	$41 \cdot 10^{-3}$
In	3,4	$29 \cdot 10^{-3}$
Nb	9,3	0,2
Pb	7,2	0,08
Sn	3,7	0,31
Th	1,4	$0{,}16 \cdot 10^{-3}$
Zn	0,87	$5{,}3 \cdot 10^{-3}$
Typ II		
Nb_3Al	18	32

Tabela 9.5 Temperatura krytyczna i krytyczne pole magnetyczne w $T = 0\,\mathrm{K}$ dla różnych nadprzewodników.

Materiał	Temperatura krytyczna (K)	Krytyczne pole magnetyczne (T)
Nb_3Ge	23	38
Nb_3Sn	18	25
NbTi	9,3	15
$YBa_2Cu_3O_7$	92	> 100

Tabela 9.5 Temperatura krytyczna i krytyczne pole magnetyczne w $T = 0\,\mathrm{K}$ dla różnych nadprzewodników.

Nadprzewodniki typu II są zwykle związkami lub stopami zawierającymi metale przejściowe lub aktynowce. Prawie wszystkie nadprzewodniki o stosunkowo wysokiej krytycznej temperaturze są typu II. Charakteryzują się dwoma polami krytycznymi, oznaczanymi przez $B_{c1}\ (T)$ i $B_{c2}\ (T)$. Gdy pole ma mniejszą wartość niż $B_{c1}\ (T)$, nadprzewodniki typu II są doskonałymi dielektrykami, a strumień magnetyczny nie wnika do materiału. Gdy pole przekracza wartość $B_{c2}\ (T)$, przechodzą w stan normalny. Gdy pole jest większe niż $B_{c1}\ (T)$, lecz mniejsze niż $B_{c2}\ (T)$, mówimy, że nadprzewodniki typu II znajdują się w stanie mieszanym. Mimo że strumień magnetyczny wnika częściowo do materiału, rezystancja materiału ciągle jest równa zero. W stanie tym wewnątrz nadprzewodnika znajdują się „włókna" o normalnych właściwościach elektrycznych i magnetycznych splecione między obszarami, które są nadprzewodzące i doskonale diamagnetyczne. Taki stan pokazany jest schematycznie na Rysunku 9.31. Pole magnetyczne jest wypchnięte z obszarów nadprzewodzących, ale istnieje w obszarach normalnych. Ogólnie $B_{c2}\ (T)$ jest bardzo duże w porównaniu z krytycznymi polami nadprzewodników typu I, dlatego przewód wykonany z nadprzewodnika typu II może być użyty w uzwojeniach elektromagnesów wytwarzających silne pola.



Rysunek 9.31 Schematyczna reprezentacja stanu mieszanego nadprzewodnika typu II. Obszary nadprzewodzące (szare kwadraty) wypychają pole magnetyczne do sąsiednich obszarów (niebieskie kwadraty).

Przykład 9.7

Przewód niobowy

W pewnym eksperymencie przewód niobowy (Nb) o promieniu $0{,}25\,\mathrm{mm}$ zanurzono w ciekłym helu ($T = 4{,}2\,\mathrm{K}$). Jeśli przez ten przewód miałby popłynąć prąd $300\,\mathrm{A}$, czy pozostałby on nadal nadprzewodzący?

Strategia rozwiązania

Powstałe pole magnetyczne można wyznaczyć z promienia przewodu i prądu. Pole magnetyczne krytyczne dla Nb można znaleźć w Równaniu 9.1, właściwości nadprzewodnika zależne są od temperatury. Jeśli powstałe pole magnetyczne jest większe od krytycznego, wówczas stan nadprzewodzący Nb jest zniszczony.

Rozwiązanie

W $T = 4{,}2\,\mathrm{K}$ krytyczne pole magnetyczne dla Nb wynosi, na podstawie Równania 9.1 i Tabeli 9.5,

$$B_{\mathrm{c}}\,(4{,}2\,\mathrm{K}) = B_{\mathrm{c}}\,(0) \cdot \left[1 - \left(\frac{4{,}2\,\mathrm{K}}{9{,}3\,\mathrm{K}}\right)^2\right] = 0{,}2\,\mathrm{T} \cdot 0{,}8 = 0{,}16\,\mathrm{T}.$$

W jednym z poprzednich rozdziałów dowiedzieliśmy się, że pole magnetyczne na zewnątrz przewodnika, w którym płynie prąd elektryczny, jest dane przez

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

gdzie r jest odległością od osi środkowej przewodu. Tak więc pole na powierzchni przewodu wynosi $\mu_0 I\,/\,(2\pi r)$. Dla naszego przewodu niobowego

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{T\,m\,/\,A} \cdot 300\,\mathrm{A}}{2\pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}} = 0{,}24\,\mathrm{T}.$$

Ponieważ przekracza ono krytyczne pole $0{,}16\,\mathrm{T}$, przewód przestanie być nadprzewodzący.

Znaczenie

Nadprzewodnictwo występuje przy niskich temperaturach i małych polach magnetycznych. Jednoczesne spełnienie obu tych warunków w przypadku Nb jest łatwiejsze niż w wielu innych metalach. Na przykład aluminium nadprzewodzi w temperaturze 7-krotnie niższej i polu magnetycznym 18-krotnie mniejszym.

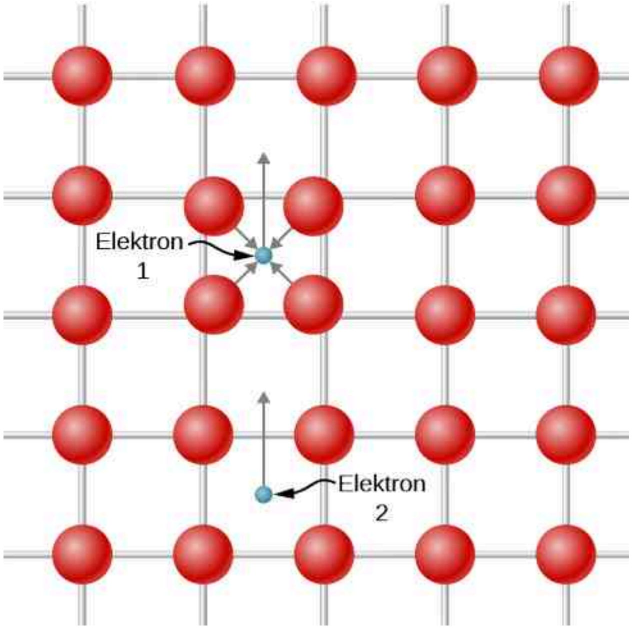
9.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jakie warunki są konieczne, by wystąpiło nadprzewodnictwo?

Teoria nadprzewodnictwa

Teoria nadprzewodnictwa, która odniosła sukces, została rozwinięta w roku 1950 przez **Johna Bardeena (1908–1991)**, **Leona Coopera (ur. 1930)** i **J. Roberta Schrieffera (ur. 1931)**. Otrzymali oni za to osiągnięcie Nagrodę Nobla w 1972 roku. Znana jest jako **teoria BCS** (ang. **BCS theory**; od nazwisk twórców). Jest to teoria złożona, dlatego poniżej przedstawimy tylko jej zarys.

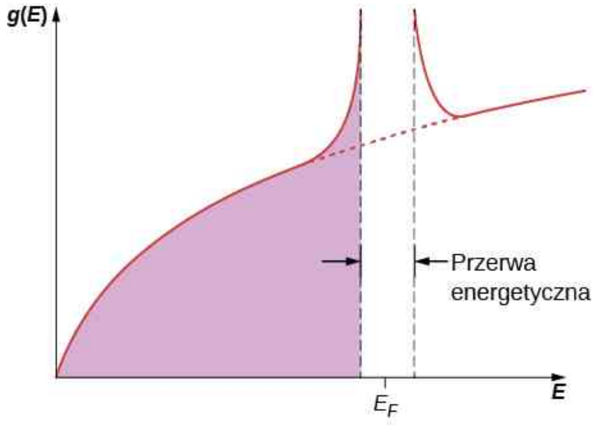
W zwykłym przewodniku właściwości elektryczne materiału zdeterminowane są przez najbardziej energetyczne elektrony, o energii zbliżonej do energii Fermiego. W roku 1956 Cooper pokazał, że jeśli istnieje jakieś przyciągające oddziaływanie między dwoma elektronami na poziomie Fermiego, wówczas elektrony te mogą tworzyć stan związany, w którym ich całkowita energia jest mniejsza niż $2E_{\mathrm{F}}$. Takie dwa elektrony znane są jako **para Coopera** (ang. **Cooper pair**).

Trudno wyobrazić sobie dwa elektrony przyciągające się. Skoro mają one taki sam ładunek, powinny się odpychać. Jednakże zaproponowane przyciąganie może się pojawić, jeśli uwzględnimy wpływ sieci atomów otoczenia. Mechanizm takiego przyciągania zilustrowany jest na Rysunku 9.32. Elektron 1, przemierzając sieć, powoduje, że w danej chwili otaczające go atomy przemieszczają się lekko ku sobie z powodu przyciągania elektrostatycznego. Elektron 2 „widzi” rejon o zwiększonej gęstości ładunku dodatniego w porównaniu z otoczeniem i w związku z tym jest przyciągany w tym kierunku, czyli pośrednio przez elektron 1. Z powodu zakazu Pauliego te dwa elektrony muszą mieć przeciwne spiny.



Rysunek 9.32 Para Coopera może się uformować na skutek przemieszczeń dodatnich jonów metalu. Elektron 1, przemierzając sieć, powoduje, że w danej chwili otaczające go atomy przemieszczają się lekko ku sobie z powodu przyciągania elektrostatycznego. Elektron 2 „widzi” rejon o zwiększonej gęstości ładunku dodatniego w porównaniu z otoczeniem i w związku z tym jest przyciągany w tym kierunku, czyli pośrednio przez elektron 1.

Teoria BCS rozszerza ideę Coopera (która dotyczy pojedynczej pary elektronów) na cały gaz elektronowy. Gdy następuje przejście do stanu nadprzewodzącego, wszystkie elektrony zaczynają tworzyć pary Coopera. W skali atomowej odległość między dwoma elektronami tworzącymi parę Coopera jest całkiem duża. Pomiędzy tymi elektronami znajduje się zwykle około 10^6 innych elektronów, każdy z nich sparowany z jakimś odległym elektronem. Stąd mamy do czynienia z silnym nakładaniem się funkcji falowych par Coopera, co z kolei skutkuje silną korelacją ruchu par. Wszystkie one poruszają się „równym krokiem”, jak członkowie maszerującej orkiestry. Przy przejściu do nadprzewodnictwa gęstość stanów w okolicy poziomu Fermiego drastycznie się zmienia. Jak pokazano na Rysunku 9.33, pojawia się przerwa energetyczna wokół E_F, ponieważ zbiór par Coopera ma niższą energię niż gaz Fermiego nieoddziałujących elektronów. Pojawienie się tej przerwy jest charakterystyczne dla stanu nadprzewodzącego. Jeśli stan ten jest zniszczony, wówczas przerwa znika i gęstość stanów staje się taka jak dla gazu swobodnych elektronów.



Rysunek 9.33 Kiedy materiał przechodzi w stan nadprzewodący, wokół energii Fermiego tworzy się stosunkowo duża przerwa energetyczna. Gdy stan nadprzewodzący jest zniszczony, przerwa znika i gęstość stanów wraca do postaci charakterystycznej dla gazu swobodnych elektronów.

Teoria BCS jest w stanie przewidzieć wiele właściwości obserwowanych w nadprzewodnikach. Przykłady to: efekt Meissnera, temperatura krytyczna, krytyczne pole magnetyczne i, co być może jest najważniejsze, oporność dążąca do zera w temperaturze krytycznej. O tym ostatnim zjawisku możemy myśleć w sposób jakościowy. W normalnym

przewodniku oporność bierze się między innymi z oddziaływania elektronów przewodnictwa z siecią. W oddziaływaniu tym wymieniana energia jest rzędu energii termicznej $k_B T$. W nadprzewodniku prąd przewodzony jest przez pary Coopera i jedynym sposobem rozproszenia energii pary przez sieć jest jej rozbicie. Rozbicie jednej pary skutkuje przerwaniem kolektywnego ruchu wszystkich par. Wymagana do tego energia ma wartość rzędu 10^{-3} eV, czyli rzędu przerwy energetycznej. Poniżej temperatury krytycznej energia termiczna jest zbyt mała, aby taki proces nastąpił, i pary Coopera przemierzają sieć bez przeszkód.

Na koniec warto zwrócić uwagę na fakt, że nie wykryto nadprzewodnictwa w najlepszych normalnych przewodnikach, takich jak miedź czy srebro. W świetle teorii BCS ma to jednak uzasadnienie. Podstawą tworzenia stanu nadprzewodzącego jest oddziaływanie między elektronami i siecią. W najlepszych przewodnikach oddziaływanie to jest najsłabsze i dlatego przewodnictwo właściwe jest duże. Można zatem przypuszczać, że w tych materiałach oddziaływanie elektron–sieć jest zbyt małe, aby mogły uformować się pary Coopera, co wyklucza możliwość zaistnienia stanu nadprzewodzącego.

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 9

KLUCZOWE POJĘCIA

atom domieszki (ang. impurity atom) atom domieszki akceptorowej lub donorowej

czynnik Fermiego (ang. Fermi factor) liczba wyrażająca prawdopodobieństwo, że stan o danej energii jest obsadzony

cząsteczka wieloatomowa (ang. polyatomic molecule) cząsteczka zawierająca więcej niż dwa atomy

domieszka akceptorowa (ang. acceptor impurity) atom podstawiony za atom macierzysty w półprzewodniku, co skutkuje pojawieniem się swobodnej dziury elektronowej

domieszka donorowa (ang. donor impurity) atom podstawiony za atom macierzysty półprzewodnika, co skutkuje pojawieniem się swobodnego elektronu

domieszkowanie (ang. doping) zmiana w materiale półprzewodnika polegająca na zastąpieniu jednego typu atomu innym

dziura (ang. hole) nieobsadzony stan w paśmie energetycznym

elektryczne przejście dipolowe (ang. electric dipole transition) przejście między stanami energetycznymi spowodowane absorpcją lub emisją promieniowania

energia dysocjacji (ang. dissociation energy) ilość energii potrzebna, aby rozdzielić cząsteczkę na atomy; także całkowita enegia na parę jonów potrzebna, aby rozdzielić kryształ na izolowane jony

energia Fermiego (ang. Fermi energy) największa energia stanu obsadzonego przez elektron w metalu w $T = 0\,\mathrm{K}$

gęstość stanów (ang. density of states) liczba dozwolonych stanów kwantowych na jednostkę energii

hybrydyzacja (ang. hybridization) zmiana w strukturze energetycznej atomu, przy której energetycznie preferowane superpozycje stanów biorą udział w wiązaniu

koncentracja elektronów (ang. electron number density) liczba elektronów na jednostkę objętości

krytyczne pole magnetyczne (ang. critical magnetic field) maksymalne pole magnetyczne, przy którym występuje jeszcze nadprzewodnictwo

kubiczna powierzchniowo centrowana (FCC) (ang. face-centered cubic) struktura kryształu, w której jon otoczony jest przez czterech najbliższych sąsiadów znajdujących się na ścianach sześciennej komórki elementarnej

kubiczna prosta (ang. simple cubic) podstawowa struktura kryształu, w której jony znajdują się w węzłach sześciennej sieci

kubiczna przestrzennie centrowana (BCC) (ang. body-centered cubic) struktura kryształu, w której jon otoczony jest przez ośmiu najbliższych sąsiadów ulokowanych w narożnikach sześciennej komórki elementarnej

model elektronów swobodnych (ang. free electron model) model metalu, w ramach którego elektrony traktowane są jak gaz

nadprzewodnik typu I (ang. type I superconductor) materiał nadprzewodzący, taki jak aluminium czy rtęć

nadprzewodnik typu II (ang. type II superconductor) nadprzewodzący związek lub stop zawierający takie pierwiastki jak metale przejściowe czy aktynowce

napięcie przebicia (ang. breakdown voltage) napięcie w kierunku zaporowym diody, przy którym powstaje prąd lawinowy

nośnik mniejszościowy (ang. minority carriers) swobodny elektron (lub dziura) wzbudzony termicznie przez przerwę energetyczną

nośnik większościowy (ang. majority carriers) swobodny elektron (lub dziura) pochodzący od atomu domieszki

obszar zubożony (ang. depletion layer) obszar obejmujący złącze p–n, w którym występuje pole elektryczne

odległość równowagowa (ang. equilibrium separation distance) odległość między atomami w cząsteczce

para Coopera (ang. Cooper pair) para związanych elektronów w nadprzewodniku

pasmo energetyczne (ang. energy band) pasmo energii, w którym energie elektronowych poziomów energetycznych zmieniają się w sposób niemal ciągły

pasmo przewodnictwa (ang. conduction band) kolejne pasmo energetyczne powyżej pasma walencyjnego w strukturze energetycznej kryształu

pasmo walencyjne (ang. valence band) najwyższe całkowicie zapełnione pasmo energetyczne w krysztale

polaryzacja w kierunku przewodzenia (ang. forward bias configuration) polaryzacja diody, przy której płynie duży prąd

polaryzacja w kierunku zaporowym (ang. reverse bias configuration) polaryzacja diody, przy której płynie mały prąd

powinowactwo elektronowe (ang. electron affinity) energia związana z przyłączeniem elektronu

poziom domieszkowy (ang. impurity band) poziom energetyczny powstały na skutek domieszkowania półprzewodnika

przerwa energetyczna (ang. energy gap) przerwa między pasmami energetycznymi w ciele stałym

prąd bazy (ang. base current) prąd płynący w obwodzie bazy tranzystora

prąd kolektora (ang. collector current) prąd płynący w obwodzie kolektora tranzystora

prędkość unoszenia (ang. drift velocity) średnia prędkość uporządkowanego przemieszczania się cząstki, która porusza się losowo

półprzewodnik (ang. semiconductor) materiał o stosunkowo niewielkiej przerwie energetycznej pomiędzy najwyższym zapełnionym pasmem a kolejnym dostępnym niezapełnionym pasmem energetycznym

półprzewodnik typu n (ang. n-type semiconductor) domieszkowany półprzewodnik, w którym głównie elektrony przewodzą prąd

półprzewodnik typu p (ang. p-type semiconductor) domieszkowany półprzewodnik, w którym głównie dziury przewodzą prąd

reguła wyboru (ang. selection rule) reguła, która ogranicza możliwe przejścia między jednym stanem kwantowym a drugim

rotacyjne poziomy energetyczne (ang. rotational energy levels) poziomy energetyczne związane z energią ruchu obrotowego cząsteczki

sieć (ang. lattice) regularne ułożenie atomów tworzące strukturę kryształu

stała Madelunga (ang. Madelung constant) stała zależna od geometrii kryształu, używana do określenia całkowitej energii potencjalnej jonu w krysztale

stała odpychania (ang. repulsion constant) parametr doświadczalny związany z siłą odpychania między jonami, gdy jony zbliżają się do siebie i zaczyna mieć znaczenie zakaz Pauliego

symetria wymiany (ang. exchange symmetry) informuje, jak zmienia się funkcja falowa przy zamianie dwóch elektronów

temperatura Fermiego (ang. Fermi temperature) efektywna temperatura elektronów o energiach równych energii Fermiego

temperatura krytyczna (ang. critical temperature) maksymalna temperatura, przy której występuje jeszcze nadprzewodnictwo

teoria BCS (ang. BCS theory) teoria nadprzewodnictwa oparta na koncepcji oddziaływania elektron–sieć–elektron

tranzystor złączowy (ang. junction transistor) elektryczny zawór oparty na układzie złączy p–n–p

wibracyjne poziomy energetyczne (ang. vibrational energy levels) poziomy energetyczne związane z energią drgań cząsteczki

wiązanie jonowe (ang. ionic bond) wiązanie utworzone przez przyciąganie Coulomba między dodatnimi i ujemnymi jonami

wiązanie kowalencyjne (ang. covalent bond) wiązanie powstałe poprzez uwspólnienie jednego lub większej liczby elektronów przez atomy

wiązanie van der Waalsa (ang. van der Waals bond) wiązanie utworzone przez przyciąganie dwóch spolaryzowanych elektrycznie cząsteczek

wzmacniacz (ang. amplifier) urządzenie elektryczne służące do wzmacniania sygnałów elektrycznych

złącze p–n (ang. p–n junction) złącze powstałe na styku dwóch półprzewodników typu p i typu n

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Energia elektrostatyczna przy równowagowej odległości między atomami	$E_{\text{Coul}} = -\frac{ke^2}{r_0}$
Zmiana energii towarzysząca formowaniu wiązania jonowego	$E_{\text{tworzenia}} = E_{\text{przejścia}} + E_{\text{Coul}} + E_{\text{odpychania}}$
Krytyczne pole magnetyczne nadprzewodnika	$B_{\text{c}}(T) = B_{\text{c}}(0\,\text{K}) \cdot \left[1 - \left(\frac{T}{T_{\text{c}}}\right)^2\right],$
Energia rotacyjna dwuatomowej cząsteczki	$E_{\text{r}} = l(l+1) \cdot \frac{\hbar^2}{2I}$
Charakterystyczna energia rotacyjna cząsteczki	$E_{0\text{r}} = \frac{\hbar^2}{2I}$
Energia potencjalna będąca skutkiem zakazu Pauliego	$E_{\text{odpychania}} = \frac{A}{r^n}$
Energia dysocjacji kryształu	$E_{\text{dysocjacji}} = \alpha \frac{ke^2}{r_0}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
Moment bezwładności cząsteczki dwuatomowej o masie zredukowanej μ	$I = \mu r_0^2$
Energia elektronu w metalu	$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \cdot \left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right)$
Gęstość stanów elektronów w metalu	$g(E) = \frac{\pi V}{2} \cdot \left(\frac{8m_{\text{e}}}{h^2}\right)^{3/2} E^{1/2}$
Energia Fermiego	$E_{\text{F}} = \frac{\hbar^2}{8m_{\text{e}}} \cdot \left(\frac{3N}{\pi V}\right)^{2/3}$
Temperatura Fermiego	$T_{\text{F}} = \frac{E_{\text{F}}}{k_{\text{B}}}$
Efekt Halla	$U_{\text{H}} = vBw$
Prąd zależny od napięcia w złączu p–n	$I_{\text{wyp}} = I_0 \cdot \left(e^{eU_{\text{b}}/(k_{\text{B}}T)} - 1\right)$
Zysk prądowy	$I_{\text{C}} = \beta I_{\text{B}}$
Reguła wyboru dla rotacyjnych przejść energetycznych	$\Delta l = \pm 1$
Reguła wyboru dla oscylacyjnych przejść energetycznych	$\Delta n = \pm 1$

PODSUMOWANIE

9.1 Rodzaje wiązań cząsteczkowych

- Cząsteczki tworzone są przez dwa główne typy wiązań: wiązanie jonowe i wiązanie kowalencyjne. W wiązaniu jonowym elektron jest przenoszony z jednego atomu na drugi, a w kowalencyjnym elektron jest dzielony (uwspólniany) między atomy.
- Na zmianę energii towarzyszącej wiązaniu jonowemu składają się trzy główne procesy: oderwanie elektronu z jednego atomu, przyłączenie elektronu do drugiego atomu, oddziaływanie kulombowskie powstałych jonów.
- Wiązanie kowalencyjne tworzone jest przez przestrzennie symetryczną funkcję falową.
- Wiązania atomów z cząsteczkami są opisywane przy pomocy kombinacji liniowych funkcji falowych (hybrydyzacja).

9.2 Widma cząsteczkowe

- Cząsteczki posiadają energię oscylacyjną i rotacyjną.
- Różnice energii między sąsiednimi poziomami oscylacyjnymi są większe niż między sąsiednimi poziomami rotacyjnymi.
- Odległość między pikami w widmie absorpcyjnym jest zależna od odwrotności momentu bezwładności.
- Przejścia między oscylacyjnymi i rotacyjnymi poziomami energetycznymi podlegają regułom wyboru.

9.3 Wiązania w ciałach stałych

- Struktury upakowania jonów w prostych kryształach jonowych soli to zwykle FCC i BCC.
- Gęstość kryształu związana jest z odwrotnością odległości równowagowej.
- Energia dysocjacji jest duża, jeśli odległość równowagowa jest mała.
- Gęstości i promienie równowagowe popularnych kryształów soli (FCC) są niemal takie same.

9.4 Model elektronów swobodnych w metalach

- Metale przewodzą prąd elektryczny, który tworzy wielka liczba przypadkowo zderzających się i niemal swobodnych elektronów.
- Dozwolone energie elektronów są skwantowane. Kwantowanie to ujawnia się w formie bardzo dużych energii elektronów, nawet w $T = 0\,\mathrm{K}$.
- Dozwolone energie elektronów w metalach związane są z masą elektronu oraz koncentracją elektronów w metalu.
- Gęstość stanów elektronowych w metalach rośnie z energią, ponieważ sposobów, na jakie elektron może zajmować stany o wyższej energii, jest więcej niż w przypadku stanów o niższej energii.
- Zakaz Pauliego mówi, że tylko dwa elektrony (o spinie w górę i spinie w dół) mogą zajmować stan na danym poziomie energetycznym. Dlatego elektrony zapełniają te poziomy energetyczne (od najniższego do najwyższego) w $T = 0\,\mathrm{K}$, a ostatni i najwyższy obsadzony poziom energii jest nazywany energią Fermiego.

9.5 Teoria pasmowa ciał stałych

- Poziomy energetyczne elektronów w krysztale można wyznaczyć, rozwiązując równanie Schrödingera dla periodycznego potencjału i przez analizę zmian elektronowej struktury energetycznej, gdy atomy zbliżają się do siebie z dużej odległości.
- Strukturę energetyczną kryształu tworzą pasma, wewnątrz których energia zmienia się w sposób ciągły, oraz przerwy energetyczne między tymi pasmami.
- Zdolność ciała do przewodzenia prądu zależy od jego struktury elektronowej.

9.6 Półprzewodniki i domieszkowanie

- Struktura energetyczna półprzewodnika może być modyfikowana poprzez zamianę części atomów w sieci innymi atomami (domieszkowanie).
- Domieszkowanie typu n powoduje powstanie nowych dozwolonych poziomów energetycznych tuż poniżej pasma przewodnictwa.
- Domieszkowanie typu p powoduje powstanie nowych dozwolonych poziomów energetycznych tuż powyżej pasma walencyjnego.
- Efekt Halla można wykorzystać do wyznaczenia ładunku, prędkości unoszenia i koncentracji nośników w półprzewodniku.

9.7 Przyrządy półprzewodnikowe

- Dioda półprzewodnikowa oparta jest na złączu n–p. Pozwala ona na przepływ prądu tylko w jednym kierunku. Przy polaryzacji w kierunku przewodzenia prąd rośnie wykładniczo z napięciem.
- Tranzystor wykorzystuje układ złączy n–p–n. Tranzystor jest zaworem elektrycznym, za pomocą którego można sterować prądem w obwodzie.
- Tranzystor jest kluczowym elementem składowym we wzmacniaczach dźwięku, komputerach i wielu innych urządzeniach.

9.8 Nadprzewodnictwo

- Nadprzewodnictwo charakteryzuje się dwiema cechami: przewodzeniem elektronów przy zerowej oporności i wypychaniem pola magnetycznego.
- Aby pojawiło się nadprzewodnictwo, potrzebna jest niska temperatura.
- Silne pole magnetyczne niszczy nadprzewodnictwo.

- Nadprzewodnictwo w nadprzewodnikach można wyjaśnić, używając koncepcji par Coopera.

PYTANIA

9.1 Rodzaje wiązań cząsteczkowych

1. Jakie są podstawowe różnice pomiędzy wiązaniem jonowym, wiązaniem kowalencyjnym i wiązaniem van der Waalsa?

2. Jakiego typu wiązań należy spodziewać się w przypadku
a. cząsteczki KCl;
b. cząsteczki N_2?

3. Opisz trzy kroki prowadzące do utworzenia wiązania jonowego.

4. Co powoduje, że odległość między jonami nie osiągnie zera?

5. Dlaczego w cząsteczce H_2 spiny elektronów muszą być antyrównoległe?

9.2 Widma cząsteczkowe

6. Czy widmo absorpcyjne cząsteczki dwuatomowej HCl zależy od tego, jaki izotop chloru wchodzi w skład cząsteczki? Wyjaśnij swoje rozumowanie.

7. Ustaw w kolejności od najmniejszej do największej energie (ΔE) odpowiadające przejściom kwantowym: elektronowym w atomie, rotacyjnym w cząsteczce, oscylacyjnym w cząsteczce.

8. Wyjaśnij podstawowe właściwości widma oscylacyjno-rotacyjnego cząsteczki dwuatomowej.

9.3 Wiązania w ciałach stałych

9. Dlaczego odległości równowagowe między jonami K^+ i Cl^- w krysztale KCl i w cząsteczce dwuatomowej różnią się?

10. Opisz różnicę między strukturami: regularną powierzchniowo centrowaną (FCC) i regularną przestrzennie centrowaną (BCC).

11. Ilu najbliższych sąsiadów Cl^- ma jon Na^+ w chlorku sodu? Ile jonów Na^+ należy do najbliższych sąsiadów jonu Cl^-?

12. W jodku cezu (CsI) ile jonów I^- należy do najbliższych sąsiadów jonu Cs^+, a ile jonów Cs^+ do najbliższych sąsiadów jonu I^-?

13. Kryształ NaCl ma strukturę FCC. Odległość równowagowa wynosi w przybliżeniu $r_0 = 0{,}282\,\text{nm}$. Gdyby każdy jon zajmował objętość sześcianu r_0^3, jaka byłaby odległość pomiędzy najbliższymi sąsiadami jonu Na^+?

9.4 Model elektronów swobodnych w metalach

14. Dlaczego energia Fermiego (E_F) jest tym większa, im większa jest liczba elektronów w metalu?

15. Jeśli koncentracja elektronów w metalu (N / V) wzrosłaby ośmiokrotnie, co się stanie z energią Fermiego (E_F)?

16. Dlaczego linia pozioma na Rysunku 9.12 nagle urywa się przy energii Fermiego?

17. Dlaczego krzywa na Rysunku 9.12 rośnie stopniowo od początku układu współrzędnych?

18. Dlaczego ostra zmiana czynnika Fermiego przy energii Fermiego „wygładza się” ze wzrostem temperatury?

9.5 Teoria pasmowa ciał stałych

19. Jakie są dwa podstawowe podejścia zmierzające do określenia poziomów energetycznych elektronów w krysztale?

20. Opisz dwie cechy poziomów elektronowych w krysztale.

21. Jaki jest związek liczby poziomów energetycznych w paśmie z liczbą atomów N w krysztale?

22. Dlaczego niektóre materiały są bardzo dobrymi przewodnikami prądu, a inne słabymi?

23. Dlaczego niektóre materiały są półprzewodnikami?

24. Dlaczego oporność półprzewodnika maleje, gdy temperatura rośnie?

9.6 Półprzewodniki i domieszkowanie

25. Jaki rodzaj półprzewodnika powstanie przez domieszkowanie germanu
a. arsenem;
b. galem?

26. Jaki rodzaj półprzewodnika powstaje, gdy krzem domieszkowany jest
a. fosforem;
b. indem?

27. Co to jest efekt Halla i do czego może być wykorzystany?

28. W jaki sposób atomy domieszki zmieniają strukturę energetyczną materiału w półprzewodniku typu n?

29. W jaki sposób atomy domieszki zmieniają strukturę energetyczną materiału w półprzewodniku typu p?

9.7 Przyrządy półprzewodnikowe

30. Gdy połączymy półprzewodnik typu p z półprzewodnikiem typu n w obszarze złącza powstaje jednorodne pole elektryczne. Dlaczego?

31. Dlaczego obszar zubożony powstający, gdy połączymy półprzewodnik typu p z półprzewodnikiem typu n, ma określoną szerokość?

32. Skąd wiadomo, że dioda jest spolaryzowana w kierunku przewodzenia?

33. Dlaczego przy polaryzacji w kierunku zaporowym prąd jest bardzo mały?

34. Co się dzieje w sytuacji ekstremalnej, gdy materiały typu n i typu p tworzące złącze są mocno domieszkowane?

35. Wyjaśnij zasadę działania wzmacniacza akustycznego opartego na tranzystorze.

9.8 Nadprzewodnictwo

36. Opisz dwie główne cechy nadprzewodników.

37. W jaki sposób teoria BCS wyjaśnia nadprzewodnictwo?

38. Co to jest efekt Meissnera?

39. Jaki wpływ na temperaturę krytyczną nadprzewodnika ma rosnące pole magnetyczne?

ZADANIA

9.1 Rodzaje wiązań cząsteczkowych

40. Konfiguracja elektronowa węgla ma postać $1s^2 2s^2 2p^2$. Biorąc pod uwagę tę konfigurację, określ, jaki inny pierwiastek może wykazywać taki sam typ hybrydyzacji jak węgiel.

41. Chlorek potasu jest cząsteczką utworzoną przez wiązanie jonowe. Odległość równowagowa wynosi $r_0 = 0{,}279\,\mathrm{nm}$. Wyznacz elektrostatyczną energię potencjalną jonów.

42. Powinowactwo elektronowe Cl wynosi $3{,}89\,\mathrm{eV}$, a energia jonizacji K $4{,}34\,\mathrm{eV}$. Korzystając z poprzedniego rozwiązania, wyznacz energię dysocjacji (pomiń energię odpychania jonów).

43. Zmierzona energia dysocjacji KCl wynosi $4{,}43\,\mathrm{eV}$. Wykorzystaj wynik poprzedniego zadania, żeby wyznaczyć energię odpychania jonów spowodowaną zakazem Pauliego.

9.2 Widma cząsteczkowe

44. W laboratorium fizycznym zmierzyłeś widmo oscylacyjno-rotacyjne chlorku wodoru (HCl). Oszacowana odległość między pikami absorpcji wynosi $\Delta f \approx 5{,}5 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Hz}$. Częstość centralna pasma wynosi natomiast $f_0 = 9 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Hz}$.
a. Jaki jest moment bezwładności cząsteczki (I)?
b. Jaka jest jej energia oscylacji?

45. Wyznacz odległość równowagową między atomami H a Cl z poprzedniego zadania. Porównaj wynik z wartością rzeczywistą.

46. Odległość między atomami tlenu w cząsteczce O_2 wynosi około $0{,}121\,\mathrm{nm}$. Wyznacz charakterystyczną energię rotacji w eV.

47. Energia charakterystyczna rotacji cząsteczki N_2 wynosi $2{,}48 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$. Wyznacz odległość między atomami azotu.

48. Energia charakterystyczna rotacji w cząsteczce KCl wynosi $1{,}4 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}$.
a. Wyznacz masę zredukowaną μ cząsteczki KCl.
b. Znajdź odległość między atomami K i Cl.

49. Cząsteczka dwuatomowa F_2 znajduje się w stanie rotacyjnym $l = 1$.
a. Jaka jest energia rotacyjna cząsteczki?
b. Jaka jest energia promieniowania emitowanego przy przejściu ze stanu $l = 2$ do stanu $l = 1$?

50. W laboratorium fizycznym zmierzyłeś widmo oscylacyjno-rotacyjne bromku potasu (KBr). Oszacowana odległość między pikami absorpcji wynosi $\Delta f \approx 5{,}35 \cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz}$. Częstość centralna pasma wynosi natomiast $f_0 = 8{,}75 \cdot 10^{12}\,\mathrm{Hz}$.
a. Jaki jest moment bezwładności cząsteczki (I)?
b. Jaka jest jej energia oscylacji?

9.3 Wiązania w ciałach stałych

51. Kryształ CsI ma strukturę BCC. Odległość równowagowa wynosi w przybliżeniu $r_0 = 0{,}46\,\mathrm{nm}$. Gdyby jon Cs zajmował objętość sześcianu r_0^3, jaka byłaby odle-

głość tego jonu do najbliższego sąsiada, jonu I^+?

52. Energia potencjalna pewnego kryształu wynosi $-8{,}1\,\mathrm{eV}\,/\,\text{para jonów}$. Wyznacz energię dysocjacji czterech moli tego kryształu.

53. Zmierzona gęstość kryształu NaF wynosi $2{,}558\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{cm}^3$. Jaka jest odległość równowagowa między jonami Na^+ i Fl^-?

54. Jaka wartość stałej odpychania n dla kryształu NaF da uzyskaną z eksperymentu energię dysocjacji równą $221\,\mathrm{kcal}\,/\,\mathrm{mol}$?

55. Wyznacz energię dysocjacji 12 moli chlorku sodu (NaCl). Wskazówka: Stała odpychania n ma wartość w przybliżeniu 8.

56. Zmierzona gęstość kryształu KCl wynosi $1{,}984\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{cm}^3$. Jaka jest odległość równowagowa między jonami K^+ i Cl^-?

57. Jaka wartość stałej odpychania n dla kryształu KCl da energię dysocjacji równą $171\,\mathrm{kcal}\,/\,\mathrm{mol}$?

58. Zmierzona gęstość kryształu CsCl wynosi $3{,}988\,\mathrm{g}\,/\,\mathrm{cm}^3$. Jaka jest odległość równowagowa między jonami Cs^+ i Cl^-?

9.4 Model elektronów swobodnych w metalach

59. a. Jaka jest różnica energii między stanami $n_x = n_y = n_z = 4$ i kolejnym wyższym? Ile wynosi procentowa zmiana energii między nimi?
b. Porównaj ten wynik z różnicą energii i procentową zmianą energii między stanami $n_x = n_y = n_z = 400$ i kolejnym wyższym.

60. Elektron znajduje się w sześciennej kostce metalu o długości krawędzi $l = 0{,}8\,\mathrm{cm}$. Wyznacz gęstość stanów dla
a. $E = 0{,}8\,\mathrm{eV}$;
b. $E = 2{,}2\,\mathrm{eV}$;
c. $E = 5\,\mathrm{eV}$.

61. Dla jakiej energii gęstość stanów wynosi $1{,}1 \cdot 10^{24}\,\mathrm{eV}^{-1}$?

62. Porównaj gęstość stanów dla $2{,}5\,\mathrm{eV}$ i $0{,}25\,\mathrm{eV}$.

63. Rozważ sześcienną kostkę miedzi o krawędzi $1{,}5\,\mathrm{mm}$. Oszacuj liczbę stanów elektronowych w tej kostce, których energia znajduje się w przedziale $3{,}75\,\mathrm{eV}$ do $3{,}77\,\mathrm{eV}$.

64. Jeśli układ swobodnych elektronów tworzy jeden elektron z jednego atomu miedzi, to jaka jest gęstość elektronów w tym metalu?

65. Wyznacz energię i temperaturę Fermiego dla miedzi, zakładając $T = 0\,\mathrm{K}$.

9.5 Teoria pasmowa ciał stałych

66. W krysztale jednowymiarowym wyraź stałą sieci (a) za pomocą długości fali elektronowej.

67. Jaka jest podstawowa różnica między izolatorem a półprzewodnikiem?

68. Jaka jest największa możliwa długość fali fotonu, który mógłby wzbudzić elektron z pasma walencyjnego do pasma przewodnictwa, jeśli przerwa energetyczna wynosi $0{,}8\,\mathrm{eV}$?

69. Elektron z pasma walencyjnego w pewnym krysztale absorbuje foton o długości fali $\lambda = 0{,}3\,\mathrm{nm}$. Energia tego fotonu zaledwie wystarcza, aby elektron przeskoczył z pasma walencyjnego do przewodnictwa. Jaka jest wartość przerwy energetycznej?

9.6 Półprzewodniki i domieszkowanie

70. Wykonano eksperyment, aby zademonstrować efekt Halla. Cienką prostokątną płytkę półprzewodnika o szerokości $10\,\mathrm{cm}$ i długości $30\,\mathrm{cm}$ przyłączono do baterii i umieszczono w polu magnetycznym $1{,}5\,\mathrm{T}$ prostopadłym do powierzchni płytki. Powstało napięcie Halla o wartości $12\,\mathrm{V}$. Jaka była prędkość unoszenia nośników ładunku?

71. Przyjmij, że pole przekroju poprzecznego płytki z poprzedniego zadania (przekroju prostopadłego do prądu elektrycznego) wynosi $1\,\mathrm{mm}^2$, a zmierzony niezależnie prąd ma wartość $2\,\mathrm{mA}$. Jaka jest koncentracja nośników ładunku?

72. W miedzianym drucie o polu powierzchni przekroju poprzecznego $\sigma = 2\,\mathrm{mm}^2$ płynie prąd elektryczny. Jeśli prędkość unoszenia wynosi $0{,}02\,\mathrm{cm}\,/\,\mathrm{s}$, to jaki jest całkowity prąd płynący przez drut?

73. W laboratorium zademonstrowano efekt Halla. Cienką prostokątną płytkę półprzewodnika o szerokości $5\,\mathrm{cm}$ i polu powierzchni przekroju poprzecznego $2\,\mathrm{mm}^2$ przyłączono do baterii i umieszczono w polu magnetycznym prostopadłym do powierzchni płytki. Powstało napięcie Halla o wartości $12{,}5\,\mathrm{V}$, a zmierzona prędkość unoszenia nośników wynosiła $50\,\mathrm{m}\,/\,\mathrm{s}$. Jaka była wartość indukcji pola magnetycznego?

9.7 Przyrządy półprzewodnikowe

74. Pokaż, że dla ujemnego napięcia U (czyli w kierunku zaporowym) $I_{\mathrm{wyp}} \approx -I_0$.

75. W pewnej diodzie p–n prąd nasycenia w kierunku zaporowym wynosi $1{,}44 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A}$. Dioda ta została spo-

laryzowana w kierunku przewodzenia, co spowodowało przepływ prądu $0{,}678\,\mathrm{A}$. Jakie było napięcie polaryzacji, jeśli temperatura diody wynosiła $300\,\mathrm{K}$?

76. Prąd kolektora pewnego tranzystora wynosi $3{,}4\,\mathrm{A}$, przy prądzie bazy $4{,}2\,\mathrm{mA}$. Jaki jest zysk prądowy tego tranzystora?

77. Po przyłączeniu bieguna dodatniego baterii do strony p, a ujemnego do strony n pewnego złącza p–n zmierzono prąd $0{,}876\,\mathrm{A}$. Po odwróceniu polaryzacji uzyskano prąd nasycenia $4{,}41 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{A}$. Jaka była temperatura złącza, jeśli napięcie wynosiło $1{,}2\,\mathrm{V}$?

78. Prąd bazy pewnego tranzystora wynosi $4{,}4\,\mathrm{A}$, a zysk prądowy 1126. Jaki jest prąd kolektora?

9.8 Nadprzewodnictwo

79. W jakiej temperaturze względem T_c krytyczne pole magnetyczne nadprzewodnika równe jest połowie krytycznego pola w $T = 0\,\mathrm{K}$?

80. Ile wynosi krytyczne pole magnetyczne dla ołowiu w $T = 2{,}8\,\mathrm{K}$?

81. Przewód wykonany z ołowiu został ciasno zwinięty w solenoid o średnicy $4\,\mathrm{mm}$ i schłodzony do temperatury $5\,\mathrm{K}$. Przewód połączono szeregowo z opornikiem $50\,\Omega$ i z regulowanym źródłem siły elektromotorycznej. Jeśli będziemy zwiększali siłę elektromotoryczną, to przy jakiej wartości nastąpi zniszczenie stanu nadprzewodzącego?

82. Temperatura ciasno nawiniętego solenoidu o długości $50\,\mathrm{cm}$ wynosi $4\,\mathrm{K}$. Solenoid został wykonany z przewodu Nb o promieniu $1{,}5\,\mathrm{mm}$. Jaki maksymalny prąd może popłynąć przez przewód, aby pozostał on jeszcze nadprzewodzący?

ZADANIA DODATKOWE

83. Fluorek potasu (KF) jest cząsteczką uformowaną przez wiązanie jonowe. W położeniu równowagowym atomy są oddalone od siebie o $r_0 = 0{,}255\,\mathrm{nm}$. Wyznacz elektrostatyczną energię potencjalną atomów. Powinowactwo elektronowe F wynosi $3{,}4\,\mathrm{eV}$, a energia jonizacji K $4{,}34\,\mathrm{eV}$. Wyznacz energię dysocjacji (pomiń energię odpychania).

84. Do poprzedniego zadania naszkicuj wykres energii potencjalnej w zależności od odległości dla wiązania jonów K^+ i K^-.

a. Zaznacz na wykresie energię potrzebną do przeniesienia elektronu z K do F.

b. Zaznacz na wykresie energię dysocjacji.

85. Odległość między atomami wodoru w cząsteczce H_2 wynosi ok. $0{,}075\,\mathrm{nm}$. Wyznacz charakterystyczną energię rotacji w eV.

86. Charakterystyczna energia rotacji cząsteczki Cl_2 wynosi $2{,}95 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{eV}$. Wyznacz odległość między atomami chloru.

87. Wyznacz trzy najniższe rotacyjne poziomy energetyczne cząsteczki H_2.

88. Atom węgla może hybrydyzować w konfiguracji sp^2. Jaki jest kąt między takimi orbitalami?

89. Wymień pięć cech kryształów jonowych, które wynikają z dużej energii dysocjacji.

90. Dlaczego wiązanie w H_2^+ jest preferowane? W odpowiedzi użyj argumentu związanego z symetrią elektronowej funkcji falowej.

91. Astronomowie twierdzą, że zmierzone widma światła pewnej odległej gwiazdy stanowią dowód istnienia He_2. Czy wierzysz im?

92. Pokaż, że moment bezwładności cząsteczki dwuatomowej dany jest formułą $I = \mu r_0^2$, gdzie μ jest masą zredukowaną, a r_0 odległością między masami.

93. Pokaż, że średnia energia elektronu w jednowymiarowym metalu jest związana z energią Fermiego równaniem $\overline{E} = E_F / 2$.

94. Wyniki pomiarów krytycznego pola magnetycznego (w T) w pewnym nadprzewodniku w różnych temperaturach (w K) podane są poniżej. Użyj linii najlepszego dopasaowania, aby wyznaczyć $B_c\,(0\,\mathrm{K})$. Załóż $T_c = 9{,}3\,\mathrm{K}$.

T (K)	B_c (T)
3	0,18
4	0,16
5	0,14
6	0,12
7	0,09
8	0,05
9	0,01

Tabela 9.6

95. Oszacuj, jaka część atomów Si musi być zastąpiona atomami As, aby uformował się poziom domieszkowy.

96. W widmie rotacyjnym zmierzonym w temperaturze pokojowej $(T = 300\,\mathrm{K})$ zaobserwowano przejście. Twój partner w laboratorium twierdzi, że pik w widmie odpowiada przejściu ze stanu $l = 4$ do stanu $l = 1$. Czy to jest możliwe? Jeśli tak, wyznacz moment bezwładności cząsteczki.

97. Wyznacz energie Fermiego dla
a. Mg;
b. Na;
c. Zn.

98. Znajdź średnią energię elektronu w przewodzie Zn.

99. Jaka wartość stałej odpychania n w CsCl daje energię dysocjacji równą wartości zmierzonej: $158\,\mathrm{kcal} \,/\, \mathrm{mol}$?

100. Pewien model fizyczny diamentu sugeruje strukturę upakowania BCC. Dlaczego to nie jest możliwe?

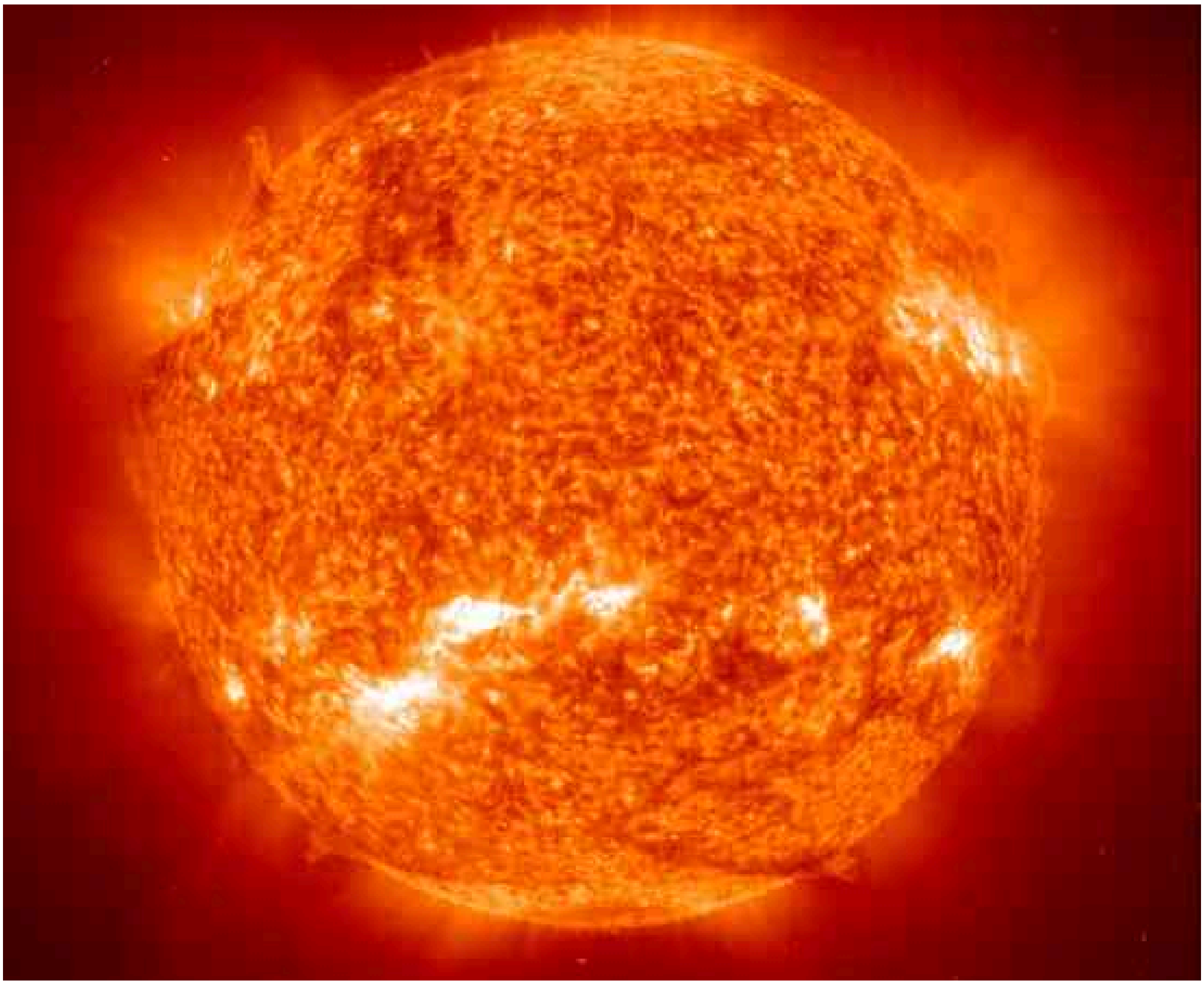
ZADANIA TRUDNIEJSZE

101. Pokaż, że średnia energia elektronu w trójwymiarowym metalu dana jest formułą

$$\overline{E} = 1 \,/\, N \cdot \int_0^{E_\mathrm{F}} E \cdot g\,(E)\,\mathrm{d}E = 3E_\mathrm{F} \,/\, 5,$$

gdzie N jest całkowitą liczbą elektronów w metalu.

10 | FIZYKA JĄDROWA



Rysunek 10.1 Źródłem energii Słońca jest synteza jądrowa w jego rdzeniu. We wnętrzu Słońca około 10^{38} protonów na sekundę łączonych jest w jądra helu w temperaturze około 14 mln K. Proces ten uwalnia energię w postaci fotonów, neutrin i innych cząstek. Źródło: modyfikacja pracy konsorcjum SOHO EIT, ESA, NASA

Treść rozdziału

Wstęp

W tym rozdziale zajmiemy się składem i właściwościami jądra atomowego. Jądro znajduje się w środku atomu i składa się z protonów i neutronów. Głębokie zrozumienie fizyki jądrowej umożliwia rozwój wielu ważnych technologii, w tym urządzeń do datowania skał, badania topografii galaktyki Drogi Mlecznej i wytwarzania energii elektrycznej.

Słońce jest głównym źródłem energii w Układzie Słonecznym. Średnica Słońca równa jest około 109 średnicom

Ziemi, a jego masa stanowi więcej niż 99% całkowitej masy Układu Słonecznego. Słońce świeci dzięki syntezie helu z jąder wodoru – protonów – zachodzącej głęboko w jego wnętrzu. Po wyczerpaniu tego paliwa Słońce będzie spalać hel, a później inne jądra. Synteza jądrowa w Słońcu jest omawiana pod koniec tego rozdziału. Tymczasem zajmiemy się właściwościami jąder atomowych, które decydują o wszystkich procesach zachodzących w jądrze, w tym o syntezie jądrowej.

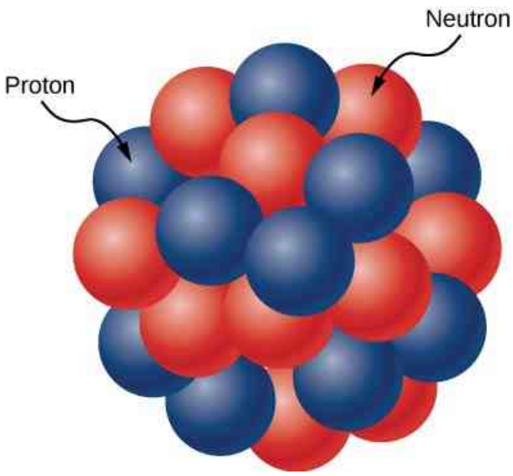
10.1 | Własności jądra atomowego

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać budowę i wielkość jądra atomowego;
- opisywać skład jądra atomowego;
- wyjaśniać, dlaczego w ciężkich jądrach liczba neutronów jest większa niż liczba protonów;
- obliczać masę molową danego pierwiastka, znając jego izotopy.

Jądro atomowe (ang. **atomic nucleus**) składa się z **protonów** i **neutronów** (Rysunek 10.2). Jedynym wyjątkiem jest izotop wodoru (prot), który posiada jedynie proton otoczony elektronami. Protony i neutrony mają w przybliżeniu taką samą masę, ale te pierwsze są obdarzone dodatnim ładunkiem elektrycznym ($+e$), podczas gdy drugie nie posiadają ładunku. Cząstki te są gęsto upakowane w bardzo małej objętości w środku atomu. Wyniki doświadczeń rozproszeniowych wskazują, że jądra mają kształt kulisty lub elipsoidalny, a ich wielkość to około $1\ /\ 100\,000$ średnicy atomu wodoru. Gdyby atom był wielkości boiska piłkarskiego, to jądro miałoby mniej więcej rozmiary główki od szpilki. Protony i neutrony w jądrze nazywane są **nukleonami** (ang. **nucleons**).



Rysunek 10.2 Jądro atomowe składa się z protonów i neutronów. Protony są przedstawione w kolorze niebieskim, a neutrony – w kolorze czerwonym.

Liczba nukleonów

Liczbę protonów w jądrze określa **liczba atomowa** Z (ang. **atomic number**), natomiast o liczbie neutronów informuje **liczba neutronowa** N (ang. **neutron number**). Całkowita liczba nukleonów w jądrze to **liczba masowa** A (ang. **mass number**). Liczby te są powiązane relacją

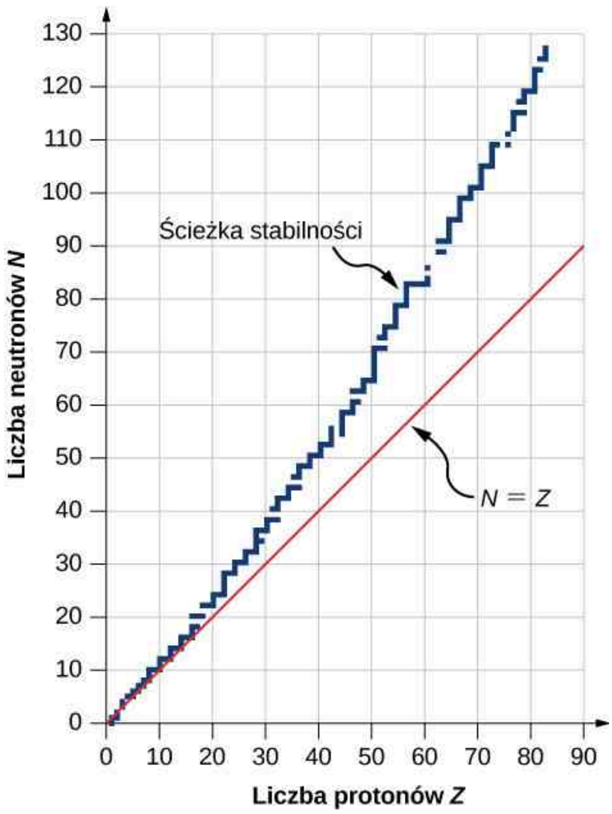
$$A = Z + N. \tag{10.1}$$

Określony rodzaj jądra o danej liczbie protonów i neutronów nazywa się **nuklidem** (ang. **nuclide**), podobnie jak słowem „pierwiastek” opisujemy pewien rodzaj atomu. Jądro (nuklid) reprezentuje symbol

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X}, \tag{10.2} $$

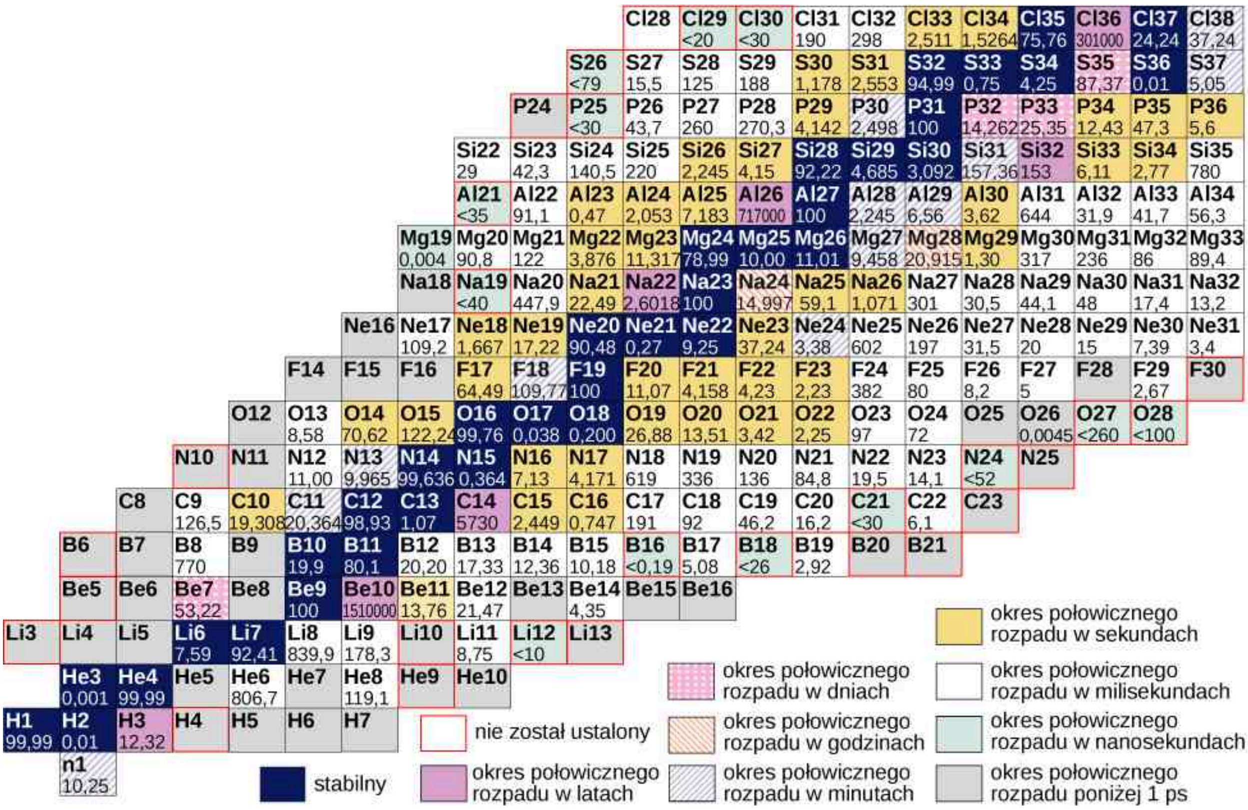
gdzie X jest symbolem pierwiastka chemicznego, A jest liczbą masową, a Z liczbą atomową. Na przykład ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ to symboliczny zapis jądra węgla z 6 protonami i 6 neutronami (czyli łącznie 12 nukleonami).

Graficzną reprezentację liczby neutronów N w zależności od liczby protonów Z dla szeregu stabilnych jąder (nuklidów) przedstawiono na Rysunku 10.3. Dla danej wartości Z istnieje wiele wartości N (niebieskie punkty). Dla małych wartości Z liczba neutronów jest równa liczbie protonów ($N = Z$), a punkty reprezentujące te nuklidy układają się wzdłuż czerwonej linii. Dla dużych wartości Z liczba neutronów jest większa niż liczba protonów ($N > Z$), a punkty reprezentujące nuklidy leżą powyżej czerwonej linii.



Rysunek 10.3 Wykres przedstawia liczbę neutronów N w zależności od liczby protonów Z dla stabilnych jąder atomowych. Większe jądra mają więcej neutronów niż protonów.

Rozszerzoną wersją tego wykresu jest tablica, która zawiera bardziej szczegółowe informacje dotyczące każdego nuklidu (Rysunek 10.4). Taki diagram nazywamy **tabelą nuklidów** (ang. **chart of the nuclides**) – każda komórka reprezentuje jeden nuklid. Nuklidy są ułożone według rosnącej wartości Z (w kierunku poziomym) i rosnącej wartości N (w kierunku pionowym).



Rysunek 10.4 Fragment tabeli nuklidów. Dla stabilnych jąder (ciemnoniebieskie tło) wartości w komórce reprezentują procentową zawartość danego nuklidu w pierwiastku naturalnie występującym na Ziemi (zawartość naturalna). W przypadku jąder niestabilnych podana liczba wskazuje okres połowicznego rozpadu w jednostkach zależnych od koloru tła.

Atomy, które zawierają jądra o tej samej liczbie protonów (Z) i różnej liczbie neutronów (N), są nazywane **izotopami** (ang. **isotopes**). Przykładowo wodór posiada trzy izotopy: prot (jeden proton, brak neutronów), **deuter** (jeden proton i jeden neutron) oraz **tryt** (jeden proton i dwa neutrony). Izotopy danego atomu mają takie same właściwości chemiczne, ponieważ właściwości te determinuje struktura elektronowa atomu, a nie konfiguracja nukleonów. Dla przykładu – woda, która zawiera deuter zamiast wodoru („ciężka woda”), wygląda i smakuje jak normalna woda. Procentową zawartość danego nuklidu w pierwiastku naturalnie występującym na Ziemi nazywamy **zawartością naturalną** (ang. **natural abundance**). W poniższej tabeli przedstawiono listę często spotykanych izotopów.

Pierwiastek	Symbol	Liczba masowa	Masa (w jednostkach masy atomowej)	Zawartość (%)[1]	Okres połowicznego rozpadu [2]
wodór	H	1	1,0078	99,99	stabilny
	^{2}H czyli D	2	2,0141	0,01	stabilny
	^{3}H czyli T	3	3,0160	-	12,32 roku
węgiel	^{12}C	12	12,0000	98,91	stabilny
	^{13}C	13	13,0034	1,1	stabilny
	^{14}C	14	14,0032	-	5730 lat
azot	^{14}N	14	14,0031	99,6	stabilny

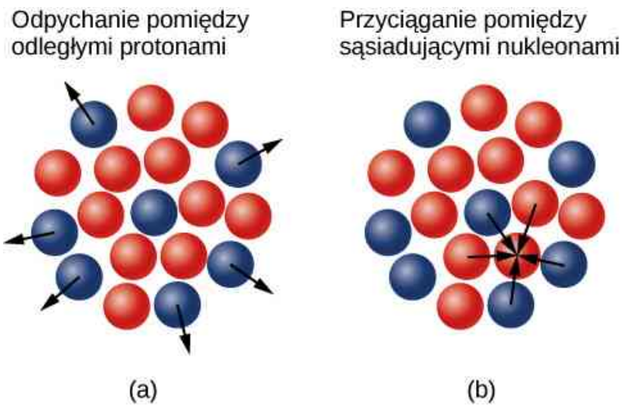
Tabela 10.1 Często spotykane izotopy.

1. Brak wartości, jeśli mniej niż $0,001\%$ (śladowe ilości).
2. Stabilność oznacza brak wykrywalnego promieniowania.

Pierwiastek	Symbol	Liczba masowa	Masa (w jednostkach masy atomowej)	Zawartość (%)	Okres połowicznego rozpadu
	^{15}N	15	15,0001	0,4	stabilny
	^{16}N	16	16,0061	-	7,13 s
tlen	^{16}O	16	15,9949	99,76	stabilny
	^{17}O	17	16,9991	0,04	stabilny
	^{18}O	18	17,9992	0,2	stabilny
	^{19}O	19	19,0035	-	26,46 s

Tabela 10.1 Często spotykane izotopy.

Dlaczego liczba neutronów przewyższa liczbę protonów w cięższych jądrach? Odpowiedź na to pytanie wymaga zrozumienia sił wewnątrz jądra (Rysunek 10.5). Występują tam dwa rodzaje oddziaływań: (1) dalekozasięgowa siła elektrostatyczna (Coulomba), która sprawia, że dodatnio naładowane protony odpychają się nawzajem; (2) krótkozasięgowe **silne oddziaływanie jądrowe** (ang. **strong nuclear force**), które sprawia, że wszystkie nukleony w jądrze się przyciągają. Być może wiesz jeszcze o istnieniu słabych oddziaływań jądrowych. Odpowiadają one za niektóre procesy rozpadów jądrowych, ale - jak sama nazwa wskazuje - nie są w stanie zrównoważyć występującego w nich silnego odpychania kulombowskiego. Silne oddziaływania jądrowe opiszemy bardziej szczegółowo w następnym rozdziale, gdzie będziemy mówić o fizyce cząstek elementarnych. Jądro jest stabilne, gdy siły przyciągania między nukleonami równoważą dalekozasięgowe odpychające siły elektrostatyczne między protonami w jądrze. Dla ciężkich jąder zrównoważenie odpychania elektrostatycznego, dążącego do rozerwania jądra, wymaga większej liczby neutronów (Rysunek 10.3).



Rysunek 10.5 (a) Siły elektrostatyczne działające na protony w jądrze mają charakter odpychający i daleki zasięg oddziaływania. Strzałki przedstawiają skierowane na zewnątrz siły działające na protony (niebieskie) na powierzchni jądra, pochodzące od protonu (również w kolorze niebieskim) położonego w środku jądra. (b) Silne oddziaływanie jądrowe ma miejsce między sąsiednimi nukleonami. Strzałki przedstawiają siły przyciągania, których źródłem jest neutron (czerwony) na jego najbliższych sąsiadów.

Gdy pierwiastek ma kilka stabilnych izotopów, musimy zachować szczególną ostrożność przy podawaniu jego **masy molowej** (ang. **molar mass**), czyli masy jednego mola atomów. Przykładowo miedź (Cu) jest mieszaniną dwóch izotopów stabilnych

$$^{63}_{29}\mathrm{Cu} \quad (62{,}929\,595\,\mathrm{g}\ /\ \mathrm{mol})\ \text{o zawartości}\ 69{,}09\,\%\ \text{w mieszaninie,}$$

$$^{65}_{29}\mathrm{Cu} \quad (64{,}927\,786\,\mathrm{g}\ /\ \mathrm{mol})\ \text{o zawartości}\ 30{,}91\%.$$

Masa molowa pierwiastka jest zdefiniowana jako średnia ważona mas molowych jego izotopów. Tak więc masa molowa Cu wynosi $m_{\mathrm{Cu}} = 62{,}929\,595\,\mathrm{g}\ /\ \mathrm{mol} \cdot 0{,}6909 + 64{,}927\,786\,\mathrm{g}\ /\ \mathrm{mol} \cdot 0{,}3091 = 63{,}55\,\mathrm{g}\ /\ \mathrm{mol}$. Masę pojedynczego atomu (**masę atomową**, ang. **atomic mass**) lub jądra często wyraża się w **jednostkach masy atomowej**

(ang. **atomic mass unit**), oznaczanych u, przy czym $1\,u = 1{,}660\,54 \cdot 10^{-27}\ kg$. Jednostka masy atomowej jest zdefiniowana jako $1\,/\,12$ masy atomu ^{12}C. W jednostkach masy atomowej masa jądra helu ($A = 4$) wynosi około $4\,u$. Jądro helu, składające się z dwóch protonów i dwóch neutronów, jest również nazywane cząstką alfa (α).

Wielkość jądra

Najprostszym modelem jądra jest gęsto upakowana kula złożona z nukleonów. Objętość jądra V jest więc proporcjonalna do liczby nukleonów A, czyli

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = kA,$$

gdzie r jest **promieniem jądra** (ang. **radius of a nucleus**), a k stałą o wymiarze objętości. Rozwiązując to równanie względem r, uzyskamy

$$r = r_0 A^{1/3}, \tag{10.3}$$

gdzie r_0 jest pewną stałą o wymiarze długości. Dla wodoru ($A = 1$) r_0 odpowiada promieniowi pojedynczego protonu. Eksperymenty rozproszeniowe potwierdzają ten ogólny związek dla wielu jąder i wskazują, że neutrony mają promień bardzo zbliżony do promienia protonów. Eksperymentalnie mierzona wartość r_0 wynosi około 1,2 femtometra (przypomnijmy, że $1\ fm = 10^{-15}\ m$).

Przykład 10.1

Jądro żelaza

Obliczmy

a. promień r;

b. przybliżoną gęstość ρ

jądra ^{56}Fe. Przyjmijmy, że masa jądra ^{56}Fe wynosi około $56\,u$.

Strategia rozwiązania

a. Wyliczenie promienia ^{56}Fe to proste zastosowanie wzoru $r = r_0 A^{1/3}$.

b. Aby określić przybliżoną gęstość tego jądra, zakładamy, że jest ono kuliste. Obliczamy objętość za pomocą promienia znalezionego w punkcie (a), a następnie wyliczamy jego gęstość ze wzoru $\rho = m\,/\,V$.

Rozwiązanie

a. Promień jądra jest dany wzorem

$$r = r_0 A^{1/3}.$$

Podstawienie wartości r_0 i A daje

$$r = 1{,}2 fm \cdot 56^{1/3} = 1{,}2 fm \cdot 3{,}83 = 4{,}6\ fm.$$

b. Gęstość jest zdefiniowana jako $\rho = m\,/\,V$, co dla kuli o promieniu r daje

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{4\,/\,3 \cdot \pi r^3}.$$

Podstawienie znanych wartości daje

$$\rho = \frac{56\,u}{1{,}33 \cdot 3{,}14 \cdot (4{,}6\,fm)^3} = 0{,}138\,u\,\big/\,fm^3.$$

$$\rho = 0{,}138\,\mathrm{u} \,/\, \mathrm{fm}^3 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg} \,/\, \mathrm{u} \cdot \left(\frac{1\,\mathrm{fm}}{10^{-15}\,\mathrm{m}}\right)^3 = 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\mathrm{kg} \,/\, \mathrm{m}^3.$$

Znaczenie

a. Okazuje się, że promień jądra ^{56}Fe jest równy około $5\,\mathrm{fm}$, więc jego średnica wynosi około $10\,\mathrm{fm}$, czyli 10^{-14} m. We wcześniejszym omówieniu eksperymentów rozpraszania Rutherforda średnicę lekkiego jądra oszacowano na 10^{-15} m. W związku z tym obecny wynik uzyskany dla jądra średniej wielkości wydaje się prawdopodobny.

b. Wyliczona tutaj wartość gęstości wydaje się nieprawdopodobnie wielka. Jest ona jednak zgodna z wcześniejszym stwierdzeniem, że jądro skupia prawie całą masę atomu w bardzo małej objętości. $1\,\mathrm{m}^3$ materii jądrowej ma taką samą masę jak sześcian wody o krawędzi $61\,\mathrm{km}$.

10.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jądro X jest dwa razy większe od jądra Y. Jaki jest stosunek liczb masowych tych jąder?

10.2 | Energia wiązania jądra

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- obliczać defekt masy i energię wiązania dla różnych jąder;
- używać wykresu zależności energii wiązania na nukleon (EWN) od liczby masowej (A) w celu określenia względnej stabilności jądra;
- porównywać energię wiązania nukleonu w jądrze z energią jonizacji atomu.

Siły wiążące nukleony w jądrze atomowym są znacznie większe niż te, które wiążą elektron w atomie przez przyciąganie elektrostatyczne. Jest to oczywiste, jeśli wziąć pod uwagę względne rozmiary jądra atomowego i całego atomu (odpowiednio 10^{-15} m i 10^{-10} m). Energia konieczna do odłączenia nukleonu od jądra jest zatem znacznie większa niż energia wymagana do usunięcia elektronu z atomu (czyli do jonizacji). Ogólnie rzecz biorąc, każda zmiana stanu jądra wiąże się ze znaczną zmianą energii przypadającą na każdą cząstkę biorącą udział w procesie. Ma to wiele praktycznych konsekwencji.

Defekt masy

Wyniki eksperymentów dotyczących cząstek tworzących jądro wskazują, że całkowita masa jądra (m_j) jest mniejsza niż suma mas składających się na nie nukleonów (protonów i neutronów), $m_\mathrm{j} < Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n}$. Różnica mas, czyli **defekt masy** (ang. **mass defect**), jest dana przez

$$\Delta m = Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n} - m_\mathrm{j}, \tag{10.4}$$

gdzie Zm_p jest całkowitą masą protonów, $(A - Z)m_\mathrm{n}$ całkowitą masą neutronów, a m_j to masa jądra. Według szczególnej teorii względności Einsteina masa jest miarą całkowitej energii układu ($E = m_\mathrm{j}c^2$). Oznacza to, że całkowita energia jądra jest mniejsza niż suma energii tworzących je nukleonów. Utworzenie jądra z pewnej liczby swobodnych protonów i neutronów jest wobec tego reakcją egzotermiczną, co oznacza, że uwalniana jest energia. Energia wyemitowana (wypromieniowana) w tym procesie wynosi Δmc^2.

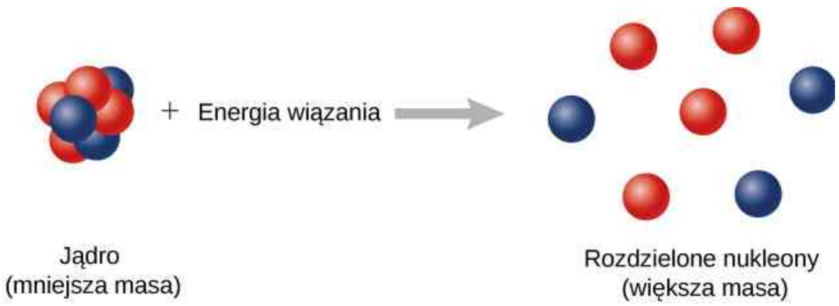
Teraz wyobraźmy sobie, że proces przebiega w odwrotnym kierunku. Zamiast tworzyć jądro, dostarczamy do układu energię, by je rozbić na poszczególne nukleony (Rysunek 10.6). Ilość niezbędnej do tego energii nazywa się całkowitą **energią wiązania** (ang. **binding energy**), E_w.

Energia wiązania

Energia wiązania jest równa ilości energii uwalnianej w procesie tworzenia jądra i wyraża się równaniem

$$E_\mathrm{w} = \Delta mc^2. \tag{10.5}$$

Wyniki doświadczalne wskazują, że energia wiązania dla jądra o liczbie masowej $A > 8$ jest w przybliżeniu proporcjonalna do całkowitej liczby nukleonów znajdujących się w jądrze (A). Na przykład energia wiązania jądra magnezu ($^{24}\mathrm{Mg}$) jest blisko dwa razy większa niż jądra węgla ($^{12}\mathrm{C}$).



Rysunek 10.6 Energia wiązania to energia niezbędna do rozłożenia jądra na tworzące je protony i neutrony. Układ odseparowanych nukleonów ma większą masę niż układ nukleonów związanych.

Przykład 10.2

Defekt masy i energia wiązania jądra deuteru (deuteronu)

Obliczmy defekt masy i energię wiązania deuteronu. Masa deuteronu wynosi $m_\mathrm{D} = 3{,}343\,58 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$, czyli $1876{,}12\,\mathrm{MeV} / c^2$.

Rozwiązanie

Na mocy Równania 10.4 defekt masy deuteronu wynosi

$$\begin{aligned}\Delta m = m_\mathrm{p} + m_\mathrm{n} - m_\mathrm{D} &= 938{,}27\,\mathrm{MeV} / c^2 + 938{,}57\,\mathrm{MeV} / c^2 - 1875{,}6\,\mathrm{MeV} / c^2 \\ &= 2{,}23\,\mathrm{MeV} / c^2.\end{aligned}$$

Energia wiązania deuteronu wynosi więc

$$E_\mathrm{w} = \Delta mc^2 = 2{,}23\,\mathrm{MeV} / c^2 \cdot c^2 = 2{,}23\,\mathrm{MeV}.$$

Aby rozbić deuteron na proton i neutron, potrzeba ponad $2\,\mathrm{MeV}$ (czyli 2 mln elektronowoltów). Ta wartość daje pojęcie o tym, jak silne są oddziaływania jądrowe. Dla porównania największa ilość energii potrzebna do uwolnienia elektronu związanego z atomem wodoru oddziaływaniem Coulomba (siłą elektromagnetyczną) wynosi około $10\,\mathrm{eV}$.

Wykres energii wiązania na nukleon

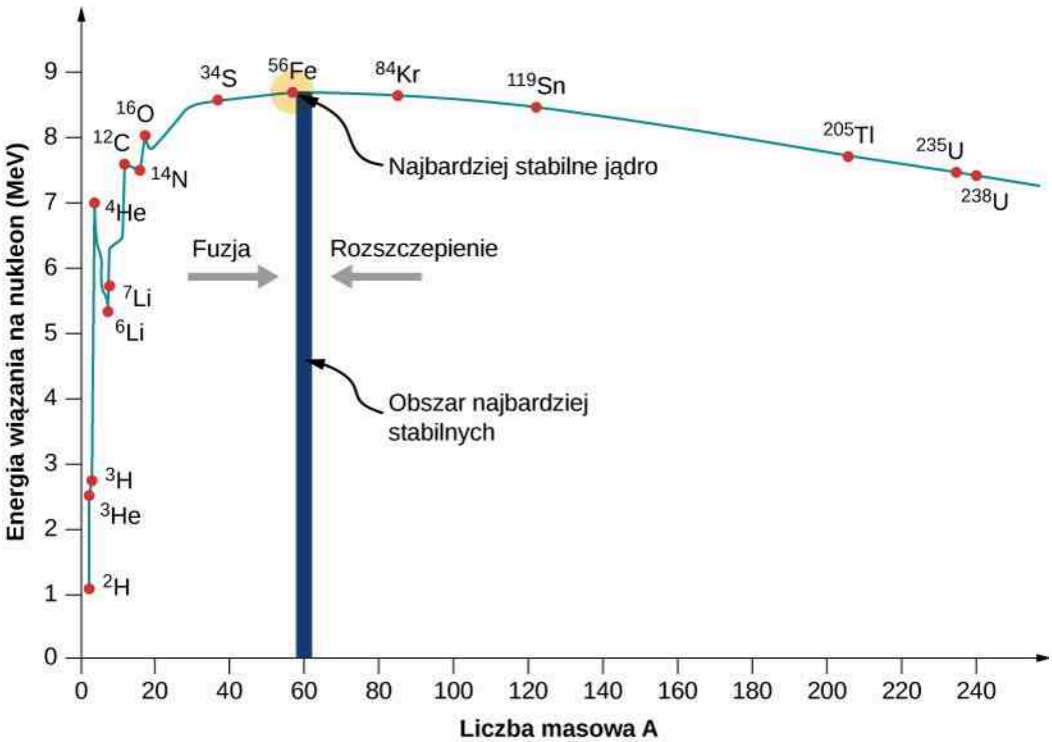
W fizyce jądrowej jedną z najważniejszych wielkości eksperymentalnych jest **energia wiązania na nukleon** (EWN, ang. **binding energy per nucleon**), zdefiniowana jako

$$\mathrm{EWN} = \frac{E_\mathrm{w}}{A}. \tag{10.6}$$

Gdybyśmy odrywali nukleony po jednym, aż do całkowitego rozerwania jądra na protony i neutrony, byłaby to średnia energia zużyta na oderwanie nukleonu. Dla ciężkich jąder jest ona w przybliżeniu równa energii potrzebnej do usunięcia pojedynczego nukleonu z jądra – analogicznie do energii jonizacji elektronu w atomie. Jeśli EWN jest stosunkowo duża, jądro jest względnie stabilne. Dla takich jąder wartości EWN są określane na podstawie eksperymentów rozpraszania na jądrach.

Wykres energii wiązania na nukleon jako funkcji liczby masowej A pokazano na Rysunku 10.7. Wykres ten jest uważany przez wielu fizyków za jeden z najważniejszych w fizyce, ponieważ tłumaczy częstość występowania pierwiastków we Wszechświecie. Warto tu zauważyć dwie rzeczy. Po pierwsze, typowe wartości EWN leżą w przedziale od $6\,\mathrm{MeV}$ do $10\,\mathrm{MeV}$, ze średnią wartością około $8\,\mathrm{MeV}$. Innymi słowy oderwanie nukleonu od typowego jądra wymaga kilku milionów elektronowoltów; dla porównania zaledwie $13{,}6\,\mathrm{eV}$ jest konieczne, aby zjonizować atom wodoru w stanie podstawowym (tj. oderwać od niego elektron). Dlatego siły utrzymujące jądro w całości określa się jako silne oddziaływania jądrowe.

Po drugie, wykres wznosi się w obszarze małych A, osiąga maksimum w pobliżu żelaza (Fe, $A = 56$), a następnie opada w obszarze dużych wartości A. Położenie maksimum sugeruje, że jądro żelaza jest najbardziej stabilnym jądrem w przyrodzie (tłumaczy to również, dlaczego synteza jądrowa w rdzeniach gwiazd kończy się na żelazie). Wzrost i opadanie wykresu wiążą się z konkurencją sił występujących w jądrze. Dla małych wartości A przyciągające siły jądrowe pomiędzy nukleonami dominują nad siłami elektrostatycznego odpychania między protonami. Natomiast dla dużych wartości A siły odpychania elektrostatycznego pomiędzy nukleonami zaczynają dominować, dążąc do rozbicia jądra na części.



Rysunek 10.7 Na tym wykresie energii wiązania na nukleon dla stabilnych jąder EWM jest największa dla jąder o masie zbliżonej do masy $^{56}\mathrm{Fe}$. W związku z tym dla jąder o masie mniejszej od masy jądra żelaza procesem egzotermicznym jest synteza (fuzja) jądrowa, czyli łączenie jąder, a dla jąder o masie od niego większej – rozszczepienie (podział) jądra.

Jak zobaczymy, z takiej zależności EWM od A wynika fakt, że przy podziale lub łączeniu jąder wyzwala się ogromna ilość energii. Skutkiem tego jest zarówno możliwość produkcji energii elektrycznej w elektrowni jądrowej, jak i trwająca nieprzerwanie od kilku miliardów lat emisja promieniowania elektromagnetycznego przez Słońce.

Przykład 10.3

Silnie związane nuklidy alfa

Obliczmy energię wiązania na nukleon dla jądra $^{4}\mathrm{He}$ (cząstki α).

Strategia rozwiązania

Ustalimy całkowitą energię wiązania (E_{w}) za pomocą równania $E_{\text{w}} = \Delta mc^2$, gdzie Δm jest defektem masy. Energia wiązania na nukleon (EWN) równa jest E_{w} podzielonej przez A.

Rozwiązanie

Dla ^4He mamy $Z = N = 2$. Całkowita energia wiązania wynosi

$$E_{\text{w}} = \left(2m_{\text{p}} + 2m_{\text{n}} - m_{\text{He}}\right)c^2.$$

Te masy wynoszą $m_{\text{He}} = 4{,}002\,602\,\text{u}$, $m_{\text{p}} = 1{,}007\,825\,\text{u}$ i $m_{\text{n}} = 1{,}008\,665\,\text{u}$. Mamy więc

$$E_{\text{w}} = 0{,}030\,378\,\text{u} \cdot c^2.$$

Zauważywszy, że $1\,\text{u} = 931{,}5\,\text{MeV} / c^2$, otrzymujemy

$$E_{\text{w}} = 0{,}030\,378\,\text{u} \cdot c^2 \cdot \frac{931{,}5\,\text{MeV}}{1\,\text{u} \cdot c^2} = 28{,}3\,\text{MeV}.$$

Ponieważ $A = 4$, to

$$\text{EWN} = 7{,}07\,\text{MeV} / \text{nukleon}.$$

Znaczenie

Zauważmy, że energia wiązania na nukleon dla jądra ^4He jest znacznie większa niż dla izotopów wodoru (około $3\,\text{MeV} / \text{nukleon}$). W związku z tym jądra helu nie da się rozbić na izotopy wodoru bez dostarczenia energii do układu.

10.2 Sprawdź, czy rozumiesz. Jeśli energia wiązania na nukleon jest duża, to odłączenie nukleonu od jądra staje się łatwiejsze czy trudniejsze w sensie energetycznym?

10.3 | Rozpad promieniotwórczy

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać rozpad pierwiastka promieniotwórczego z użyciem pojęć stałej rozpadu i okresu połowicznego rozpadu;
- szacować wiek substancji za pomocą prawa rozpadu promieniotwórczego;
- wyjaśniać naturalne procesy, które umożliwiają datowanie materii organicznej z wykorzystaniem izotopu ^{14}C.

W roku 1896 **Antoine Becquerel (1852–1908)** odkrył, że bogata w uran skała emituje niewidzialne promienie, które powodują zaciemnienie kliszy fotograficznej w zamkniętym pojemniku. Obecnie naukowcy podają trzy argumenty przemawiające za jądrowym pochodzeniem tych promieni. Po pierwsze, własności promieniowania nie zależą od stanu chemicznego, tzn. od tego, czy emitujący materiał jest w postaci pierwiastkowej, czy też tworzy związek chemiczny. Po drugie, promieniowanie nie zależy od zmian temperatury lub ciśnienia – a więc czynników, które w znacznym stopniu mogą wpływać na elektrony w atomie. Po trzecie, bardzo duża wartość energii tego niewidocznego gołym okiem promieniowania (nawet miliony elektronowoltów) nie zgadza się z typowymi energiami przejść elektronowych w atomie (tylko kilka elektronowoltów). Współcześnie promieniowanie wyjaśnia się procesami zachodzącymi w jądrze atomu, w których masa zamieniana jest w energię. Spontaniczną emisję promieniowania z jądra nazywamy **promieniotwórczością jądrową** (lub **radioaktywnością**, ang. **radioactivity**) – Rysunek 10.8. Procesy jądrowe prowadzące do emisji promieniowania nazywamy procesami rozpadu promieniotwórczego, a izotopy, które im podlegają, radioizotopami. O samych przemianach jądrowych i procesach rozpadu dowiesz się więcej z kolejnych rozdziałów. Tu zajmiemy się ogólnym opisem procesów rozpadu jądrowego.



Rysunek 10.8 Międzynarodowy symbol promieniowania jonizującego jest powszechnie używany jako ostrzeżenie przed szkodliwym dla zdrowia promieniowaniem jądrowym.

Prawo rozpadu promieniotwórczego

Gdy pojedyncze jądro przekształca się w inne, emitując promieniowanie, mówimy, że ulega ono **rozpadowi promieniotwórczemu** (ang. **radioactive decay**). Rozpadowi temu ulegają wszystkie jądra o $Z > 82$, a także niektóre niestabilne izotopy o $Z < 83$. Szybkość rozpadu jest proporcjonalna do liczby N początkowych jąder (które nie uległy jeszcze rozpadowi) w substancji. Liczba jąder $-\mathrm{d}N$, które ulegają rozpadowi w przedziale czasu $\mathrm{d}t$, jest równa

$$-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N, \tag{10.7}$$

gdzie parametr λ określa się **stałą rozpadu** (ang. **decay constant**). (Znak minus wskazuje, że liczba jąder radioizotopu maleje z upływem czasu, więc $-\mathrm{d}N$ jest dodatnią liczbą). Innymi słowy, im więcej jest jąder, które mogą ulec rozpadowi, tym więcej się rozpadnie (w czasie $\mathrm{d}t$). To równanie można inaczej zapisać w postaci

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda\,\mathrm{d}t. \tag{10.8}$$

Całkując obie strony równania i oznaczając przez N_0 liczbę jąder w chwili $t = 0\,\mathrm{s}$ konieczną do obliczenia całki oznaczonej, otrzymujemy

$$\int_{N_0}^{N} \frac{\mathrm{d}N'}{N'} = -\int_{0}^{t} \lambda\,\mathrm{d}t'. \tag{10.9}$$

To z kolei prowadzi do

$$\ln\frac{N}{N_0} = -\lambda t, \tag{10.10}$$

Po podniesieniu podstawy logarytmu naturalnego (liczbę e) do potęgi równej lewej i prawej stronie równania, otrzymujemy **prawo rozpadu promieniotwórczego** (ang. **radioactive decay law**).

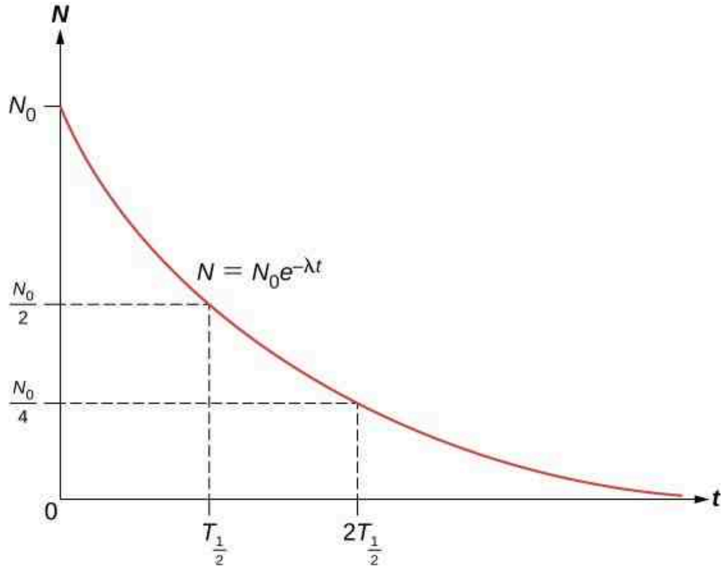
Prawo rozpadu promieniotwórczego

Całkowita liczba N jąder promieniotwórczych pozostałych po czasie t wynosi

$$N = N_0 e^{-\lambda t}, \tag{10.11}$$

gdzie parametr λ jest stałą rozpadu danego jądra.

Całkowita liczba jąder początkowo maleje szybciej, a następnie wolniej (Rysunek 10.9).



Rysunek 10.9 Wykres prawa rozpadu promieniotwórczego pokazuje, że liczba pozostałych w próbce jąder maleje bardo szybko podczas pierwszych chwil rozpadu.

Okres połowicznego rozpadu (ang. **half-life**) $T_{1/2}$ substancji promieniotwórczej jest zdefiniowany jako czas, w którym połowa pierwotnej liczby jąder ulegnie rozpadowi. Okresy połowicznego rozpadu niestabilnych izotopów pokazane są w tabeli nuklidów na Rysunku 10.4. Liczba jąder promieniotwórczych pozostałych po całkowitej (n) wielokrotności okresu połowicznego rozpadu wynosi zatem

$$N = \frac{N_0}{2^n}. \tag{10.12}$$

Jeśli stała rozpadu λ jest duża, to okres połowicznego rozpadu jest krótki (i na odwrót). Aby ustalić związek między tymi wielkościami, należy zauważyć, że gdy $t = T_{1/2}$, to $N = N_0 / 2$. W związku z tym Równanie 10.10 można zapisać jako

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}. \tag{10.13}$$

Dzieląc obie strony przez N_0 i stosując logarytm naturalny, otrzymujemy

$$\ln \frac{1}{2} = \ln e^{-\lambda T_{1/2}}, \tag{10.14}$$

co – po podstawieniu przybliżonej wartości $\ln 2 \approx 0{,}693$ – sprowadza się do

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}. \tag{10.15}$$

W ten sposób, jeśli znamy okres połowicznego rozpadu $T_{1/2}$ substancji promieniotwórczej, możemy obliczyć jej stałą rozpadu. **Średni czas życia** (ang. **lifetime**) $\overline{T}$ substancji promieniotwórczej jest definiowany jako średni czas istnienia jądra do chwili rozpadu. Czas życia nietrwałego jądra jest po prostu odwrotnością jego stałej rozpadu, co zapisujemy jako

$$\overline{T} = \frac{1}{\lambda}. \tag{10.16}$$

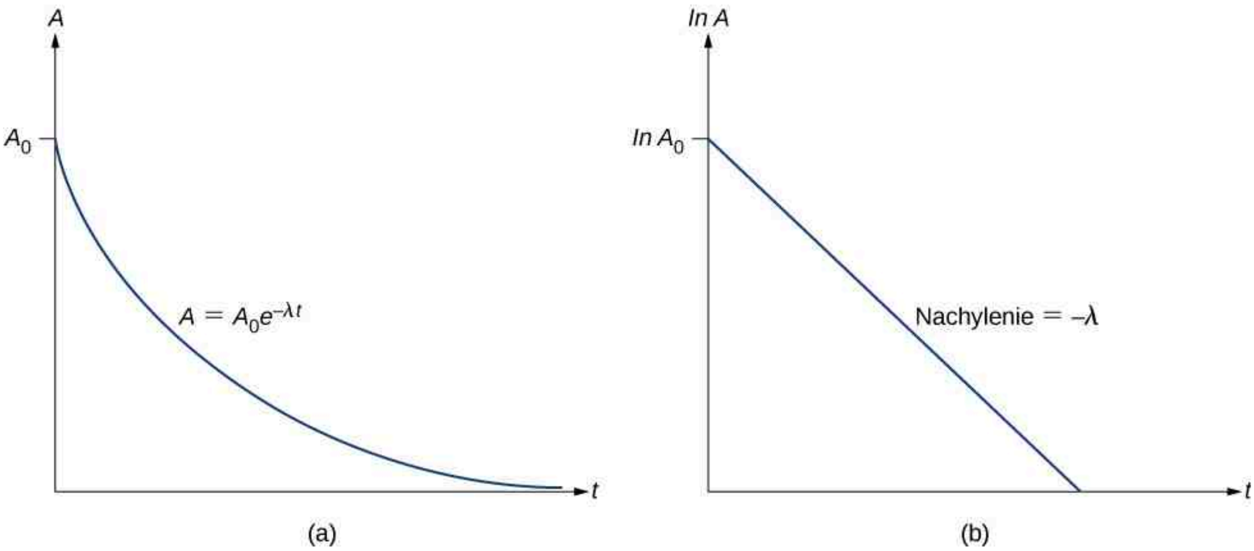
Aktywność (ang. **activity**) A jest zdefiniowana jako wartość bezwzględna szybkości rozpadu, a więc

$$A = -\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N = \lambda N_0 e^{-\lambda t}. \tag{10.17}$$

Ponieważ liczba cząstek, które jeszcze nie uległy rozpadowi maleje, to zmiana $\mathrm{d}N$ w przedziale czasu $\mathrm{d}t$ jest ujemna, aktywność A jest więc dodatnia. Definiując początkową aktywność jako $A_0 = \lambda N_0$, uzyskamy

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \tag{10.18}$$

W związku z tym aktywność A substancji radioaktywnej zmniejsza się wykładniczo z czasem (Rysunek 10.10).



Rysunek 10.10 (a) Wykres aktywności w zależności od czasu. (b) Jeżeli zmierzymy aktywność w różnych chwilach czasu, to możemy wykreślić $\ln A$ w zależności od t i uzyskać linię prostą.

Przykład 10.4

Stała rozpadu i aktywność strontu-90

Okres połowicznego rozpadu strontu-90, ${}^{90}_{38}\mathrm{Sr}$, wynosi 28,8 roku. Obliczmy

a. stałą rozpadu tego nuklidu;
b. początkową aktywność 1 g materiału.

Strategia rozwiązania

Możemy obliczyć stałą rozpadu bezpośrednio z Równania 10.15. Aby określić aktywność, musimy najpierw określić liczbę jąder.

Rozwiązanie

a. Stała rozpadu wynosi

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{28{,}8\ \text{roku}} \cdot \frac{1\ \text{rok}}{3{,}16 \cdot 10^7\ \text{s}} = 7{,}61 \cdot 10^{-10}\ \text{s}^{-1}.$$

b. Masa molowa ${}^{90}_{38}\text{Sr}$ wynosi $89{,}91\ \text{g} / \text{mol}$. Używając liczby Avogadra $N_\text{A} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$, wyznaczamy początkową liczbę jąder w 1 g materiału

$$N_0 = \frac{1\ \text{g}}{89{,}91\ \text{g} / \text{mol}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1} = 6{,}7 \cdot 10^{21}.$$

Z tego wynika, że aktywność (czyli liczba rozpadów promieniotwórczych na sekundę) A_0 w $t = 0\ \text{s}$ dla 1 g strontu-90 jest równa

$$A_0 = \lambda N_0 = 7{,}61 \cdot 10^{-10}\ \text{s}^{-1} \cdot 6{,}7 \cdot 10^{21} = 5{,}1 \cdot 10^{12}\ \text{s}^{-1}.$$

Podstawiwszy pod λ okres połowicznego rozpadu nuklidu, otrzymujemy

$$A = A_0 e^{(-0{,}693/T_{1/2})T_{1/2}} = A_0 e^{-0{,}693} = A_0 / 2. \tag{10.19}$$

Stąd widzimy, że aktywność spada o połowę po czasie równym okresowi połowicznego rozpadu. Możemy określić stałą rozpadu λ przez pomiar aktywności jako funkcji czasu. Jeśli zastosujemy logarytm naturalny dla lewej i prawej strony Równania 10.17, uzyskamy

$$\ln A = -\lambda t + \ln A_0. \tag{10.20}$$

Powyższe równanie logarytmiczne ma postać liniową $y = mx + b$. Jeśli wykreślimy $\ln A$ w funkcji t, to możemy spodziewać się linii prostej o nachyleniu $-\lambda$, przecinającej oś y w punkcie o współrzędnej $\ln A_0$ – Rysunek 10.10 (b). Aktywność A jest wyrażana w **bekerelach** (Bq, ang. **becquerel**), przy czym $1\ \text{Bq} = 1\ \text{rozpad na sekundę}$. Wielkość ta może również być wyrażona w rozpadach na minutę lub rozpadach na rok. Choć bekerel jest jedyną legalną jednostką aktywności promieniotwórczej, to używa się też starej jednostki **kiur** (Ci, ang. **curie**), zdefiniowanej pierwotnie jako aktywność 1 g ^{226}Ra. Obecnie związek między Bq i Ci określa równanie

$$1\ \text{Ci} = 3{,}7 \cdot 10^{10}\ \text{Bq}.$$

Przykład 10.5

Jaka jest aktywność ^{14}C w żywej tkance?

Około 20% masy ciała ludzkiego stanowi węgiel. Obliczmy aktywność izotopu ^{14}C w 1 kg węgla w żywym organizmie. Wyraźmy aktywność w bekerelach i kiurach.

Strategia rozwiązania

Aktywność ^{14}C można określić za pomocą równania $A_0 = \lambda N_0$, gdzie λ jest stałą rozpadu, a N_0 to liczba jąder promieniotwórczych. Liczbę jąder ^{14}C w 1 kg próbki obliczamy w dwóch etapach. Po pierwsze, wyznaczamy liczbę jąder ^{12}C, wykorzystując definicję mola. Po drugie, mnożymy tę wartość przez $1{,}3 \cdot 10^{-12}$ (zawartość ^{14}C w próbce węgla z żywego organizmu). Stałą rozpadu można określić na podstawie znanego okresu połowicznego rozpadu ^{14}C (Rysunek 10.4).

Rozwiązanie

Jeden mol węgla ma masę 12 g, ponieważ jest to prawie czysty izotop ^{12}C. W związku z tym liczba jąder węgla w 1 kg wynosi

$$N\left({}^{12}\text{C}\right) = \frac{6{,}02 \cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}}{12\,\text{g}\ /\ \text{mol}} \cdot 1000\,\text{g} = 5{,}02 \cdot 10^{25}.$$

Liczba jąder ^{14}C w 1 kg węgla jest zatem równa

$$N\left({}^{14}\text{C}\right) = 5{,}02 \cdot 10^{25} \cdot 1{,}3 \cdot 10^{-12} = 6{,}52 \cdot 10^{13}.$$

Teraz możemy wyznaczyć aktywność A za pomocą równania $A = 0{,}693N\ /\ T_{1/2}$. Podstawienie znanych wartości daje

$$A = \frac{0{,}693 \cdot 6{,}52 \cdot 10^{13}}{5730\,\text{lat}} = 7{,}89 \cdot 10^{9}\ \text{lat}^{-1}\ ,$$

czyli $7{,}89 \cdot 10^{9}$ rozpadów rocznie. Aby wyrazić ten wynik w bekerelach, wystarczy przeliczyć lata na sekundy. W związku z tym

$$A = 7{,}89 \cdot 10^{9}\ \text{lat}^{-1} \cdot \frac{1\ \text{lat}}{3{,}16 \cdot 10^{7}\,\text{s}} = 250\,\text{Bq}\,,$$

czyli 250 rozpadów na sekundę. Aby wyrazić A w kiurach, korzystamy z definicji tej jednostki

$$A = \frac{250\,\text{Bq}}{3{,}7 \cdot 10^{10}\,\text{Bq}\ /\ \text{Ci}} = 6{,}76 \cdot 10^{-9}\ \text{Ci}\,.$$

Stąd

$$A = 6{,}76\,\text{nCi}\,.$$

Znaczenie

Około 20% masy ciała ludzkiego stanowi węgiel. Setki rozpadów ^{14}C mają miejsce w organizmie człowieka co sekundę. Węgiel-14 i inne naturalnie występujące w organizmie substancje radioaktywne przyczyniają się do ekspozycji (narażenia) danej osoby na promieniowanie naturalne (ang. **background radiation**). Jak zobaczymy w dalszej części tego rozdziału, taka aktywność jest znacznie niższa od maksymalnych dozwolonych dawek.

Datowanie radiowęglowe

Datowanie izotopowe (ang. **radioactive dating**) jest techniką, która wykorzystuje naturalnie występującą promieniotwórczość do określania wieku materiałów, takich jak skały lub wykopaliska archeologiczne. Podstawowe podejście polega na szacowaniu aktualnej liczby jąder w materiale (po rozpadzie), a następnie użyciu znanej wartości stałej rozpadu λ oraz Równania 10.10 do obliczenia całkowitego czasu rozpadu t.

Ważną metodą datowania izotopowego jest **metoda datowania węglem-14** (ang. **carbon-14 dating**). Jądra węgla-14 powstają, gdy promieniowanie słoneczne o wysokiej energii uderza w jądro ^{14}N w górnych warstwach atmosfery. Następnie jądra ^{14}C ulegają rozpadowi z okresem połowicznego rozpadu wynoszącym 5730 lat. Radioaktywny węgiel ma te same własności chemiczne co stabilny izotop pierwiastka, więc włącza się w ekosferę i ostatecznie staje się częścią każdego żywego organizmu. Węgiel-14 ma zawartość $1{,}3$ części na bilion atomów węgla ^{12}C. W związku z tym, jeśli znamy liczbę jąder węgla w obiekcie, musimy pomnożyć ją przez $1{,}3 \cdot 10^{-12}$, aby określić liczbę jąder ^{14}C. Kiedy organizm umiera, wymiana dwutlenku węgla ze środowiskiem ustaje, a ubytek ^{14}C związany z rozpadem nie jest uzupełniany.

Porównując zawartość ^{14}C w obiektach takich jak mumia z normalną zawartością w żywych tkankach, można określić wiek tejże mumii (czyli czas, który upłynął od śmierci zmarłej osoby). Metody datowania radiowęglowego można używać do tkanek biologicznych mających nie więcej niż $50\,000$ lat , ale jest ona dokładniejsza dla młodszych próbek ze względu na większą zawartość izotopu ^{14}C. Bardzo stare materiały biologiczne w ogóle nie zawierają ^{14}C.

Poprawność datowania można sprawdzić za pomocą innych metod, takich jak porównanie z wiedzą historyczną lub zliczanie słojów drzew.

Przykład 10.6

Pradawna jaskinia grobowa

W pradawnej jaskini grobowej zespół archeologów odkrywa starożytne meble z drewna. W drewnie pozostało tylko 80% pierwotnego ^{14}C. Ile lat mają meble?

Strategia rozwiązania

Treść zadania wskazuje, że $N / N_0 = 0{,}8$. W związku z tym z równania $N = N_0 e^{-\lambda t}$ można obliczyć iloczyn λt. Znamy okres połowicznego rozpadu ^{14}C wynoszący 5730 lat, więc znamy również stałą rozpadu, a w związku z tym całkowity czas rozpadu t.

Rozwiązanie

Rozwiązując równanie $N = N_0 e^{-\lambda t}$ względem N / N_0, otrzymujemy

$$\frac{N}{N_0} = e^{-\lambda t}.$$

W związku z tym

$$0{,}8 = e^{-\lambda t}.$$

Stosując logarytm naturalny do obu stron, otrzymujemy

$$\ln(0{,}8) = -\lambda t,$$

stąd

$$-0{,}223 = -\lambda t.$$

Przekształcamy to równanie w celu wyznaczenia t i otrzymujemy

$$t = \frac{0{,}223}{\lambda},$$

gdzie stała rozpadu ma wartość

$$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}} = \frac{0{,}693}{5730\ \text{lat}}.$$

Połączenie tych informacji daje

$$t = \frac{0{,}223}{0{,}693 / 5730\ \text{lat}} = 1844\ \text{lata}.$$

Znaczenie

Meble mają prawie 2000 lat – imponujące znalezisko. Typowa niepewność datowania ^{14}C wynosi około 5%, więc wiek mebli mieści się w przedziale od 1750 lat do 1950 lat. Ten zakres dat, o ile to możliwe, musi zostać jeszcze potwierdzony, np. zapisami historycznymi.

10.3 Sprawdź, czy rozumiesz. Nuklid promieniotwórczy ma dużą szybkość rozpadu. Co to oznacza dla jego okresu połowicznego rozpadu i aktywności?

Odwiedź grę w datowanie izotopowe (https://openstaxcollege.org/l/21raddatgame), aby poznać rodzaje datowania izotopowego i spróbować swoich sił w datowaniu starych przedmiotów.

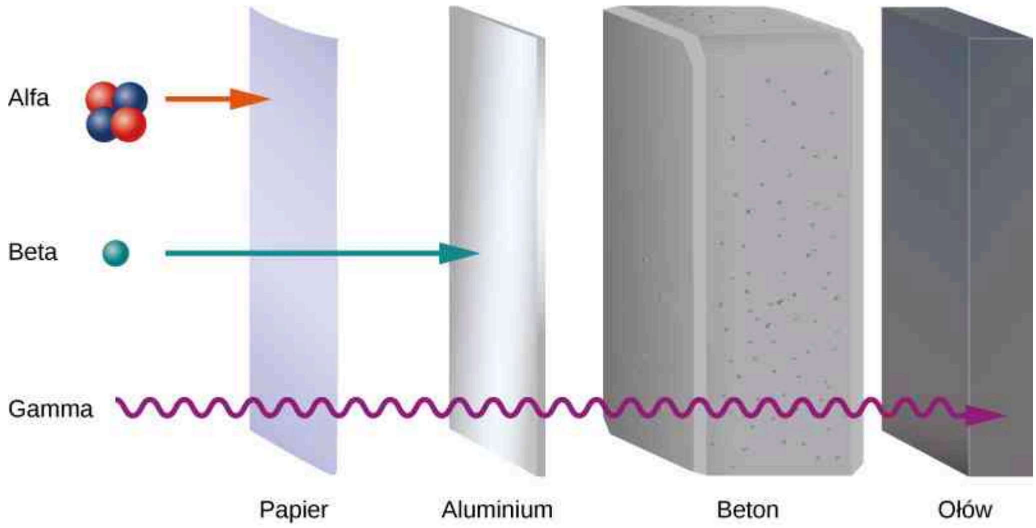
10.4 | Procesy rozpadu

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

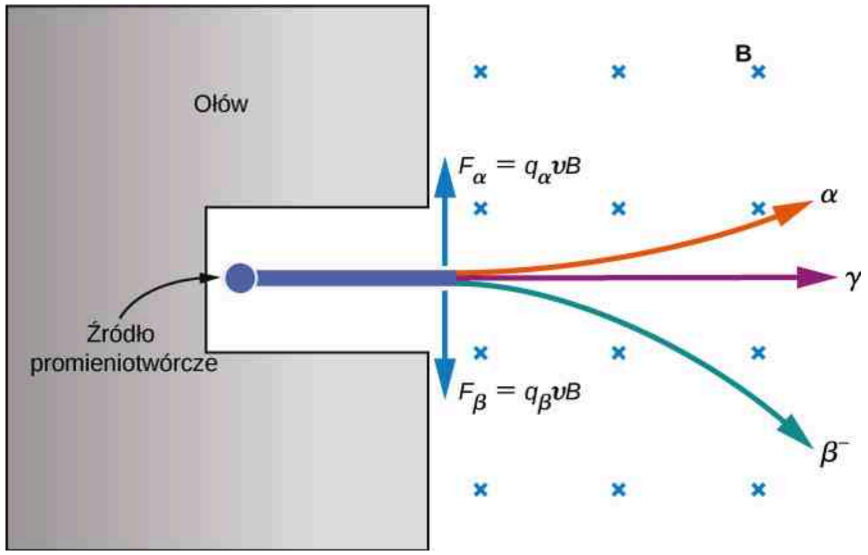
- rozróżniać i opisywać trzy rodzaje promieniowania jądrowego;
- używać symboli jądrowych do opisywania przemian, które występują podczas reakcji jądrowych;
- opisywać procesy związane z szeregami promieniotwórczymi ciężkich pierwiastków.

Już pierwsze eksperymenty wykazały, że istnieją trzy rodzaje jądrowych promieni (ang. **rays**) lub promieniowania (ang. **radiation**): **promieniowanie alfa (α)** (ang. **alpha rays**), **promieniowanie beta (β)** (ang. **beta rays**) i **promieniowanie gamma (γ)** (ang. **gamma rays**). Różnią się one od siebie zdolnością do przenikania przez materię. Promieniowanie alfa z trudem przechodzi przez cienki arkusz papieru. Promieniowanie beta może przenikać aluminium na głębokość około 3 mm, a promieniowanie gamma wnika w ołów na głębokość 2 cm lub większą (Rysunek 10.11).



Rysunek 10.11 Porównanie głębokości wnikania promieniowania alfa (α), beta (β) i gamma (γ) w różne materiały.

Właściwości elektryczne tych trzech rodzajów promieniowania można badać, śledząc ich ruch w jednorodnym polu magnetycznym, jak pokazano na Rysunku 10.12. Zgodnie ze wzorem na siłę magnetyczną (Lorentza): $\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$, w sytuacji przedstawionej na rysunku dodatnio naładowane cząstki są odchylane ku górze, ujemnie naładowane cząstki – odchylane w dół, a cząstki nienaładowane przechodzą przez pole magnetyczne bez odchylenia toru. Ostatecznie promieniowanie α zostało zidentyfikowane jako jądra helu (^{4}He), promieniowanie β^- jako elektrony, jego później odkryty dodatni odpowiednik – promieniowanie β^+ – jako **pozytony** (ang. **positrons**; są to dodatnio naładowane elektrony, czyli **antyelektrony**), a promieniowanie γ jako wysokoenergetyczne fotony. W dalszej części tego podrozdziału omówimy wszystkie typy promieniowania bardziej szczegółowo.



Rysunek 10.12 Wpływ pola magnetycznego na promieniowanie alfa (α), beta (β) i gamma (γ). Ten rysunek jest tylko schematyczny. Dokładne tory cząstek zależą od ich mas i początkowych energii kinetycznych.

Rozpad alfa

Ciężkie, niestabilne jądra emitują promieniowanie α. W rozpadzie, w którym powstają cząstki α (czyli **rozpadzie alfa**, ang. **alpha decay**), jądro traci dwa protony i dwa neutrony, więc jego liczba atomowa maleje o dwa, podczas gdy liczba masowa zmniejsza się o cztery. Jądro istniejące przed rozpadem nazywamy **jądrem pierwotnym** (ang. **parent nucleus**); jądro lub jądra powstające w procesie rozpadu są określane jako jądro albo **jądra potomne** (ang. **daughter nucleus**). Rozpad α przedstawiamy symbolicznie przez zapis

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\,, \tag{10.21}$$

gdzie ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$ jest jądrem pierwotnym, ${}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y}$ – jądrem potomnym, a ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ – cząstką α. W rozpadzie alfa jądro o liczbie atomowej Z przechodzi w jądro o liczbie atomowej $Z-2$ i liczbie masowej $A-4$. To ciekawe, że zgodnie z prawami współczesnej nauki marzenie dawnych alchemików, aby przemieniać inne metale w złoto, staje się rzeczywistością w procesie rozpadu alfa. Wysiłki alchemików nie powiodły się, ponieważ badali oni procesy chemiczne, a nie jądrowe.

Popatrz, jak cząstki α wydostają się z jądra polonu, powodując rozpad promieniotwórczy alfa. Zobacz, jak losowe czasy rozpadu wiążą się z okresem połowicznego rozpadu. Aby uruchomić symulację rozpadu alfa, odwiedź tę stronę (https://openstaxcollege.org/l/21alphaparvid) .

Przykładem rozpadu alfa jest proces z udziałem izotopu uranu ${}^{238}\mathrm{U}$

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{X} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\,. $$

Liczba atomowa zmniejszyła się z 92 do 90. Pierwiastek chemiczny z $Z = 90$ to tor. Tak więc ${}^{238}\mathrm{U}$ rozpadł się do ${}^{234}\mathrm{Th}$ przez emisję cząstki α, co zapisujemy jako

$$ {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}\,. $$

Następnie ${}^{234}_{90}\mathrm{Th}$ rozpada się w wyniku emisji cząstki β, z okresem połowicznego rozpadu 24 dni. Energia uwalniana w rozpadzie alfa ma postać energii kinetycznej jąder helu i toru, z tym że energia kinetyczna toru jest mniejsza niż helu ze względu na jego większą masę, a przez to mniejszą prędkość.

Przykład 10.7

Rozpad alfa plutonu

Obliczmy energię emitowaną w rozpadzie α, jądra ^{239}Pu.

Strategia rozwiązania

Energię emitowaną w rozpadzie alfa jądra ^{239}Pu można obliczyć za pomocą równania $E = \Delta mc^2$. Najpierw musimy znaleźć Δm , czyli różnicę mas pomiędzy jądrem pierwotnym a produktami rozpadu.

Rozwiązanie

Równanie rozpadu ma postać

$$^{239}\text{Pu} \longrightarrow {}^{235}\text{U} + {}^{4}\text{He} \,.$$

W związku z tym istotne są masy ^{239}Pu, ^{235}U i cząstki α, czyli ^{4}He. Wszystkie te masy są znane. Masa początkowa ma wartość $m\left({}^{239}\text{Pu}\right) = 239{,}052\,157\,\text{u}$. Końcowa masa to suma

$$m\left({}^{235}\text{U}\right) + m\left({}^{4}\text{He}\right) = 235{,}043\,924\,\text{u} + 4{,}002\,602\,\text{u} = 239{,}046\,526\,\text{u}.$$

W związku z tym

$$\Delta m = m\left({}^{239}\text{Pu}\right) - \left[m\left({}^{235}\text{U}\right) + m\left({}^{4}\text{He}\right)\right] = 239{,}052\,157\,\text{u} - 239{,}046\,526\,\text{u} = 0{,}005\,631\,\text{u}.$$

Teraz możemy określić E, podstawiając Δm do równania

$$E = \Delta mc^2 = 0{,}005\,631\,\text{u} \cdot c^2 \,.$$

Wiemy, że $1\,\text{u} = 931{,}5\,\text{MeV} \big/ c^2$, otrzymujemy więc

$$E = 0{,}005\,631\,\text{u} \cdot \frac{931{,}5\,\text{MeV}}{1\,\text{u} \cdot c^2} \cdot c^2 = 5{,}25\,\text{MeV} \,.$$

Znaczenie

Energia uwalniana w tym rozpadzie jest rzędu megaelektronowoltów, a więc wiele razy większa od energii reakcji chemicznych. Większość tej energii staje się energią kinetyczną cząstki α (czyli jądra ^{4}He), która oddala się dużą prędkością. Energia odrzutu jądra ^{235}U jest znacznie mniejsza ze względu na jego stosunkowo dużą masę. Jądro ^{235}U może pozostać w stanie wzbudzonym i później emitować fotony (promieniowanie gamma).

Rozpad beta

W większości procesów rozpadu, w których emitowane są cząstki β (czyli **rozpadów beta**, ang. **beta decay**), jądro emituje elektron (β^-) lub pozyton (β^+). Pozyton ma taką samą masę jak elektron, ale jego ładunek wynosi $+e$. Jest on zatem antycząstką elektronu (w reakcji z elektronem oba anihilują z wydzieleniem energii w postaci dwóch fotonów), dlatego czasami nazywany jest antyelektronem. Jak przebiega rozpad β? Możliwym wyjaśnieniem byłoby, że elektron (lub pozyton) jest związany w jądrze przed rozpadem i w jakiś sposób z tego jądra ucieka. Aby uzyskać przybliżoną wartość energii ucieczki, rozważmy uproszczony model elektronu uwięzionego w pudle (lub w terminologii mechaniki kwantowej – w jednowymiarowej prostokątnej studni potencjału), które ma szerokość typowego jądra (10^{-14} m). Zgodnie z **zasadą nieoznaczoności Heisenberga** (ang. **Heisenberg's uncertainty principle**) opisaną w rozdziale Mechanika Kwantowa nieoznaczoność pędu elektronu wynosi

$$\Delta p > \frac{h}{\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\,\text{kg}\,\text{m}^2 \big/ \text{s}}{10^{-14}\,\text{m}} = 6{,}6 \cdot 10^{-20}\,\text{kg}\,\text{m} \,/\, \text{s}.$$

Jeśli uznamy tę wartość pędu (która w istocie jest zaniżona) za „prawdziwą”, będziemy mogli określić przybliżoną energię kinetyczną elektronu w momencie ucieczki

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m_\mathrm{e}} = \frac{\left(6{,}6 \cdot 10^{-20}\ \mathrm{kg\,m\,/\,s}\right)^2}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}} = 2 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{J} = 12{,}4\,\mathrm{GeV}\,.$$

Doświadczalnie stwierdzane energie kinetyczne elektronów emitowanych w rozpadzie β^- są rzędu tylko kilku megaelektronowoltów. W związku z tym stwierdzamy, że elektron w jakiś sposób powstaje w procesie rozpadu, a nie ucieka z jądra. Powstawanie i znikanie (anihilację) cząstek opisują teorie łączące mechanikę kwantową z teorią względności, co jest przedmiotem bardziej zaawansowanych kursów fizyki.

Jądrowy rozpad beta polega na przemianie jednego nukleonu w inny. Na przykład neutron może ulec rozpadowi do protonu przez emisję elektronu (β^-) i niemal bezmasowej cząstki nazywanej **antyneutrinem** ($\overline{\nu}$, ang. **antineutrino**)

$${}^{1}_{0}\mathrm{n} \longrightarrow {}^{1}_{1}\mathrm{p} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}.$$

Notacji ${}^{0}_{-1}\mathrm{e}$ używamy na oznaczenie elektronu. Jego liczba masowa wynosi 0, ponieważ nie jest on nukleonem (co więcej jego masa jest bardzo mała – to tylko $1\,/\,1836$ masy protonu), a jego liczba atomowa równa jest −1, co oznacza, że ma on ładunek $-e$. Proton jest reprezentowany przez ${}^{1}_{1}\mathrm{p}$, ponieważ jego liczby masowa i atomowa wynoszą 1. Gdy taki proces zachodzi wewnątrz jądra atomowego, otrzymujemy następujące równanie rozpadu beta

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}_{Z+1}^{\ \ A}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}. \tag{10.22}$$

Zgodnie z opisem podanym w kolejnym rozdziale proces ten powoduje słabe oddziaływania jądrowe.

Popatrz, jak zachodzi rozpad beta (https://openstaxcollege.org/l/21betadecayvid) zbioru jąder lub pojedynczego jądra.

Na przykład izotop ${}^{234}_{90}\mathrm{Th}$ jest niestabilny i rozpada się przez emisję β^- z okresem połowicznego rozpadu 24 dni. Jego rozpad można zapisać w postaci

$${}^{234}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{X} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}.$$

Ponieważ pierwiastkiem chemicznym o liczbie atomowej 91 jest protaktyn (Pa), możemy zapisać rozpad β^- toru jako

$${}^{234}_{90}\mathrm{Th} \longrightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}.$$

Możliwy jest również proces odwrotny: proton może ulec rozpadowi do neutronu poprzez emisję pozytonu (β^+) i niemal bezmasowej cząstki nazywanej **neutrinem** (ν). Reakcję tę zapisujemy jako ${}^{1}_{1}\mathrm{p} \longrightarrow {}^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + \nu$.

Pozyton ${}^{0}_{1}\mathrm{e}$ wraz z neutrinem ν opuszcza jadro, a neutron w nim pozostaje. Podobnie jak w rozpadzie β^- pozyton nie istnieje przed rozpadem, lecz powstaje w procesie rozpadu. Rozpad ten nie jest możliwy dla swobodnego protonu, ponieważ neutron jest od niego cięższy. Taki proces może jednak zajść w jądrze, gdzie proton może otrzymać niezbędną energię od innych nukleonów. Na przykład izotop glinu ${}^{26}_{13}\mathrm{Al}$ rozpada się przez emisję cząstki β^+ z okresem połowicznego rozpadu $7{,}4 \cdot 10^5$ lat. Rozpad ten zapisujemy jako

$${}^{26}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{26}_{12}\mathrm{X} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + \nu.$$

Liczba atomowa 12 odpowiada magnezowi. W związku z tym

$${}^{26}_{13}\mathrm{Al} \longrightarrow {}^{26}_{12}\mathrm{Mg} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + \nu.$$

Emisję pozytonu można zapisać jako reakcję jądrową w postaci

$${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}_{Z-1}^{\ \ A}\mathrm{Y} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + \nu. \tag{10.23}$$

Neutrino nie zostało wykryte w pierwszych eksperymentach dotyczących rozpadu β. Prawa zachowania energii i pędu wymagały jednak istnienia takich cząstek. Później neutrina zostały odkryte dzięki ich oddziaływaniom z jądrami.

Przykład 10.8

Rozpad alfa i beta bizmutu

Jądro ${}^{211}_{83}\mathrm{Bi}$ ulega rozpadom α i β⁻. Jakie jądro potomne powstaje w każdym z tych przypadków?

Strategia rozwiązania

Możemy użyć procesów opisanych Równaniem 10.21 i Równaniem 10.22, a także układu okresowego, aby zidentyfikować powstające pierwiastki.

Rozwiązanie

Liczba atomowa i liczba masowa cząstki α wynoszą odpowiednio 2 i 4. W związku z tym, kiedy jądro bizmutu ${}^{211}\mathrm{Bi}$ emituje cząstkę α, jądro potomne ma liczbę atomową 81 i liczbę masową 207. Pierwiastek o liczbie atomowej 81 to tal, więc rozpad jest opisany równaniem

$$ {}^{211}_{83}\mathrm{Bi} \longrightarrow {}^{207}_{81}\mathrm{Tl} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \,. $$

W rozpadzie β^- liczba atomowa zwiększa się o 1, a liczba masowa pozostaje taka sama. Pierwiastek o liczbie atomowej 84 to polon, więc rozpad zapisujemy jako

$$ {}^{211}_{83}\mathrm{Bi} \longrightarrow {}^{211}_{84}\mathrm{Po} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}. $$

10.4 Sprawdź, czy rozumiesz. Czy w rozpadzie promieniotwórczym beta liczba masowa A rośnie, czy maleje?

Rozpad gamma

Jądro w stanie wzbudzonym może przejść do stanu o niższej energii przez emisję fotonów promieniowania gamma, co określa się mianem **rozpadu gamma** (ang. **gamma decay**). Jest to proces analogiczny do przejścia elektronu na niższy poziom energetyczny w atomie. Rozpad gamma jest reprezentowany symbolicznie równaniem

$$ {}^{A}_{Z}\mathrm{X}^{*} \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \gamma, \tag{10.24} $$

gdzie gwiazdka (*) przy symbolu jądra oznacza stan wzbudzony. W rozpadzie γ nie zmieniają się ani liczba masowa, ani liczba atomowa, a więc nie zmienia się typ jądra.

Szereg promieniotwórczy

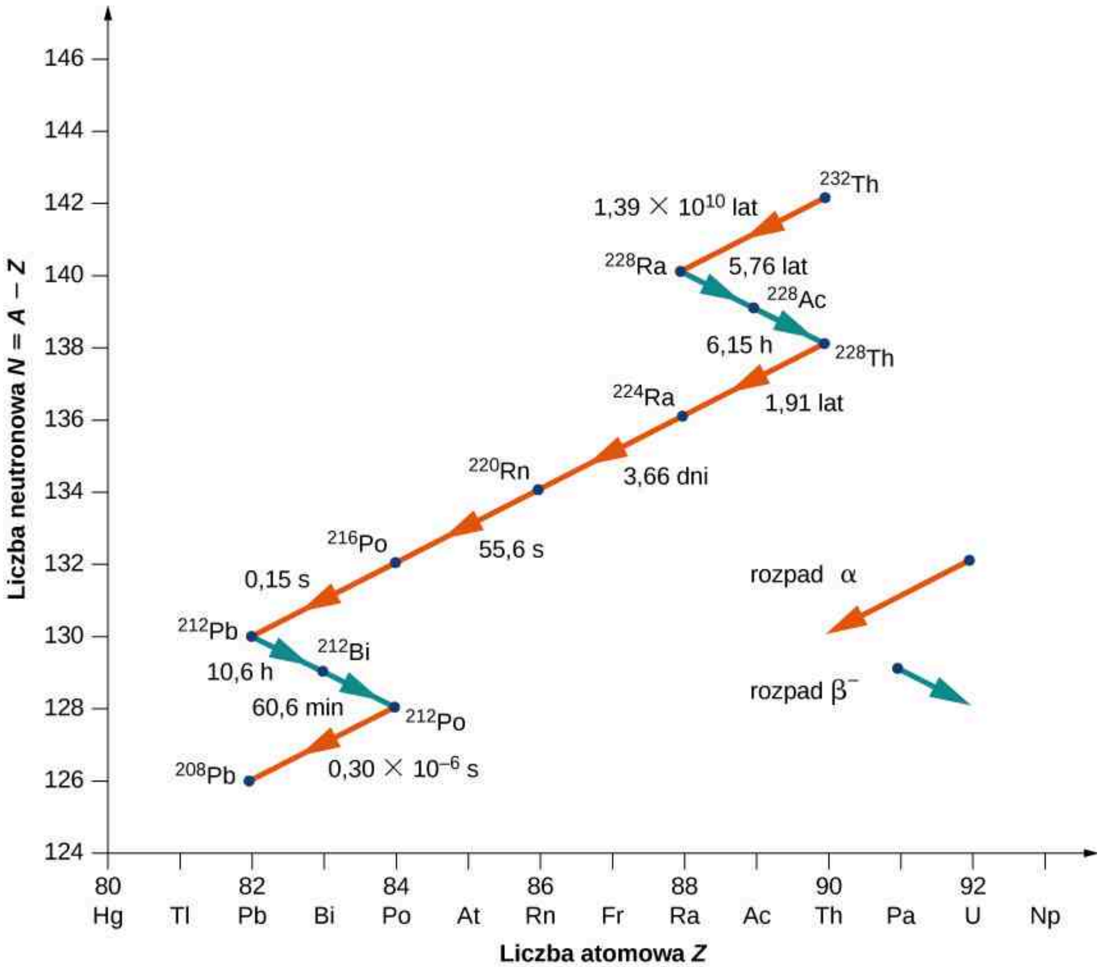
Jądra o $Z > 82$ są niestabilne i ulegają spontanicznemu rozpadowi. Wiele z nich ma bardzo krótki czas życia, więc nie występuje w naturze. Do ważnych wyjątków należą ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ (czyli tor-232) z okresem połowicznego rozpadu $1{,}39 \cdot 10^{10}$ lat i ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ (czyli uran-238) z okresem połowicznego rozpadu $7{,}04 \cdot 10^{8}$ lat. Gdy ciężkie jądro rozpada się, tworząc jądro lżejsze, powstałe w rozpadzie jądro potomne może stać się jądrem pierwotnym w kolejnym procesie rozpadu itd. Proces ten może prowadzić do długiej serii rozpadów jądrowych, którą nazywa się **szeregiem promieniotwórczym** (ang. **decay series**). Szereg kończy się na stabilnym jądrze.

Aby zilustrować pojęcie szeregu promieniotwórczego, rozważmy szereg promieniotwórczy Th-232 (Rysunek 10.13). Liczba neutronowa N zaznaczona jest na osi pionowej (osi y), a liczba atomowa Z – na osi poziomej (osi x), tak więc ${}^{232}\mathrm{Th}$ znajduje się w punkcie o współrzędnych $(N, Z) = (142, 90)$. ${}^{232}\mathrm{Th}$ rozpada się przez emisję cząstki α z okresem połowicznego rozpadu $1{,}39 \cdot 10^{10}$ lat. Rozpad alfa zmniejsza liczbę atomową o 2, a liczbę masową o 4, więc mamy

$$^{232}_{90}\text{Th} \longrightarrow {}^{228}_{88}\text{Ra} + {}^{4}_{2}\text{He} \, .$$

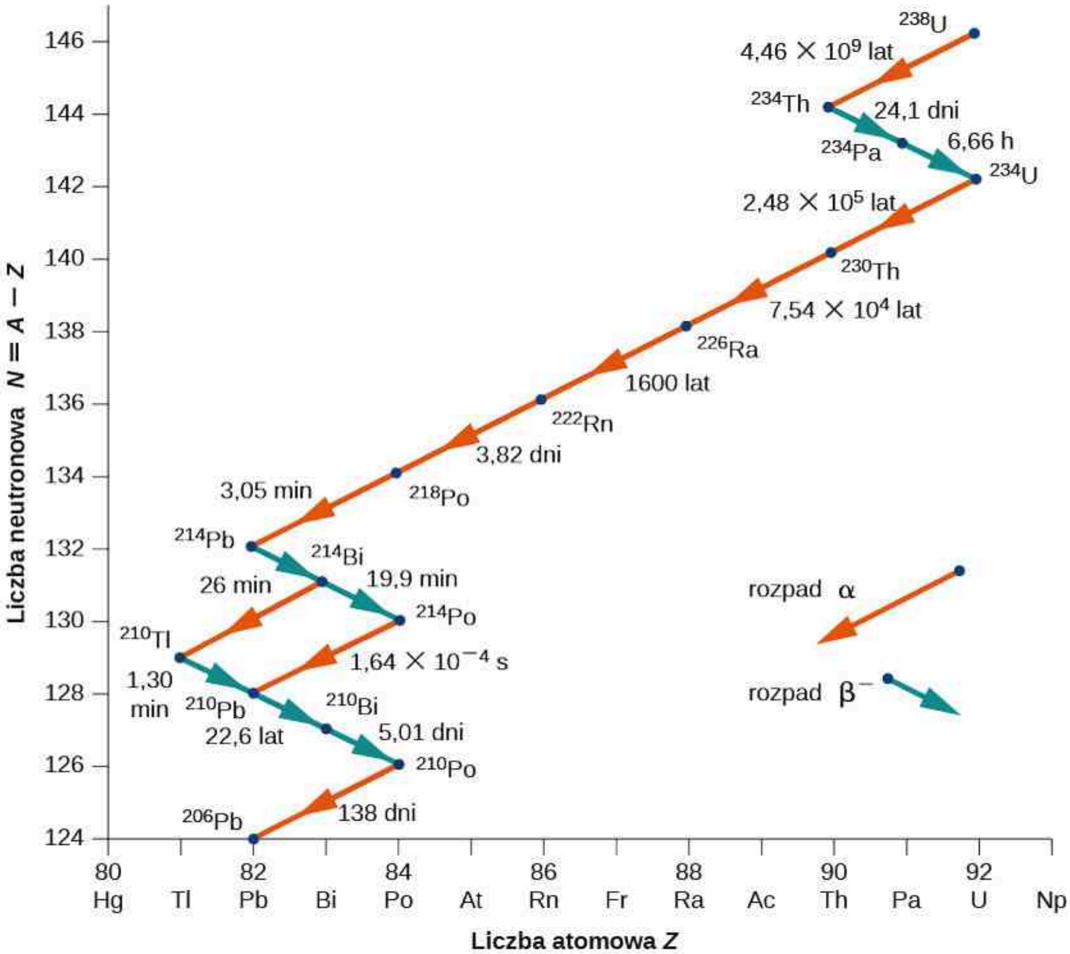
Liczba neutronowa nuklidu radu-228 wynosi 140, więc pojawia się on na wykresie w punkcie o współrzędnych $(N, Z) = (140, 88)$. Rad-228 także jest niestabilny i rozpada się przez emisję β^- z okresem połowicznego rozpadu $5{,}76$ dnia, dając aktyn-228. Liczba atomowa zwiększa się o 1, liczba masowa pozostaje bez zmian, a liczba neutronowa zmniejsza się o 1. Należy zauważyć, że na wykresie emisja cząstki α jest reprezentowana linią ukośną opadającą w lewo, odpowiadająca zmniejszeniu zarówno N , jak i Z o 2. Natomiast emisja cząstki β przedstawiona jest linią ukośną opadającą w prawo: N maleje o 1, a Z rośnie o 1. Po kilku dalszych rozpadach alfa i beta szereg kończy otrzymaniem stabilnego jądra ^{208}Pb.

Względna częstość różnych typów rozpadów promieniotwórczych (alfa, beta i gamma) zależy od wielu czynników, w tym wartości sił pojawiających się w tych procesach oraz liczby sposobów, na jakie może zajść dana reakcja bez naruszenia zasad zachowania energii i pędu. To, jak często następuje rozpad promieniotwórczy, zależy w wielu przypadkach od delikatnej równowagi oddziaływań silnych i elektromagnetycznych. Oddziaływania te zostały omówione w rozdziale Fizyka cząstek elementarnych i kosmologia.



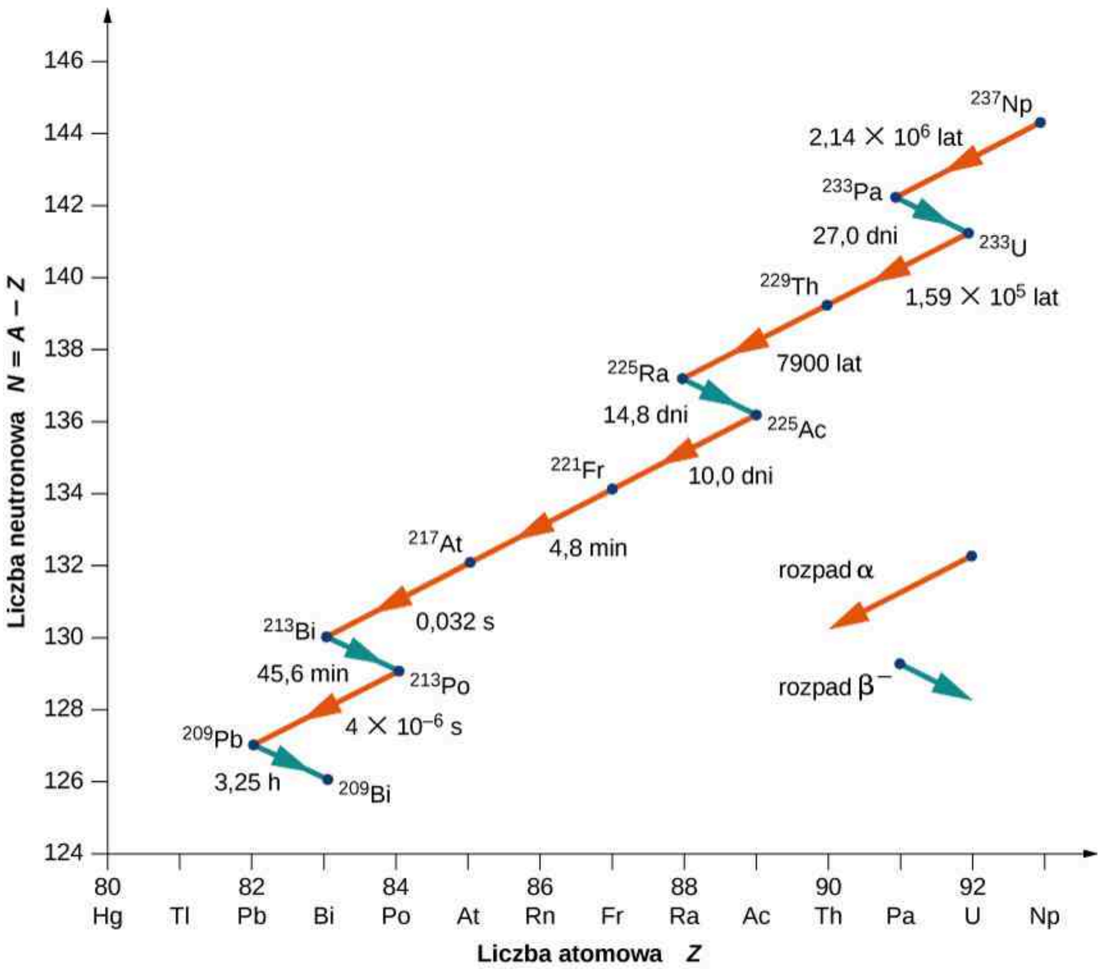
Rysunek 10.13 W szeregu promieniotwórczym toru $^{232}_{90}$Th rozpady alfa (α) zmniejszają liczbę atomową, jak pokazują czerwone strzałki. Rozpady beta (β^-) zwiększają liczbę atomową, jak wskazują niebieskie strzałki. Szereg kończy się na stabilnym jądrze ^{208}Pb.

Jako kolejny przykład rozważmy szereg promieniotwórczy ^{238}U, pokazany na Rysunku 10.14. Po licznych rozpadach alfa i beta szereg kończy się stabilnym jądrem ^{206}Pb. Przykład rozpadu, w którym jądro pierwotne nie występuje w naturze, pokazany jest na Rysunku 10.15. Szereg promieniotwórczy zaczyna się od neptunu-237 i kończy się na stabilnym jądrze bizmutu-209. Neptun jest określany jako **pierwiastek transuranowy** (ang. **transuranic element**), ponieważ położony jest poza uranem w układzie okresowym. Uran posiada najwyższą liczbą atomową $(Z = 92)$ ze wszystkich pierwiastków występujących w przyrodzie. Pierwiastki o $Z > 92$ mogą być wytwarzane jedynie w laboratorium. Prawdopodobnie występowały one także w przyrodzie w czasie powstawania Ziemi, ale z powodu ich stosunkowo krótkich czasów życia rozpadły się całkowicie. Nie ma żadnej fundamentalnej różnicy pomiędzy pierwiastkami występującymi naturalnie a pierwiastkami sztucznymi.



Rysunek 10.14 W szeregu promieniotwórczym uranu-238 rozpady alfa (α) zmniejszają liczbę atomową, jak pokazują czerwone strzałki. Rozpady beta (β^-) zwiększają liczbę atomową, jak wskazują niebieskie strzałki. Szereg kończy się na stabilnym jądrze ^{206}Pb.

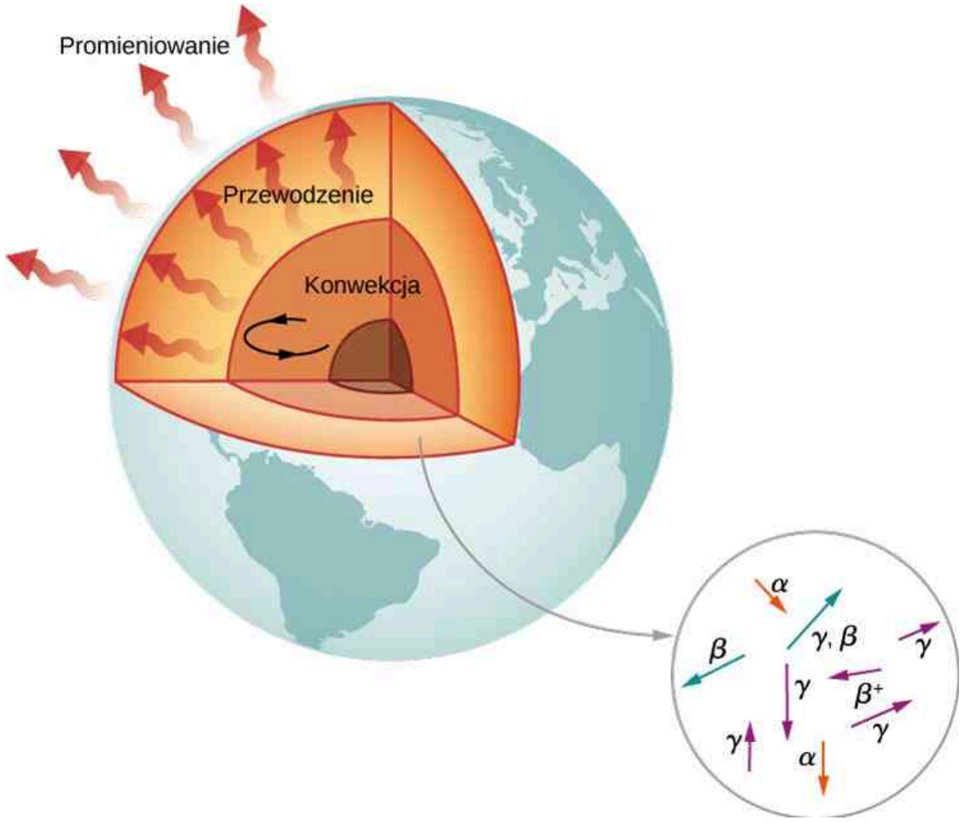
Zauważmy, że w przypadku ^{214}Bi rozpad może nastąpić zarówno w procesie alfa, jak i beta.



Rysunek 10.15 W szeregu promieniotwórczym neptunu-237 rozpady alfa (α) zmniejszają liczbę atomową, jak pokazują czerwone strzałki. Rozpady beta (β^-) zwiększają liczbę atomową, jak wskazują niebieskie strzałki. Szereg kończy się na stabilnym jądrze ^{209}Bi.

Radioaktywność Ziemi

Według geologów, gdyby Ziemia nie posiadała własnego źródła ciepła, ostygłaby do obecnej temperatury w ciągu nie więcej niż 1 mld lat. Jednak wiek Ziemi wynosi ponad 4 mld lat. Dlaczego Ziemia stygnie tak powoli? Odpowiedzią jest radioaktywność wnętrza Ziemi: wysokoenergetyczne cząstki wytwarzane w rozpadach promieniotwórczych grzeją Ziemię od środka (Rysunek 10.16).



Rysunek 10.16 Ziemia jest ogrzewana przez procesy jądrowe (rozpady alfa, beta i gamma). Bez tych reakcji jej powierzchnia byłaby znacznie chłodniejsza, niż jest teraz.

Kandydatami do tego modelu ogrzewania są jądra ^{238}U i ^{40}K, które mają okresy połowicznego rozpadu podobne do wieku Ziemi lub dłuższe. Energia wytwarzana w wyniku ich rozpadów (przypadająca na sekundę i na metr sześcienny) jest mała, ale nie może łatwo uciec, więc jądro Ziemi ma bardzo wysoką temperaturę. Energia cieplna z jądra Ziemi jest przenoszona na powierzchnię i dalej w zewnętrzną przestrzeń przez procesy konwekcji, przewodnictwa i promieniowania.

10.5 | Rozszczepienie jądra atomowego

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać proces rozszczepienia, posługując się pojęciami produktów i substratów reakcji jądrowej;
- obliczać energie cząstek wytwarzanych w reakcji rozszczepienia;
- wyjaśniać działanie bomby atomowej w kontekście rozszczepienia i reakcji jądrowych.

W 1934 roku **Enrico Fermi (1901–1954)** bombardował pierwiastki chemiczne neutronami w celu wytworzenia izotopów innych pierwiastków. Spodziewał się, że bombardowanie uranu neutronami spowoduje jego niestabilność i doprowadzi do powstania nowego pierwiastka. Niestety Fermi nie był w stanie zidentyfikować produktów tej reakcji. Kilka lat później **Otto Hahn (1879–1968)** i **Fritz Strassmann (1902–1980)** powtórzyli te eksperymenty i odkryli, że produktami reakcji były mniejsze jądra. Na tej podstawie stwierdzili, że jądro uranu rozpadło się na dwa mniejsze jądra.

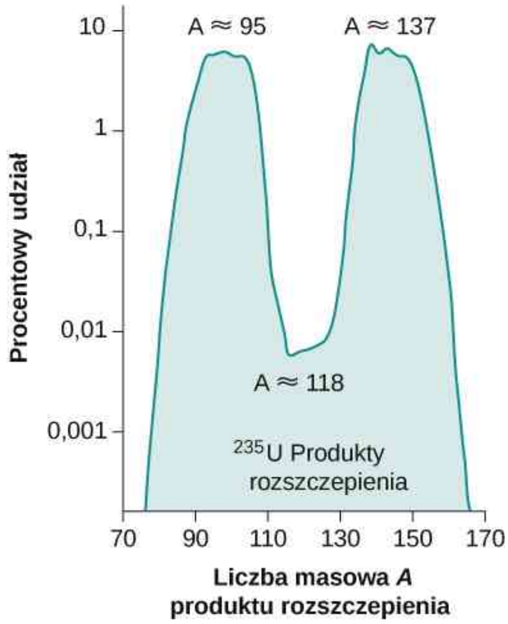
Ten rozpad jądra nazywa się **rozszczepieniem** (ang. **fission**). Co ciekawe, ^{235}U nie zawsze rozszczepia się na takie same fragmenty. Przykładowo zajść mogą następujące reakcje

$$
\begin{aligned}
{}^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} &\longrightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3{}^{1}_{0}\text{n}, \\
{}^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} &\longrightarrow {}^{140}_{54}\text{Xe} + {}^{94}_{38}\text{Sr} + 2{}^{1}_{0}\text{n}, \\
{}^{1}_{0}\text{n} + {}^{235}_{92}\text{U} &\longrightarrow {}^{132}_{50}\text{Sn} + {}^{101}_{42}\text{Mo} + 3{}^{1}_{0}\text{n}.
\end{aligned}
$$

W każdym przypadku suma mas powstałych jąder jest mniejsza niż masa rozszczepianego jądra, więc rozszczepienie uranu jest procesem egzotermicznym (w trakcie którego generowane jest ciepło). Jest to podstawą zastosowania rozszczepienia jąder jako źródła energii w reaktorach jądrowych (Rysunek 10.17). Wytwarzana energia odprowadzana jest w postaci energii kinetycznej powstających w reakcji cząstek. Procentowy udział różnych izotopów wśród produktów reakcji rozszczepienia ^{235}U ilustruje Rysunek 10.18.



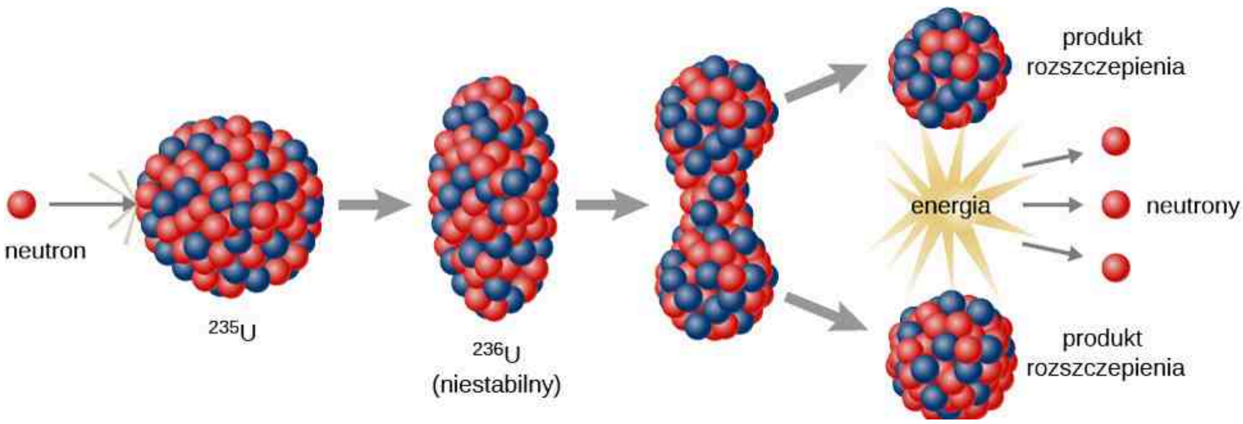
Rysunek 10.17 W reaktorach elektrowni jądrowej Philippsburg w Niemczech wytwarzana jest energia elektryczna.



Rysunek 10.18 Maksima na tym wykresie względnej częstości występowania produktów reakcji rozszczepienia ^{235}U wskazują jądra, które w procesie rozszczepienia powstają w największej liczbie.

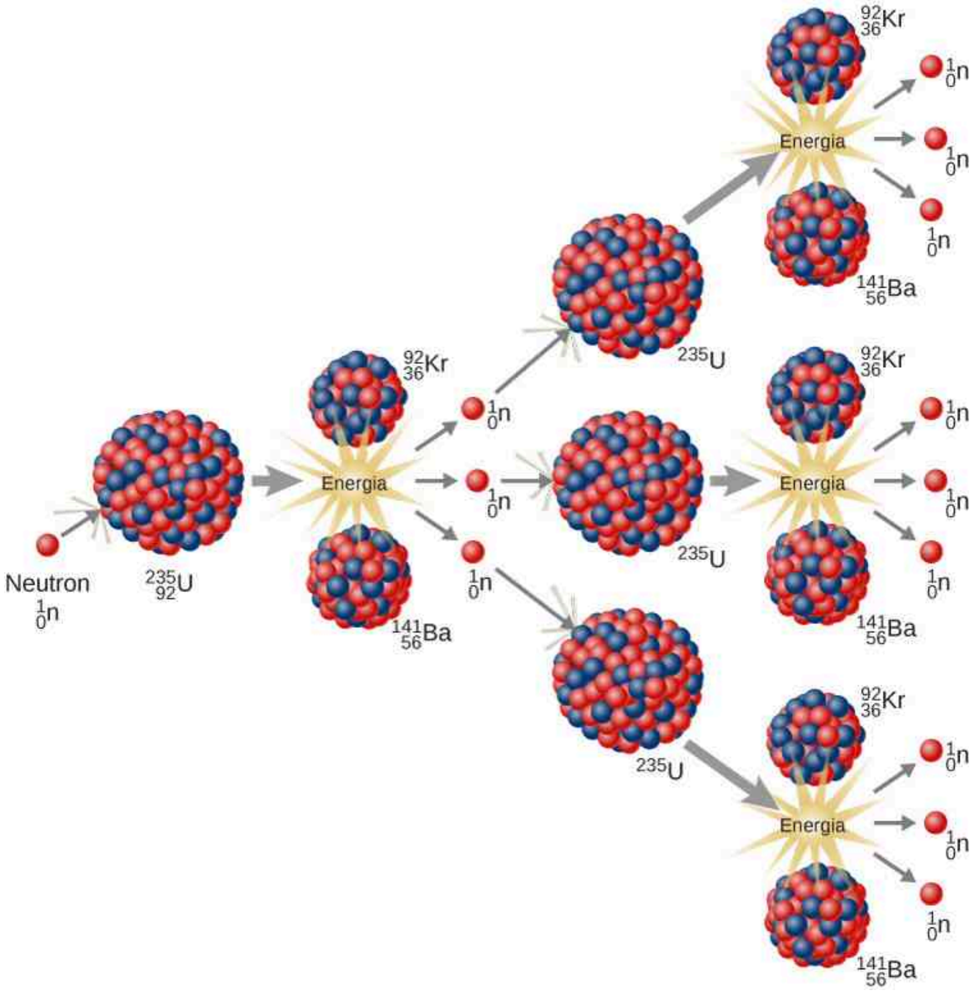
Bilans energetyczny reakcji rozszczepienia można zrozumieć na podstawie wykresu energii wiązania na nukleon (Rysunek 10.7). Wartość EWN uranu ($A = 235$) jest nieco mniejsza niż jąder powstających w wyniku rozszczepienia jego jądra, znajdujących się bliżej maksimum w pobliżu żelaza (Fe). Oznacza to, że nukleony w powstających fragmentach jądra są silniej związane niż w pierwotnym jądrze ^{235}U. W związku z tym reakcja rozszczepienia prowadzi do spadku średniej energii nukleonu. Nadwyżka energii jest unoszona przez wysokoenergetyczne neutrony.

Niels Bohr (1885–1962) i **John Wheeler (1911–2008)** opracowali **model kroplowy jądra** (ang. **liquid drop model**), który pozwala zrozumieć przebieg procesu rozszczepienia. Zgodnie z nim efekt uderzenia w jądro neutronem jest analogiczny do zaburzenia kropli wody (Rysunek 10.19). Ta analogia działa, ponieważ siły bliskiego zasięgu między nukleonami znajdującymi się w jądrze mają charakter podobny do sił przyciągania pomiędzy cząsteczkami wody w kropli. W szczególności siły między nukleonami na powierzchni jądra powodują powstanie napięcia powierzchniowego, podobnego do występującego w kropli wody. Dołączenie neutronu do jądra powoduje jego niestabilność, która może wzbudzić drgania jądra. Jeśli te drgania są wystarczająco silne, jądro dzieli się na mniejsze jądra, emitując przy tym dwa lub trzy swobodne neutrony.



Rysunek 10.19 W kroplowym modelu rozszczepienia jądro uranu rozpada się na dwa lżejsze jądra w wyniku dołączenia do jądra neutronu.

Rozszczepienie ^{235}U może prowadzić do **reakcji łańcuchowej** (ang. **chain reaction**). W materiale zawierającym wiele jąder ^{235}U neutrony powstające w wyniku rozszczepienia jednego jądra mogą inicjować rozszczepienia kolejnych jąder ^{235}U (Rysunek 10.20). Taka reakcja łańcuchowa może przebiegać w sposób kontrolowany, jak to ma miejsce w reaktorze elektrowni jądrowej, lub w sposób niekontrolowany, jak podczas wybuchu.



Rysunek 10.20 W reakcji łańcuchowej rozszczepienia ^{235}U generowane są wysokoenergetyczne neutrony, które powodują podział kolejnych jąder. Energia uwalniana w tym procesie może służyć do produkcji energii elektrycznej.

Wyświetl symulację rozszczepienia jądra atomowego (https://openstaxcollege.org/l/21nuclrfissvid) , w której możesz uruchomić reakcję łańcuchową lub wprowadzić izotopy niepromieniotwórcze, aby ją uniemożliwić. Kontroluj wytwarzanie energii w reaktorze jądrowym.

Bomba atomowa

Możliwość wystąpienia reakcji łańcuchowej w uranie z towarzyszącą jej produkcją bardzo dużych ilości energii doprowadziła fizyków jądrowych do koncepcji zbudowania bomby – **bomby atomowej** (ang. **atomic bomb**, te odkrycia miały miejsce bezpośrednio przed II wojną światową i wielu europejskich fizyków biorących udział w tych pracach było uciekinierami z nazistowskich Niemiec lub krajów przez nie okupowanych). Naturalny uran zawiera $99{,}3\%$ ^{238}U, a tylko $0{,}7\%$ ^{235}U i nie podtrzymuje reakcji łańcuchowej. Aby podtrzymać kontrolowaną reakcję łańcuchową, zawartość ^{235}U musi zostać zwiększona. Ponadto próbka uranu musi być wystarczająco masywna, by wywołanie przez typowy neutron rozszczepienia było bardziej prawdopodobne niż jego ucieczka. Minimalna masa potrzebna do reakcji łańcuchowej nosi nazwę **masy krytycznej** (ang. **critical mass**). Stan, w którym reakcja łańcuchowa w masie krytycznej materiału staje się samopodtrzymująca, określa się jako **krytyczność** (ang. **criticality**). Pierwotnie używano dwóch kawałków ^{235}U poniżej masy krytycznej. Po wstrzeleniu jednego kawałka w kształcie pocisku w drugi następowało przekroczenie masy krytycznej i rozpoczynała się reakcja łańcuchowa.

Istotną przeszkodą w konstruowaniu bomby atomowej jest konieczność uzyskania masy krytycznej materiału rozszczepialnego. Dlatego też naukowcy opracowali bombę wykorzystującą pluton-239, ponieważ ^{239}Pu jest łatwiej rozszczepialny niż ^{235}U i tym samym wymaga mniejszej masy krytycznej. Bomba miała kształt sfery z kawałkami plutonu, każdy poniżej masy krytycznej, przy powierzchni tej sfery. Za pomocą serii eksplozji chemicznych kawałki plutonu jednocześnie wstrzeliwano do środka sfery. Całkowita masa połączonych w ten sposób kawałków przekraczała masę krytyczną i rozpoczynała się reakcja łańcuchowa. Bomby zawierające ^{235}U i ^{239}Pu zostały użyte w czasie II wojny światowej. Czy uzasadniona jest produkcja i użycie broni jądrowej – to dwa spośród najważniejszych pytań, w obliczu których stoi cywilizacja.

Przykład 10.9

Obliczanie energii rozszczepienia

Obliczmy energię wyzwoloną w następującej samorzutnej reakcji rozszczepienia jądra atomowego

$$^{238}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{95}\mathrm{Sr} + {}^{140}\mathrm{Xe} + 3\mathrm{n}.$$

Masy atomowe wynoszą: $m\left({}^{238}\mathrm{U}\right) = 238{,}050\,784\,\mathrm{u}$, $m\left({}^{95}\mathrm{Sr}\right) = 94{,}919\,388\,\mathrm{u}$, $m\left({}^{140}\mathrm{Xe}\right) = 139{,}921\,610\,\mathrm{u}$ i $m\,(\mathrm{n}) = 1{,}008\,665\mathrm{u}$.

Strategia rozwiązania

Jak zawsze, uwalniana energia równa jest ubytkowi masy razy c^2, więc musimy określić różnicę mas pomiędzy rozszczepianym jądrem $^{238}\mathrm{U}$ a produktami rozszczepienia.

Rozwiązanie

Produkty mają całkowitą masę

$$m_{\text{produktów}} = 94{,}919\,388\,\mathrm{u} + 139{,}921\,610\,\mathrm{u} + 3 \cdot 1{,}008\,665\,\mathrm{u} = 237{,}866\,993\,\mathrm{u}.$$

Utrata masy jest równa $m\left({}^{238}\mathrm{U}\right) - m_{\text{produktów}}$, czyli

$$\Delta m = 238{,}050\,784\,\mathrm{u} - 237{,}866\,993\,\mathrm{u} = 0{,}183\,791\,\mathrm{u}.$$

W związku z tym uwalniana energia wynosi

$$E = \Delta mc^2 = 0{,}183\,791\,\mathrm{u} \cdot \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}}{1\,\mathrm{u} \cdot c^2} \cdot c^2 = 171{,}2\,\mathrm{MeV}.$$

Znaczenie

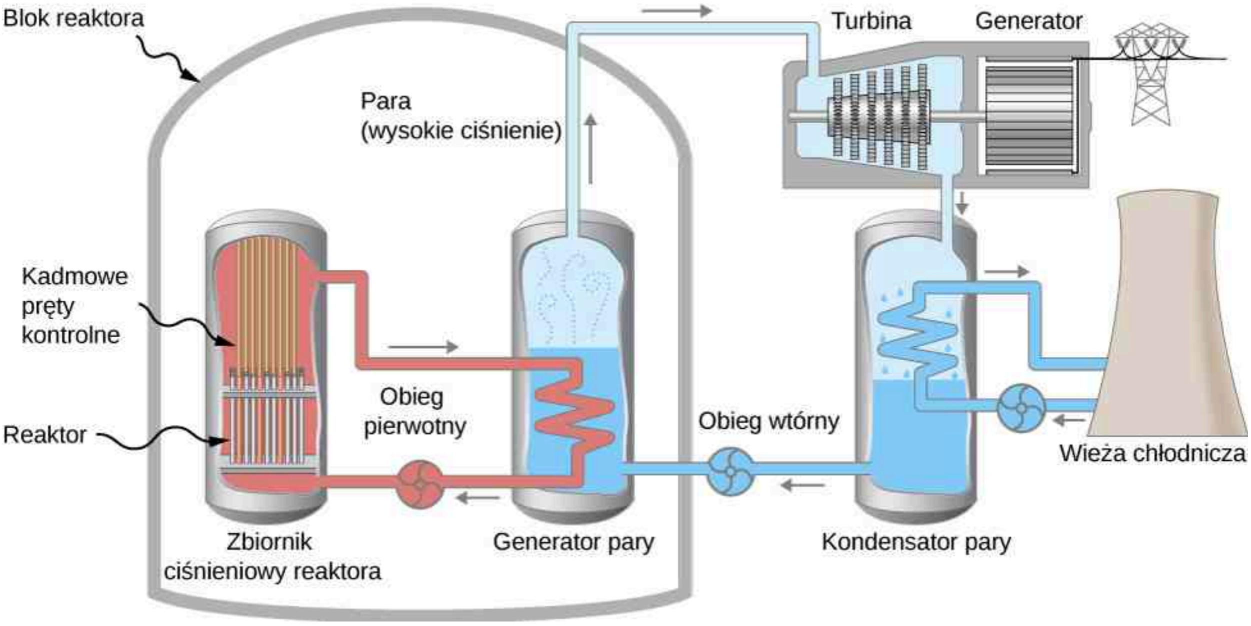
W tym przykładzie pojawia się kilka ważnych kwestii. Uwalniania energia jest duża, ale mniejsza, niż gdyby jądro podzieliło się na dwie równe części, ponieważ jest unoszona przez neutrony. W tej reakcji rozszczepienia powstają neutrony, a jądro nie rozpada się na dwie równe części. W rozszczepieniu danego nuklidu, np. $^{238}\mathrm{U}$, nie zawsze powstają te same produkty. Rozszczepienie jest procesem losowym, w którym może powstać wiele różnych produktów z różnym prawdopodobieństwem. W większości procesów rozszczepienia powstają neutrony, choć ich liczba może być różna. Jest to niezwykle ważny aspekt rozszczepienia, ponieważ neutrony mogą wywołać dalsze reakcje rozszczepienia, umożliwiając samopodtrzymujące się reakcje łańcuchowe.

Reaktory jądrowe

Pierwszy **reaktor jądrowy** (ang. **nuclear reactor**) został zbudowany przez Enrico Fermiego na korcie do squasha na terenie kampusu Uniwersytetu w Chicago 2 grudnia 1942 r. Zawierał $^{238}\mathrm{U}$ wzbogacony o 3,6% uranu-235. Neutrony produkowane w reakcji łańcuchowej poruszają się zbyt szybko, by zainicjować reakcję rozszczepienia. Jednym ze sposobów, aby je spowolnić, jest otoczenie całego reaktora łaźnią wodną pod wysokim ciśnieniem. Neutrony zderzają się z cząsteczkami wody i są w ten sposób wystarczająco spowalniane (termalizowane), by wziąć udział w procesie rozszczepienia. Spowolnione (termiczne) neutrony rozszczepiają więcej jąder $^{235}\mathrm{U}$ i następuje reakcja łańcuchowa. Szybkość, z jaką zachodzi, jest kontrolowana przez układ kadmowych prętów sterujących, wstawionych do reaktora. Kadm jest w stanie pochłonąć dużą liczbę neutronów bez utraty stabilności.

Konstrukcję reaktora jądrowego, o nazwie reaktor wodny ciśnieniowy, można również wykorzystać do generowania energii elektrycznej (Rysunek 10.21). Reaktor wodny ciśnieniowy (po lewej stronie na rysunku) jest przeznaczony do kontrolowanego rozszczepiania dużych ilości $^{235}\mathrm{U}$. Energia uwalniana w tym procesie ulega pochłonięciu przez wodę przepływającą przez umieszczone w układzie rury (obieg pierwotny), w wyniku tego wytwarzana jest para. Kadmowe pręty sterujące regulują wielkość strumienia neutronów (gęstość strumienia neutronów przechodzących przez układ), i w ten sposób sterują reakcją. W przypadku przegrzania reaktora i zagotowania się wody reakcja łańcuchowa ustaje, ponieważ woda jest niezbędna do termalizacji neutronów; ten mechanizm bezpieczeństwa może nie zadziałać w okolicznościach ekstremalnych. Gorąca woda pod wysokim ciśnieniem przepływa następnie rurą do drugiego zbiornika wody o normalnym ciśnieniu, znajdującego się w wytwornicy pary. Para wytworzona w wytwornicy

wypełnia komorę, która zawiera turbinę. Para znajduje się pod bardzo wysokim ciśnieniem. Tymczasem skraplacz pary, podłączony do przeciwległej części komory turbiny, utrzymuje niskie ciśnienie pary. Różnica ciśnień wymusza przepływ pary przez komorę, powodując obrót turbiny. Z kolei turbina napędza generator elektryczny.



Rysunek 10.21 Reaktor jądrowy wykorzystuje energię pochodzącą z rozszczepienia ^{235}U do produkcji energii elektrycznej. Energia z reakcji rozszczepienia wytwarza gorącą parę pod wysokim ciśnieniem, która obraca turbinę. Dzięki obrotom turbiny wytwarzana jest energia elektryczna.

Główną wadą reaktorów jądrowych jest powstawanie odpadów jądrowych. Rozszczepienie ^{235}U prowadzi do powstania jąder o długim okresie połowicznego rozpadu, takich jak technet-99, które muszą być jakoś przechowywane. Materiałów tych nie można po prostu zrzucić do oceanów lub pozostawić w miejscu, w którym powodowałyby skażenie środowiska: gleby, powietrza lub wody. Wielu naukowców uważa, że najlepszymi miejscami do przechowywania odpadów jądrowych są dna starych kopalń soli lub wnętrza stabilnych gór.

Wielu ludzi obawia się, że reaktor jądrowy może wybuchnąć niczym bomba atomowa. Jednak reaktor jądrowy nie zawiera wystarczającej ilości ^{235}U, aby mogło do tego dojść. Ponadto reaktor jądrowy jest zaprojektowany tak, że awaria jakiegokolwiek jego mechanizmu powoduje całkowite opadnięcie prętów kadmowych do wnętrza, co powoduje zatrzymanie procesu rozszczepienia. Jak wynika z katastrof w Fukushimie i Czarnobylu, takie systemy mogą zawieść. Systemy i procedury pozwalające uniknąć takich katastrof są priorytetem dla zwolenników energii jądrowej.

Gdyby cała energia elektryczna była produkowana przez rozszczepienie ^{235}U, wszystkie znane ziemskie rezerwy uranu zostałyby wyczerpane w ciągu niecałego stulecia. Ziemskie zasoby materiału rozszczepialnego można jednak znacząco powiększyć, używając **reaktorów powielających** (ang. **breeder reactor**). W reaktorze powielającym zachodzi rozszczepienie ^{235}U, tak jak w opisanym wyżej reaktorze wodnym ciśnieniowym. Ale oprócz produkcji energii niektóre spośród neutronów prędkich (niestermalizowanych), pochodzących z rozszczepienia ^{235}U, są pochłaniane przez ^{238}U, w wyniku czego powstaje ^{239}Pu poprzez ciąg reakcji

$$^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{238}_{92}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{239}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{92}\mathrm{Np} \xrightarrow{\beta} {}^{239}_{94}\mathrm{Pu}\,.$$

^{239}Pu jest wysoce rozszczepialny, może zatem posłużyć jako paliwo jądrowe zamiast ^{235}U. Ponieważ $99{,}3\%$ naturalnie występującego uranu to izotop ^{238}U, zastosowanie reaktorów powielających powinno około stukrotnie zwiększyć nasze zasoby paliwa jądrowego. Reaktory powielające pracują obecnie w Wielkiej Brytanii, Francji i Rosji. Reaktory powielające mają również wady. Po pierwsze, wytwarzają pluton, który, jeśli przedostanie się do środowiska, może spowodować poważne zagrożenie dla zdrowia publicznego. Po drugie, pluton może posłużyć do budowy bomb, co znacznie zwiększa ryzyko rozprzestrzeniania broni jądrowej.

Przykład 10.10

Obliczanie energii z paliwa rozszczepialnego

Obliczmy ilość energii wytwarzanej w procesie rozszczepienia $1\ \mathrm{kg}$ ^{235}U, biorąc pod uwagę, że reakcja rozszczepienia ^{235}U generuje średnio $200\ \mathrm{MeV}$ energii.

Strategia rozwiązania

Całkowita wytworzona energia równa jest liczbie atomów ^{235}U pomnożonej przez podaną energię na jedno rozszczepienie ^{235}U. Należy zatem określić liczbę atomów ^{235}U w $1\,kg$ tego pierwiastka.

Rozwiązanie

Liczba atomów ^{235}U w $1\,kg$ równa jest liczbie Avogadra pomnożonej przez liczbę moli. Jeden mol ^{235}U ma masę $235{,}04\,g$; mamy zatem $1000\,g\ /\ (235{,}04\,g\ /\ mol) = 4{,}25\,mol$. Liczba atomów ^{235}U jest zatem równa

$$4{,}25\,mol \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\,mol^{-1} = 2{,}56 \cdot 10^{24}.$$

Tak więc całkowita uwolniona energia wynosi

$$E = 2{,}56 \cdot 10^{24} \cdot 200\,MeV \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-13}\,J}{1\,MeV} = 8{,}21 \cdot 10^{13}\,J.$$

Znaczenie

Jest to kolejna imponująca ilości energii, równoważna około 2,2 mln litrów ropy naftowej lub ponad 2 mln litrów benzyny. Jest to jednak tylko jedna czwarta energii wytwarzanej w fuzji jądrowej jednego kilograma mieszaniny deuteru i trytu. Mimo że każda reakcja rozszczepienia generuje blisko 10 razy więcej energii niż reakcja syntezy, to jednak energia na kilogram paliwa rozszczepialnego jest mniejsza, ponieważ na kilogram ciężkich nuklidów przypada znacznie mniej moli substancji. Paliwa rozszczepialnego jest również znacznie mniej niż paliwa dla syntezy jądrowej – mniej niż 1% uranu (tylko izotop ^{235}U) nadaje się do bezpośredniego wykorzystania.

10.5 Sprawdź, czy rozumiesz. Czy zysk energetyczny na jedną reakcję syntezy jądrowej jest większy dla małej, czy dla dużej o próbki czystego ^{235}U?

10.6 | Fuzja jądrowa

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać proces syntezy jądrowej, używając pojęć produktów i substratów reakcji syntezy;
- obliczać energie cząstek powstających w reakcji termojądrowej;
- wyjaśniać pojęcie syntezy jądrowej w kontekście bomb wodorowych, produkcji energii przez Słońce oraz nukleosyntezy.

Proces łączenia lżejszych jąder w jądra cięższe nazywa się **syntezą jądrową** lub **fuzją jądrową** albo **reakcją termojądrową** (ang. **nuclear fusion**). Podobnie jak reakcje rozszczepienia synteza jądrowa jest egzotermiczna – w jej wyniku wydziela się energia. Załóżmy, że łączymy jądra węgla i helu, tworząc tlen

$$^{12}_{6}C + {}^{4}_{2}He \longrightarrow {}^{16}_{8}O + \gamma.$$

Bilans energii w tej reakcji można zrozumieć, korzystając z wykresu energii wiązania na nukleon (Rysunek 10.7). Porównanie energii wiązania na nukleon dla tlenu, węgla i helu prowadzi do wniosku, że jądro tlenu jest znacznie silniej związane niż jądra węgla i helu, a więc reakcja prowadzi do zmniejszenia energii układu. Energia ta jest emitowana w formie promieniowania γ.

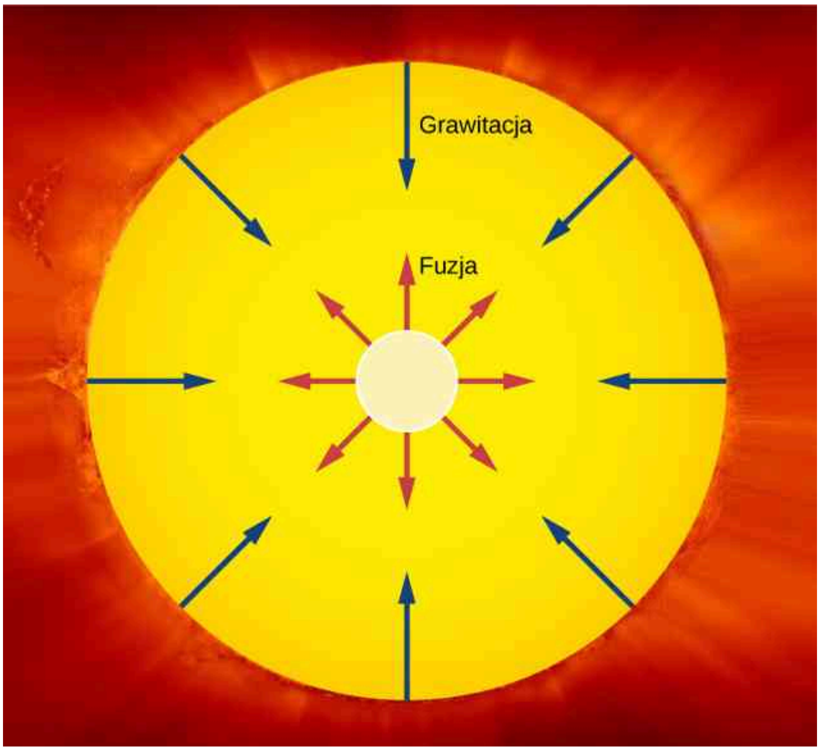
Ważnym przykładem syntezy jądrowej w przyrodzie jest produkcja energii w Słońcu. W 1939 roku **Hans Bethe (1906–2005)** zaproponował model, w którym Słońce produkuje energię, gdy jądra wodoru (^{1}H) łączą się w stabilne jądra helu (^{4}He) w jądrze Słońca (Rysunek 10.22). Ten proces, nazywany **cyklem protonowym** (ang. **proton-proton chain**), odpowiada trzem reakcjom

$$\begin{aligned} {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H} &\longrightarrow {}^{2}_{1}\text{H} + {}^{0}_{1}\text{e} + \nu, \\ {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} &\longrightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + \gamma, \\ {}^{3}_{2}\text{He} + {}^{3}_{2}\text{He} &\longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H}. \end{aligned}$$

W taki sposób w wyniku syntezy jąder wodoru powstaje stabilne jądro helu. Te trzy reakcje można zapisać w łącznej postaci

$$4{}^{1}_{1}\text{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + 2{}^{0}_{1}\text{e} + 2\gamma + 2\nu.$$

Całkowita energia wydzielona podczas tej reakcji wynosi około $26\,\text{MeV}$. Uwolnienie jej wytwarza skierowane na zewnątrz termiczne ciśnienie gazu, które zapobiega grawitacyjnemu zapadnięciu się Słońca. Astrofizycy ustalili, że fuzja wodorowa dostarcza gwiazdom energii niezbędnej do utrzymania równowagi energetycznej przez większość ich życia.



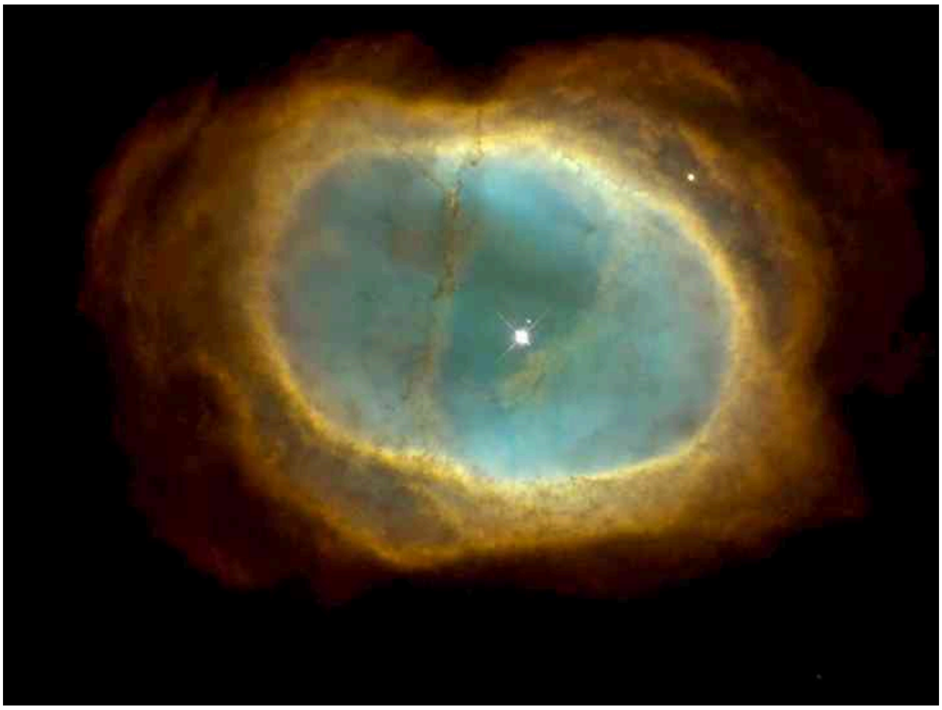
Rysunek 10.22 Słońce produkuje energię przez fuzję wodoru w hel w swoim jądrze. Wysokie ciśnienie gazu sprawia, że jądro ma skłonność do ekspansji (czerwone strzałki). Ciśnienie to zapobiega zapadaniu się Słońca spowodowanemu przez ściskające je siły grawitacji (niebieskie strzałki). Oba te czynniki równoważą się wzajemnie.

Nukleosynteza

Naukowcy uważają obecnie, że wiele ciężkich pierwiastków na Ziemi i w całym Wszechświecie zostało pierwotnie zsyntetyzowanych w procesach fuzji jądrowej w gorących jądrach gwiazd. Proces ten jest znany jako **nukleosynteza** (ang. **nucleosynthesis**). Przykładowo w lżejszych gwiazdach wodór łączy się (spala), tworząc jądra helu w cyklu protonowym. Po wyczerpaniu paliwa wodorowego, gwiazda wchodzi w kolejny etap swojego życia i rozpoczyna fuzję (spalanie) helu. Oto przykład możliwego łańcucha reakcji jądrowych

$$\begin{aligned} {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{4}_{2}\text{He} &\longrightarrow {}^{8}_{4}\text{Be} + \gamma, \\ {}^{8}_{4}\text{Be} + {}^{4}_{2}\text{He} &\longrightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + \gamma, \\ {}^{12}_{6}\text{C} + {}^{4}_{2}\text{He} &\longrightarrow {}^{16}_{8}\text{O} + \gamma. \end{aligned}$$

Jądra węgla i tlenu wytwarzane w takich procesach ostatecznie docierają do powierzchni gwiazdy przez konwekcję. Pod koniec życia gwiazda traci swoje zewnętrzne warstwy, które ulatują w przestrzeń kosmiczną, wzbogacając tym samym ośrodek międzygwiazdowy w jądra cięższych pierwiastków (Rysunek 10.23).



Rysunek 10.23 Pod koniec życia gwiazdy wytwarza się mgławica planetarna. Zielonkawy kolor tej mgławicy pochodzi od jonów tlenu.

Gwiazdy o masie zbliżonej do masy Słońca nie stają się wystarczająco gorące, aby spalać w procesie fuzji jądra tlenu lub cięższe. Jednak w masywnych gwiazdach, których rdzenie osiągają dużo wyższe temperatury ($T > 6 \cdot 10^8 \text{ K}$), wytwarzane są nawet bardziej złożone jądra. Typowymi reakcjami są

$$
\begin{aligned}
{}^{12}_{6}\text{C} + {}^{12}_{6}\text{C} &\longrightarrow {}^{23}_{11}\text{Na} + {}^{1}_{1}\text{H}, \\
{}^{12}_{6}\text{C} + {}^{12}_{6}\text{C} &\longrightarrow {}^{24}_{12}\text{Mg} + \gamma, \\
{}^{12}_{6}\text{C} + {}^{16}_{8}\text{O} &\longrightarrow {}^{28}_{14}\text{Si} + \gamma.
\end{aligned}
$$

Nukleosynteza trwa do momentu, gdy jądro złożone jest głównie z żelaza i niklu. Żelazo ma tę szczególną właściwość, że każda reakcja syntezy jądrowej lub rozszczepienia, w której bierze udział jego jądro, jest endotermiczna, co oznacza, że energia jest w niej pochłaniana, a nie wytwarzana. W związku z tym nie można generować energii jądrowej w jądrze bogatym w żelazo. Wobec braku skierowanego na zewnątrz parcia wynikającego z ciśnienia podtrzymywanego reakcjami syntezy jądrowej gwiazda zaczyna się grawitacyjnie zapadać. Proces ten ogrzewa jądro do temperatury rzędu $5 \cdot 10^9 \text{ K}$. Rozchodzące się na zewnątrz fale uderzeniowe, wygenerowane we wnętrzu gwiazdy w wyniku grawitacyjnej zapaści, powodują szybką eksplozję gwiazdy. Jej jasność może na pewien czas zwiększyć się do wartości typowych dla całej galaktyki. W toku tego procesu strumień wysokoenergetycznych neutronów reaguje z jądrami żelaza i innych pierwiastków, prowadząc do wytworzenia pierwiastków cięższych od żelaza. Te pierwiastki wraz z dużą częścią gwiazdy są wyrzucane w kosmos w wyniku eksplozji. Takie supernowe obok tworzenia mgławic planetarnych odgrywają główną rolę w rozproszeniu pierwiastków chemicznych w kosmosie.

Ostatecznie większość materiału utraconego przez gwiazdy jest skupiana przez siły grawitacyjne i daje początek nowej generacji gwiazd i towarzyszących im planet. Najnowsze zdjęcia z teleskopu Hubble’a dają wgląd w ten wspaniały proces, zachodzący w gwiazdozbiorze Węża (Rysunek 10.24). Nowa generacja gwiazd rozpoczyna proces nukleosyntezy na nowo, z większą początkową zawartością cięższych pierwiastków. W ten sposób gwiazdy są fabrykami pierwiastków chemicznych, a wiele atomów tworzących nasze ciała było kiedyś częścią gwiazdy.



Rysunek 10.24 To zdjęcie, wykonane przez należący do NASA Kosmiczny Teleskop Spitzera oraz teleskopy projektu Two Micron All Sky Survey (2MASS), pokazuje jądro mgławicy w Wężu – region formowania się gwiazd w gwiazdozbiorze Węża. To skupisko gwiazd, odległe o około 750 lat świetlnych od Ziemi, utworzone jest ze stygnącego pyłu i gazów. Do identyfikacji najmłodszych gwiazd, przedstawionych tu w kolorach pomarańczowym i żółtym, zastosowano obserwację w podczerwieni. Źródło: NASA/JPL-Caltech/2MASS

Przykład 10.11

Energia Słońca

Moc wyjściowa Słońca wynosi około $3{,}8 \cdot 10^{26}\ \text{W}$. Większość jest produkowana w jądrze Słońca w cyklu protonowym. Ta energia jest przekazywana na zewnątrz przez konwekcję i promieniowanie.

a. Jak wiele reakcji syntezy musi zajść w ciągu sekundy, by dostarczyć mocy emitowanej przez Słońce?
b. Z jaką szybkością zmniejsza się masa Słońca?
c. Mniej więcej za pięć miliardów lat w jądrze Słońca wyczerpie się wodór. O jaki procent masa Słońca zmniejszy się w stosunku do jej aktualnej wartości, gdy do tego dojdzie?

Strategia rozwiązania

Ilość emitowanej energii na sekundę jest podana w treści zadania. Jeśli wiemy, ile energii wyzwalane jest w każdej reakcji syntezy jądrowej, to możemy określić liczbę reakcji syntezy. Jeśli wiadomo, jaka jest utrata masy w każdej reakcji syntezy, znana jest też szybkość utraty masy. Pomnożenie tej szybkości przez pięć miliardów lat daje całkowitą masę utraconą przez Słońce. Otrzymaną wartość należy podzielić przez początkową masę Słońca, aby określić procentową utratę masy do momentu spalenia wodoru.

Rozwiązanie

a. Ubytek masy dla reakcji termojądrowej

$$\begin{aligned}\Delta m &= 4\,m\left({}^{1}_{1}\text{H}\right) - m\left({}^{4}_{2}\text{He}\right) - 2\,m\left({}^{0}_{1}\text{e}\right)\\ &= 4 \cdot 1{,}007\,825\,\text{u} - 4{,}002\,603\,\text{u} - 2 \cdot 0{,}000\,549\,\text{u} = 0{,}0276\,\text{u}.\end{aligned}$$

$$Q = 0{,}0276\,\text{u} \cdot 931{,}49\,\text{MeV} / \text{u} = 25{,}7\,\text{MeV}.$$

W związku z tym, aby dostarczyć $3{,}8 \cdot 10^{26}\ \text{W} = 2{,}38 \cdot 10^{39}\ \text{MeV} / \text{s}$, musi zajść

$$\frac{2{,}38 \cdot 10^{39}\ \text{MeV} / \text{s}}{25{,}7\,\text{MeV} / \text{reakcję}} = 9{,}26 \cdot 10^{37}\ \text{reakcji} / \text{s}.$$

b. Masa Słońca zmniejsza się o $0{,}0276\,\text{u} = 4{,}58 \cdot 10^{-29}\ \text{kg}$ na jedną reakcję termojądrową, więc szybkość, z jaką zmniejsza się jego masa, wynosi

$$9{,}26 \cdot 10^{37}\ \text{reakcji} / \text{s} \cdot 4{,}58 \cdot 10^{-29}\ \text{kg} / \text{reakcję} = 4{,}24 \cdot 10^{9}\ \text{kg} / \text{s}.$$

c. W czasie $5 \cdot 10^{9}$ lat $= 1{,}6 \cdot 10^{17}\ \text{s}$ masa Słońca zmniejszy się więc o

$$\Delta M = 4{,}24 \cdot 10^9\,\mathrm{kg}\,/\,\mathrm{s} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{s} = 6{,}8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}\,.$$

Obecna masa Słońca to około $2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$, więc procentowy spadek jego masy, kiedy wyczerpie się jego paliwo wodorowe, będzie wynosił

$$\frac{6{,}8 \cdot 10^{26}\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}} \cdot 100\% = 0{,}034\%.$$

Znaczenie

Za pięć miliardów lat Słońce będzie miało masę niemal identyczną jak teraz. Spalanie wodoru ma bardzo mały wpływ na masę Słońca. Przeprowadzone obliczenia zakładają, że jedynym źródłem mocy Słońca jest cykl protonowy.

10.6 Sprawdź, czy rozumiesz. Skąd pochodzi energia Słońca?

Bomba wodorowa

W roku 1942 **Robert Oppenheimer (1904–1967)** zasugerował, że bardzo wysoka temperatura wybuchu bomby atomowej może służyć do wyzwolenia reakcji syntezy termojądrowej deuteru i trytu, tworząc tym samym podstawy teoretyczne pod budowę bomby wodorowej. Reakcję pomiędzy deuterem i trytem (oba są izotopami wodoru) opisuje równanie

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} + 17{,}6\,\mathrm{MeV}\,.$$

Deuteru jest stosunkowo dużo w wodach oceanów, ale tryt praktycznie nie występuje w przyrodzie. Można go jednak wytwarzać w reaktorze jądrowym, w reakcji z udziałem litu. Neutrony z reaktora wywołują reakcję

$$^{1}_{0}\mathrm{n} + {}^{7}_{3}\mathrm{Li} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{0}\mathrm{n},$$

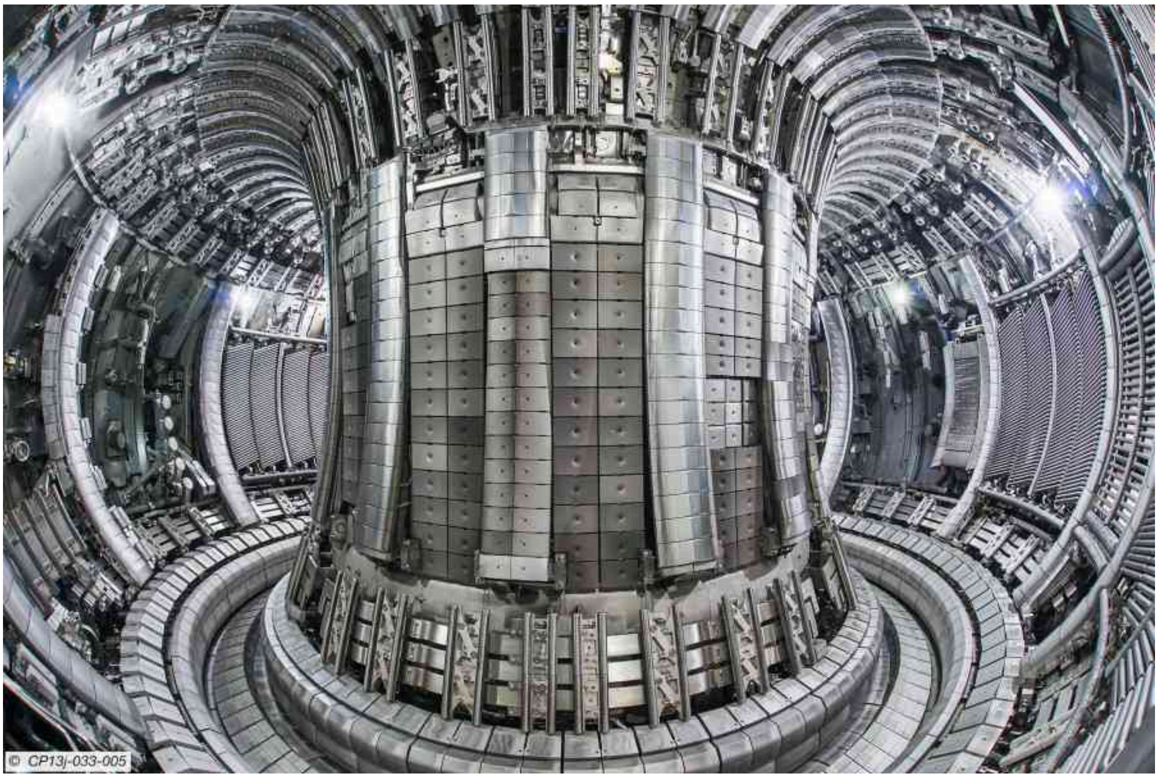
prowadzącą do powstania trytu. Pierwsza bomba wodorowa wybuchła w roku 1952 na odległej wyspie Eniwetok w archipelagu Wysp Marshalla. Bomby wodorowej nigdy nie użyto w czasie działań wojennych. Energia wybuchu współczesnych bomb wodorowych jest około 1000 razy większa niż bomb atomowych zrzuconych na Hiroszimę i Nagasaki w czasie II wojny światowej.

Reaktor termojądrowy

Ciąg reakcji syntezy jądrowej, uważany za najbardziej przydatny do wykorzystania w przyszłym **reaktorze termojądrowym** (ang. **fusion reactor**), to opisany opisany poniżej dwuetapowy proces. Pierwsze dwa równania opisują pierwszy etap syntezy, ostatnie równanie przedstawia drugi etap

$$\begin{aligned}
&^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}\mathrm{H}\ (50\%),\\
&^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{2}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}\ (50\%),\\
&^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \longrightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}.
\end{aligned}$$

W tym ciągu reakcji, podobnie jak w cyklu protonowym, energia wytwarzana jest bez żadnego radioaktywnego produktu ubocznego (wytwarzane są natomiast neutrony, które w trakcie zderzeń z materiałem osłony mogą zmieniać go w izotopy promieniotwórcze). Istnieje jednak bardzo trudny problem, który trzeba pokonać, by synteza jądrowa mogła posłużyć do wytwarzania znacznych ilości energii: do przeprowadzenia procesu syntezy potrzebne są ekstremalnie wysokie temperatury ($\sim 10^7\,\mathrm{K}$). Aby sprostać temu wyzwaniu, tworzone są reaktory termojądrowe, w których reakcja przebiega w pewnej odległości od ścianek, bo nie istnieją materiały odporne na temperatury 20 razy wyższe od panujących w jądrze Słońca. Przykładem jest Joint European Torus (JET, Rysunek 10.25), a także budowany od 2011 r. eksperymentalny międzynarodowy reaktor ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor). Technologia reaktorów termojądrowych będzie jeszcze wymagać wiele pracy, lecz wielu naukowców przewiduje, że właśnie energia termojądrowa stanie się w przyszłości źródłem energii elektrycznej dla świata.



Rysunek 10.25 Tokamak w reaktorze termojądrowym Joint European Torus (JET) wykorzystuje pole magnetyczne do utrzymywania jąder deuteru i trytu w czasie fuzji jądrowej. Źródło: EUROfusion

10.7 | Skutki biologiczne i zastosowania medyczne promieniowania jądrowego

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

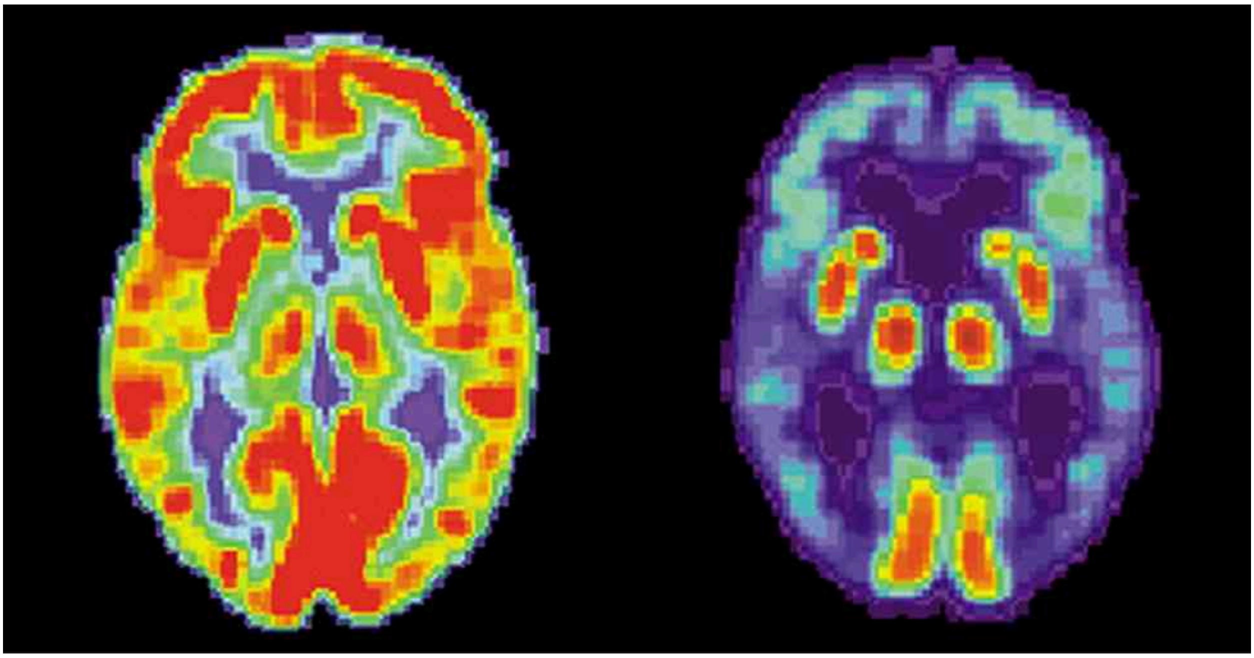
- dwóch medycznych zastosowań techniki jądrowej;
- wyjaśniać pochodzenie biologicznych skutków promieniowania jądrowego;
- jakie są najczęściej występujące źródła promieniowania i ich skutki;
- oceniać narażenie na promieniowanie jądrowe, używając standardowych jednostek dla dawek promieniowania.

Fizyka jądrowa jest nieodłączną częścią naszego codziennego życia. Radioaktywne związki są używane w diagnozowaniu nowotworów, do badań starożytnych znalezisk i do zasilania w energię naszych miast. Synteza jądrowa to również podstawa produkcji energii przez Słońce, główne źródło dla Ziemi. Najważniejszym tematem tego rozdziału jest promieniowanie jądrowe; zajmujemy się w nim takimi zagadnieniami, jak: zastosowanie promieniowania jądrowego dla dobra społeczeństwa, zagrożenia dla zdrowia wiążące się z promieniowaniem oraz dawki promieniowania jądrowego, na jakie narażony jest w ciągu swojego życia przeciętny człowiek.

Zastosowania medyczne

Medyczne użycia promieniowania jądrowego są dość powszechne we współczesnych szpitalach i przychodniach. Jednym z najważniejszych zastosowań promieniowania jądrowego jest lokalizacja i badanie zmienionej chorobowo tkanki. Metoda ta wymaga specjalnego leku, określanego jako **radiofarmaceutyk** (ang. **radiopharmaceutical**). Radiofarmaceutyk zawiera izotop promieniotwórczy o krótkim czasie połowicznego rozpadu. Gdy dostanie się do organizmu, ma tendencję do koncentrowania się w objętych zmianami chorobowymi częściach ciała. (Radiofarmaceutyk jest to substancja chemiczna naturalnie wykorzystywana przez badany narząd (np. naturalną substancją, którą wyko-

rzystuje mózg jest glukoza), tyle że zawierająca promieniotwórczy izotop. Izotop ten rozpadając się, emituje promieniowanie, które jest rejestrowane na obrazach z urządzeń diagnostycznych takich jak tomograf komputerowy). Detektory promieniowania rozmieszczone poza ciałem określają położenie chorej tkanki za pomocą promieniowania jądrowego pochodzącego z radioizotopów. Radiofarmaceutyki nazywa się **znacznikami promieniotwórczymi** (ang. **radioactive tags**), ponieważ umożliwiają one lekarzom śledzenie przemieszczania się leku w organizmie. Znaczniki radioaktywne mogą mieć wiele zastosowań, np. identyfikację komórek rakowych w kości, guzów mózgu i choroby Alzheimera (Rysunek 10.26). Znaczniki radioaktywne są również używane do monitorowania funkcji narządów ciała, takich jak przepływ krwi, czynność mięśnia serca i wychwyt jodu w tarczycy.



Rysunek 10.26 Te obrazy mózgu zostały wytworzone przy użyciu radiofarmaceutyku. Kolory wskazują względną aktywność metaboliczną lub biochemiczną (kolor czerwony oznacza wysoką aktywność, a niebieski – aktywność niską). Rysunek po lewej stronie pokazuje normalny mózg człowieka, a rysunek po prawej – mózg osoby z rozpoznaną chorobą Alzheimera. Obraz zdrowego mózgu wykazuje dużo większą aktywność metaboliczną (większy udział obszarów czerwonych i pomarańczowych). Źródło: National Institutes of Health, USA

Tabela 10.2 zawiera listę niektórych zastosowań farmaceutycznych preparatów promieniotwórczych (radiofarmaceutyków) w diagnostyce medycznej, z wyszczególnieniem izotopów, oraz typowe poziomy aktywności. W jednym z powszechnie stosowanych testów diagnostycznych wykorzystuje się jod do obrazowania tarczycy, ponieważ ów pierwiastek gromadzi się w tym narządzie. Innym często stosowanym postępowaniem diagnostyki nuklearnej jest skan układu krążenia za pomocą promieniotwórczego talu, ujawniający zatory w tętnicach wieńcowych i obrazujący aktywność serca. W tym zabiegu można wykorzystać sól TlCl, ponieważ zachowuje się ona jak NaCl i krąży wraz z krwią. Warto zauważyć, że Tabela 10.2 zawiera wiele zastosowań diagnostycznych ^{99m}Tc, gdzie „m” oznacza metastabilny stan jądra technetu. Izotop ten jest wykorzystywany w wielu związkach do obrazowania szkieletu, serca, płuc i nerek. Około 80% wszystkich radiofarmaceutyków zawiera ^{99m}Tc, ponieważ nuklid ten emituje jedną, łatwą do identyfikacji linię promieniowania γ o energii $0{,}142\ \mathrm{MeV}$ i ma krótki okres połowicznego rozpadu wynoszący 6 godzin, co zmniejsza narażenie na promieniowanie.

Procedura, izotop	**Aktywność** $(10^7\ \mathrm{Bq})$	**Procedura, izotop**	**Aktywność** $(10^7\ \mathrm{Bq})$
Scyntygrafia mózgu		*Scyntygrafia tarczycy*	
^{99m}Tc	28	^{131}I	0,19
^{15}O (PET)	190	^{123}I	0,26
Scyntygrafia płuc		*Scyntygrafia wątroby*	
^{13}Xe	28	^{198}Au (koloid)	0,37

Tabela 10.2 Diagnostyczne zastosowania radiofarmaceutyków.

Procedura, izotop	**Aktywność** $(10^7\ \mathrm{Bq})$	**Procedura, izotop**	**Aktywność** $(10^7\ \mathrm{Bq})$
^{99m}Tc	7,4	^{99m}Tc (koloid)	7,4
Scyntygrafia komór serca		*Scyntygrafia kości*	
^{131}I	0,74	^{85}Sr	0,37
^{99m}Tc	7,4	^{99m}Tc	37
Scyntygrafia tętnic		*Scyntygrafia nerek*	
^{201}Tl	11	^{197}Hg	0,37
^{24}Na	28	^{99m}Tc	5,6

Tabela 10.2 Diagnostyczne zastosowania radiofarmaceutyków.

Pierwsze detektory promieniowania generowały dwuwymiarowe obrazy, tak jak zdjęcie zrobione aparatem fotograficznym. Można jednak użyć układu detektorów obracających się po obwodzie okręgu, co pozwala uzyskać obraz trójwymiarowy. Podobną technikę stosuje się w rentgenowskiej tomografii komputerowej. Jednym z zastosowań tej techniki jest **tomografia emisyjna pojedynczych fotonów** (ang. **single-photon-emission computed tomography**, SPECT, Rysunek 10.27). Rozdzielczość przestrzenna tej techniki wynosi około $1\ \mathrm{cm}$.

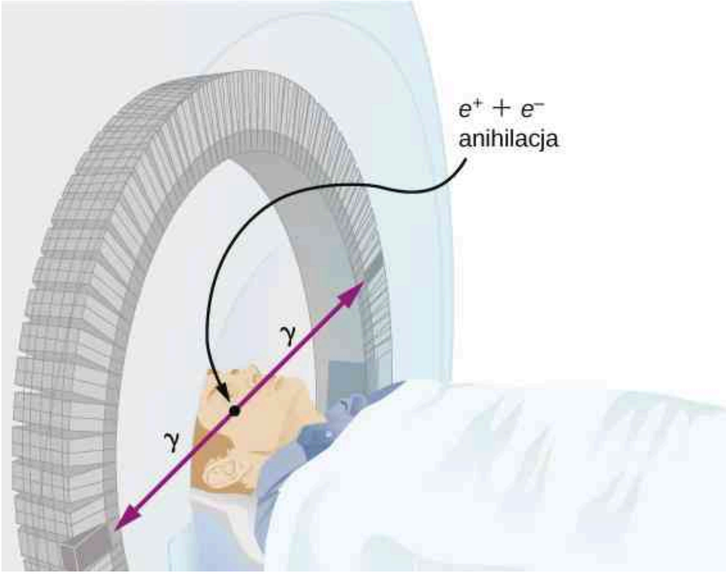


Rysunek 10.27 Urządzenie SPECT tworzy obraz ludzkiego ciała, wykorzystując promieniowanie emitowane przez radiofarmaceutyk. Źródło: „Woldo"/Wikimedia Commons

Lepszą rozdzielczość obrazu uzyskuje się za pomocą techniki znanej jako **pozytonowa tomografia emisyjna** (ang. **positron emission tomography**, PET). Wykorzystywane są w niej radioizotopy, które rozpadają się, emitując promieniowanie β^+. Gdy pozyton napotka elektron, cząstki te ulegają anihiliacji, emitując dwa fotony promieniowania γ. Reakcja ta jest reprezentowana przez

$$e^+ + e^- \longrightarrow 2\gamma.$$

Powstające w reakcji fotony promieniowania γ mają identyczne energie $(0{,}511\ \mathrm{MeV})$ i poruszają się w dokładnie przeciwnych kierunkach (Rysunek 10.28). Tę łatwą do zidentyfikowania charakterystykę można wykorzystać do określenia położenia izotopu promieniotwórczego. Do izotopów emitujących promieniowanie β^+ używanych w badaniach PET należą ^{11}C, ^{13}N, ^{15}O, ^{18}F. Te jądra mają tę zaletę, że mogą służyć jako znaczniki w związkach chemicznych naturalnie występujących w ludzkim ciele. Rozdzielczość tej metody wynosi $0{,}5\ \mathrm{cm}$, jest więc lepsza niż w przypadku SPECT.



Rysunek 10.28 Aparat PET wykorzystuje dwa identyczne fotony promieniowania γ powstałe w procesie anihilacji pary elektron–pozyton. Te fotony promieniowania γ emitowane są w przeciwnych kierunkach, co pozwala ustalić linię, wzdłuż której emitowana jest każda para.

Skany PET są szczególnie przydatne do badania anatomii i funkcjonowania mózgu. Tomografia PET może na przykład służyć do monitorowania wykorzystania tlenu i wody w mózgu, identyfikacji obszarów o zmniejszonym metabolizmie (związanych z chorobą Alzheimera), czy też lokalizowania różnych części mózgu odpowiedzialnych za wzrok, mowę i aktywność ruchową.

Czy to jest guz? Obejrzyj animację (https://openstaxcollege.org/l/21simmagresimg) uproszczonej wersji obrazowania metodą rezonansu magnetycznego (ang. **magnetic resonance imaging**, MRI) i zobacz, czy potrafisz to stwierdzić. Twoja głowa jest pełna małych przekaźników radiowych (są nimi spiny jąder wodoru w cząsteczkach wody). Do aparatu do badania rezonansem magnetycznym te małe przekaźniki przekazują informację o swoim położeniu, dostarczając szczegółowego obrazu wnętrza głowy. MRI wykorzystuje silne pole magnetyczne i nie wymaga ani wprowadzania radioizotopów do organizmu, ani naświetlania promieniami Röntgena.

Skutki biologiczne

Promieniowanie jądrowe może mieć zarówno pozytywne, jak i negatywne skutki dla układów biologicznych. Może też być używane do skutecznego leczenia nowotworów. Jak tłumaczymy jego działanie? Żeby odpowiedzieć na to pytanie, należy wziąć pod uwagę cząsteczki w obrębie komórek, szczególnie cząsteczki DNA.

Komórki zawierają długie cząsteczki DNA w kształcie podwójnej helisy (linii śrubowej), zawierające kod chemiczny (kod genetyczny), który określa funkcje komórki i zachodzące w niej procesy. Promieniowanie jądrowe może zmieniać cechy strukturalne łańcucha DNA, co prowadzi do zmiany w kodzie genetycznym. Każda ludzka komórka może doświadczyć nawet miliona uszkodzeń DNA w ciągu doby. DNA zawiera specjalne fragmenty kodu, które sprawdzają, czy DNA jest uszkodzony, i umożliwiają jego naprawę. Ta umiejętność naprawy DNA jest niezbędna dla utrzymania integralności kodu genetycznego i prawidłowego funkcjonowania całego organizmu. System naprawy powinien być stale aktywny i musi szybko reagować. Szybkość naprawy DNA zależy od różnych czynników, takich jak typ i wiek komórki. Jeśli promieniowanie jądrowe zniszczy zdolność komórki do naprawy DNA, to może ona:

1. Wejść w nieodwracalny stan spoczynkowy (nazywany senescencją).
2. Popełnić samobójstwo (określane mianem apoptozy, czyli zaprogramowanej śmierci komórki).
3. Wejść w fazę niekontrolowanych podziałów komórkowych, co może prowadzić do powstawania guzów i chorób nowotworowych.

Promieniowanie jądrowe może uszkodzić ludzkie ciało także na wiele innych sposobów. Na przykład wysokie dawki promieniowania jądrowego mogą spowodować oparzenia, a nawet wypadanie włosów.

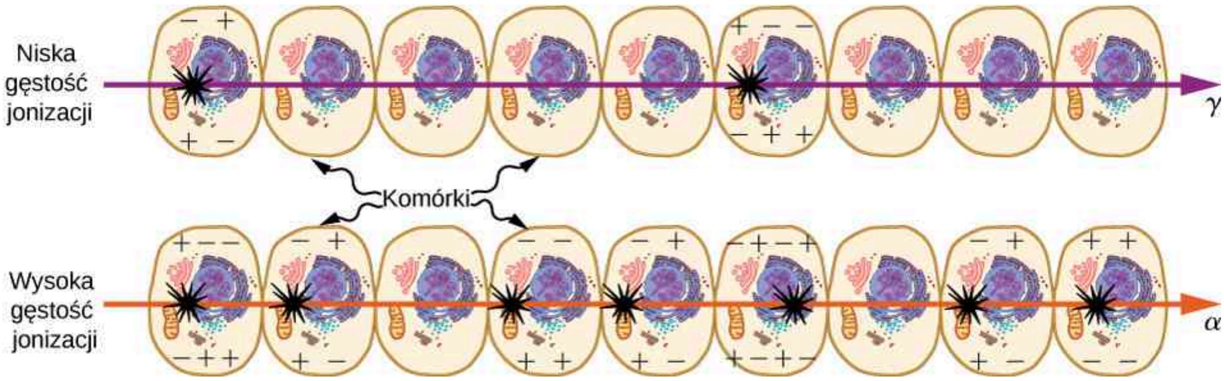
Biologiczne skutki promieniowania jądrowego wyrażane są za pomocą wielu różnych wielkości fizycznych i wielu różnych jednostek. Oficjalną jednostką do wyrażania skutków biologicznych promieniowania jądrowego jest **grej** (Gy , ang. **gray**). Jeden grej jest równy jednemu dżulowi energii jądrowej przypadającej na kilogram tkanki, czyli

$$1\,\text{Gy} = 1\,\text{J} / \text{kg}\,.$$

Starą, niezalecaną, lecz nadal używaną jednostką jest **rad** (rad), równy $0{,}01\,\text{Gy}$. Na przykład jeśli osoba o masie $50\,\text{kg}$ jest narażona całym ciałem na promieniowanie jądrowe i pochłonie $1\,\text{J}$, to otrzymana przez nią dawka promieniowania na całe ciało wynosi

$$\frac{1\,\text{J}}{50\,\text{kg}} = 0{,}02\,\text{J} / \text{kg} = 0{,}02\,\text{Gy} = 2\,\text{rad}\,.$$

Promieniowanie jądrowe uszkadza komórki poprzez jonizację atomów w komórkach, przez które przechodzi (Rysunek 10.29). Skutki promieniowania jonizującego zależą od otrzymanej dawki (w radach), ale też od rodzaju promieniowania (alfa, beta, gamma lub rentgenowskie) i rodzaju tkanki. Na przykład jeśli zasięg promieniowania jest mały, jak to ma miejsce w przypadku promieniowania α, to jonizacja i powstałe obrażenia są bardziej skoncentrowane i trudniejsze do naprawienia przez organizm. Aby uwzględnić te czynniki, definiuje się **względną skuteczność biologiczną promieniowania** (WSB, nazywaną również współczynnikiem wagowym promieniowania, ang. **relative biological effectiveness**, RBE). Przykładowe wartości WSB dla kilku rodzajów promieniowania jonizującego zawiera Tabela 10.3.



Rysunek 10.29 Rysunek przedstawia jonizację wywołaną w komórkach przez promieniowanie α i γ. Ze względu na mniejszy zasięg jonizacja i szkody wyrządzone przez promieniowanie α są bardziej skoncentrowane i trudniejsze do naprawy przez organizm. Dlatego też WSB dla promieniowania α jest większa niż WSB dla promieniowania γ, mimo że wywołują one taką samą ilość jonizacji przy tej samej energii.

Typ i energia promieniowania	WSB[1]
rentgenowskie	1
γ	1
β poniżej 32 keV	1
β powyżej 32 keV	1,7
neutrony termiczne do powolnych ($< 20\,\text{keV}$)	2–5
neutrony szybkie ($1\,\text{MeV} - 10\,\text{MeV}$)	10 (ciało), 32 (oczy)
protony ($1\,\text{MeV} - 10\,\text{MeV}$)	10 (ciało), 32 (oczy)
α z rozpadu promieniotwórczego	10–20
ciężkie jony z akceleratorów	10–20

Tabela 10.3 Względna skuteczność biologiczna promieniowania[3].

Wielkością bardziej adekwatną do określania wpływu na tkanki biologiczne jest **równoważnik dawki pochłoniętej** (ang. **equivalent dose** lub dose equivalent), zdefiniowany jako dawka (w grejach) pomnożona przez względną skuteczność biologiczną (WSB). Jednostką tak określonej wielkości jest siwert (Sv). Jeśli zatem dana osoba przyjęła na całe ciało dawkę $0{,}02\,\text{Gy}$ promieniowania γ, to równoważnik dawki pochłoniętej wynosi $0{,}02\,\text{Gy} \cdot 1 = 0{,}02\,\text{Sv}$ na całe ciało. Gdyby ta sama osoba przyjęła na całe ciało dawkę $0{,}02\,\text{Gy}$ promieniowania α, to równoważnik dawki pochło-

3. Wartości przybliżone. Trudne do określenia.

niętej wyniósłby $0{,}02\,\mathrm{Gy} \cdot 20 = 0{,}4\,\mathrm{Sv}$ na całe ciało. Promieniowanie α ma 20 razy większy wpływ na tę osobę niż promieniowanie γ przy tej samej pochłoniętej energii. Starą (niezalecaną) jednostką równoważnika dawki jest **rem**, równy $0{,}01\,\mathrm{Sv}$.

Wartości WSB podane w Tabeli 10.3 są przybliżone, ale pozwalają na zrozumienie promieniowania jądrowego w kontekście jego interakcji z żywą tkanką. Wiadomo na przykład, że neutrony powodują więcej szkody niż promieniowanie γ ze względu na promieniowanie wtórne, choć oba te typy są elektrycznie obojętne i mają duży zasięg. Trudno jest wykryć skutki narażenia danej osoby na dawkę promieniowania mniejszą niż $10\,\mathrm{mSv}$. Według polskiego prawa dopuszczalna roczna dawka ze źródeł sztucznych (poza medycznymi) dla przypadkowej osoby wynosi $1\,\mathrm{mSv}$, natomiast dla osoby narażonej na promieniowanie w związku z wykonywaną działalnością zawodową wynosi ona $20\,\mathrm{mSv}$.

Biologiczny wpływ różnych poziomów napromieniowania na organizm człowieka podany jest w Tabeli 10.4. Pierwszą wskazówką, że dana osoba była narażona na promieniowanie, są zmiany w morfologii krwi, co nie jest zaskakujące, jako że komórki krwi są najszybciej reprodukującymi się komórkami w organizmie. Przy wyższych dawkach promieniowania występują nudności i wypadanie włosów, co także można wyjaśnić wpływem promieniowania na rozmnażanie komórek: komórki błony śluzowej układu pokarmowego również rozmnażają się szybko, a ich zniszczenie powoduje nudności. Gdy wzrost komórek włosów zwalnia, mieszki włosowe stają się cienkie i wypadają. Duże dawki promieniowania powodują śmierć znaczącej części komórek we wszystkich układach, przy czym najniższe śmiertelne dawki promieniowania prowadzą do zgonu w efekcie osłabienia układu odpornościowego przez utratę białych krwinek.

Dawka (Sv)	**Efekt**
0–0,1	brak dostrzegalnych efektów
0,1 –1	nieznaczny lub umiarkowany ubytek białych krwinek
0,5	czasowa bezpłodność; 35% kobiet, 50% mężczyzn
1–2	znaczne zmniejszenie liczby krwinek, krótkie nudności i wymioty; rzadko śmiertelne
2–5	nudności, wymioty, wypadanie włosów, poważne uszkodzenie układu krwionośnego, krwotok, możliwy zgon
4,5	śmiertelne dla 50% populacji w ciągu 32 dni po ekspozycji w przypadku niepodjęcia leczenia
5–20	najgorsze skutki spowodowane uszkodzeniem jelita cienkiego i krwi; ograniczona przeżywalność
> 20	zgon w ciągu kilku godzin spowodowany zapaścią ośrodkowego układu nerwowego

Tabela 10.4 Natychmiastowe efekty promieniowania (osoby dorosłe, całe ciało, jedna ekspozycja).

Źródła promieniowania

Ludzie narażeni są również na promieniowanie jądrowe pochodzące z wielu źródeł. Zestawienie dawek promieniowania pochodzącego z różnych źródeł dla kilku krajów zamieszczono w Tabeli 10.5. Ziemia emituje promieniowanie, którego źródłem są izotopy uranu, toru i potasu. Natężenia promieniowania z tych źródeł zależą od położenia i mogą się różnić o czynnik 10. Nawozy zawierają izotopy potasu i uranu, które przyjmujemy w spożywanej żywności. Nawozy mają aktywność promieniotwórczą ponad $3000\,\mathrm{Bq}\,/\,\mathrm{kg}$ w porównaniu z zaledwie $66\,\mathrm{Bq}\,/\,\mathrm{kg}$ dla węgla ^{14}C.

Źródło	**Dawka** (mSv / rok)				
	Australia	Niemcy	Polska[4]	USA	Świat
naturalne promieniowanie – zewnętrzne:					
promienie kosmiczne	0,30	0,28	0,39	0,30	0,39
gleba, materiały budowlane	0,40	0,40	0,46	0,30	0,48

Tabela 10.5 Źródła promieniowania tła i średnie dawki.

4. Dane dla Polski wg Raportu Rocznego Centralnego Laboratorium Ochrony Radiologicznej w Warszawie za rok 2011.

Źródło	Dawka (mSv / rok)				
radon	0,90	1,10	1,30	2,00	1,20
naturalne promieniowanie – wewnętrzne: (^{40}K, ^{14}C, ^{226}Ra)	0,24	0,28	0,28	0,40	0,29
sztuczne promieniowanie (głównie medyczne i stomatologiczne)	0,80	0,90	0,86	0,53	0,40
łącznie	2,6	3,0	3,3	3,5	2,8

Tabela 10.5 Źródła promieniowania tła i średnie dawki.

Badania lekarskie są również źródłem promieniowania jądrowego. Przykłady często spotykanych dawek skutecznych promieniowania jądrowego są podane w Tabeli 10.6. Są one zwykle niewielkie i mogą zostać jeszcze bardziej obniżone w efekcie usprawnień technicznych i zwiększenia czułości detektorów. Być może z wyjątkiem rutynowych prześwietleń zębów procedury medyczne wykorzystujące promieniowanie jądrowe są stosowane tylko wtedy, gdy korzyści przeważają nad ryzykiem. Zdjęcia rentgenowskie klatki piersiowej generują najniższe dawki – rocznie około $0{,}1\ \text{mSv}$ do badanej tkanki i mniej niż 5% promieniowania rozproszonego do tkanek, które nie są bezpośrednio obrazowane. Inne prześwietlenia wiążą się z większymi dawkami, do około $10\ \text{mSv}$ w tomografii komputerowej i około $5\ \text{mSv}$ w RTG stomatologicznym, w obu przypadkach tylko w obrębie tkanki obrazowanej. Obrazowanie medyczne z użyciem radiofarmaceutyków powoduje przyjęcie dawek od $1\ \text{mSv}$ do $5\ \text{mSv}$, zwykle zlokalizowanych. Dawki skuteczne otrzymywane ze źródeł sztucznych innych niż medyczne (np. działalność przemysłowa, skutki wybuchów jądrowych) stanowią średnio poniżej $0{,}5\%$ całkowitej dawki rocznej.

Procedura	Dawka skuteczna (mSv)
RTG klatki piersiowej	0,02
pantomogram	0,01
RTG czaszki	0,07
RTG nogi	0,02
mammografia	0,40
wlew z barytu	7,00
RTG górnego odcinka przewodu pokarmowego	3,00
tomogram komputerowy głowy	2,00
tomogram komputerowy jamy brzusznej	10,00

Tabela 10.6 Typowe dawki otrzymywane podczas badań diagnostycznych RTG.

Przykład 10.12

Jaka masa ^{137}Cs została uwolniona w Czarnobylu?

Awaria w Czarnobylu na Ukrainie (wówczas w Związku Sowieckim) naraziła okoliczną ludność na duże dawki promieniowania pochodzącego z rozpadu ^{137}Cs. Początkowy poziom radioaktywności, pochodzącej głównie od tego izotopu, wynosił około $A = 2{,}2 \cdot 10^{17}\ \text{Bq}$. Obliczmy całkowitą masę ^{137}Cs uwolnionego w tej awarii.

Strategia rozwiązania

Całkowitą liczbę jąder N można określić na podstawie znanego okresu połowicznego rozpadu i aktywności promieniotwórczej ^{137}Cs ($30{,}2\ \text{roku}$). Masę można obliczyć na podstawie N, wykorzystując pojęcie mola.

Rozwiązanie

Po rozwiązaniu równania $A = 0{,}693N / T_{1/2}$ względem N, otrzymujemy

$$N = \frac{AT_{1/2}}{0{,}693}.$$

Dla podanych wartości otrzymujemy

$$N = \frac{2{,}2 \cdot 10^{17}\,\mathrm{Bq} \cdot 30{,}2\,\mathrm{roku}}{0{,}693}.$$

Aby zmienić jednostki z lat na sekundy, piszemy

$$N = \frac{2{,}2 \cdot 10^{17}\,\mathrm{Bq} \cdot 30{,}2\,\mathrm{roku} \cdot 3{,}16 \cdot 10^{7}\,\mathrm{s}\ /\ \mathrm{rok}}{0{,}693} = 3{,}1 \cdot 10^{26}.$$

Jeden mol nuklidu $^{A}\mathrm{X}$ ma masę A gramów, a więc jeden mol ^{137}Cs ma masę $137\,\mathrm{g}$. Mol zawiera $6{,}02 \cdot 10^{23}$ jąder. Stąd masa ^{137}Cs uwolnionego w wyniku awarii wynosiła

$$m = \frac{137\,\mathrm{g}}{6{,}02 \cdot 10^{23}} \cdot 3{,}1 \cdot 10^{26} = 70 \cdot 10^{3}\,\mathrm{g} = 70\,\mathrm{kg}\,.$$

Znaczenie

Masa ^{137}Cs uwolnionego w wyniku katastrofy w Czarnobylu jest mała w porównaniu z typowymi ilościami paliwa używanego w reaktorze jądrowym. Jednakże natychmiast po wypadku do lokalnych szpitali przyjęto około 250 osób, u których zdiagnozowano ostrą chorobę popromienną. Otrzymały one dawki zewnętrznego promieniowania między $1\,\mathrm{Sv}$ a $16\,\mathrm{Sv}$. Jak wskazują dane dotyczące skutków biologicznych zawarte w Tabeli 10.4, te dawki są bardzo niebezpieczne. Ostateczna liczba ofiar śmiertelnych jest szacowana na około 4000 osób, zmarłych głównie z powodu nowotworów wywołanych przez promieniowanie.

10.7 Sprawdź, czy rozumiesz. Promieniowanie rozchodzi się we wszystkich kierunkach od swojego źródła, tak jak promieniowanie elektromagnetyczne z żarówki. Czy celniejsza jest analogia pojęcia aktywności do mocy, intensywności czy do jasności?

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 10

KLUCZOWE POJĘCIA

aktywność (ang. activity) wartość bezwzględna szybkości rozpadu substancji promieniotwórczych

antyelektron (ang. antielectron) inne określenie pozytonu

antyneutrino (ang. antineutrino) antycząstka neutrina elektronowego w rozpadzie β^-

bekerel (Bq, ang. becquerel) jednostka układu SI opisująca szybkość rozpadu materiału promieniotwórczego, równa 1 rozpadowi na sekundę

cykl protonowy (ang. proton-proton chain) ciąg reakcji, w których następuje synteza jąder helu z wodoru

datowanie izotopowe (ang. radioactive dating) zastosowanie rozpadu promieniotwórczego; w tej metodzie wiek materiału jest określany na podstawie zawartości izotopu promieniotwórczego określonego typu w tym materiale

defekt masy (ang. mass defect) różnica między całkowitą masą tworzących jądro nukleonów a masą tego jądra

energia wiązania (ang. binding energy) energia niezbędna do rozdzielenia jądra na tworzące je protony i neutrony

energia wiązania na nukleon (EWN, ang. binding energy per nucleon) energia potrzebna, by rozbić jądro na nukleony, przypadająca na jeden nukleon

grej (Gy, ang. gray) jednostka dawki pochłoniętej promieniowania określona jako $1\ \mathrm{J}$ energii jonizującej otrzymanej na kilogram tkanki

izotopy (ang. isotopes) jądra o tej samej liczbie protonów, ale o różnej liczbie neutronów

jednostka masy atomowej (ang. atomic mass unit) jednostka służąca do wyrażania m.in. masy pojedynczego jądra, zdefiniowana jako $1\ /\ 12$ masy atomu $^{12}\mathrm{C}$, czyli $1\ \mathrm{u} = 1{,}660\,54 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$

jądro atomowe (ang. nucleus) gęsto upakowany zbiór nukleonów w środku atomu

jądro pierwotne (ang. parent nucleus) pierwotne jądro przed rozpadem

jądro potomne (ang. daughter nucleus) jądro będące produktem rozpadu jądra pierwotnego

kiur (Ci, ang. curie) stara (niezalecana) jednostka aktywności, historycznie określona jako aktywność $1\ \mathrm{g}$ $^{226}\mathrm{Ra}$, obecnie zdefiniowana jako $3{,}7 \cdot 10^{10}\ \mathrm{Bq}$

krytyczność (ang. criticality) stan, w którym reakcja łańcuchowa staje się samopodtrzymująca

liczba atomowa (ang. atomic number) liczba protonów w jądrze

liczba masowa (ang. mass number) liczba nukleonów w jądrze

liczba neutronowa (ang. neutron number) liczba neutronów w jądrze

masa krytyczna (ang. critical mass) minimalna masa materiału rozszczepialnego niezbędna do wystąpienia samopodtrzymującej się reakcji jądrowej

masa molowa (ang. molar mass) całkowita masa protonów, neutronów i elektronów w jednym molu substancji

metoda datowania węglem-14 (ang. carbon-14 dating) metoda określenia wieku dawniej żywej tkanki za pomocą stosunku liczby atomów $^{14}\mathrm{C}\ /\ ^{12}\mathrm{C}$

model kroplowy jądra (ang. liquid drop model) model jądra (pozwalający zrozumieć tylko niektóre z jego cech), w którym nukleony w jądrze oddziałują jak cząsteczki cieczy w kropli

neutrino (ang. neutrino) subatomowa cząstka elementarna, która nie ma ładunku elektrycznego

niska dawka (ang. low dose) dawka promieniowania mniejsza niż $100\ \mathrm{mSv}$

nukleony (ang. nucleons) protony i neutrony wewnątrz jądra atomowego

nukleosynteza (ang. nucleosynthesis) proces syntezy jądrowej, w którym, jak się uważa, powstały wszystkie pierwiastki cięższe od wodoru występujące na Ziemi

nuklid (ang. nuclide) określony rodzaj jąder, o ustalonej liczbie protonów i neutronów

okres połowicznego rozpadu (ang. half-life) czas, w jakim rozpada się połowa pierwotnej liczby jąder (czyli połowa jąder pozostaje)

pierwiastek transuranowy (ang. transuranic element) pierwiastek położony poza uranem w układzie okresowym

pozyton (ang. positron) elektron o dodatnim ładunku

pozytonowa tomografia emisyjna (ang. positron emission tomography) PET – technika tomografii komputerowej, która wykorzystuje emitery β^+ i wykrywa dwa pochodzące z anihilacji fotony γ, wskazując położenie źródła emisji promieniowania

prawo rozpadu promieniotwórczego (ang. radioactive decay law) określa wykładniczy spadek liczby pierwotnych jąder w próbce promieniotwórczej

promieniotwórczość (ang. radioactivity) spontaniczna emisja promieniowania z jądra

promieniowanie alfa (α, ang. alpha rays) jeden z rodzajów promieniowania emitowanego w procesach jądrowych, składający się z jąder helu ${}_{2}^{4}\text{He}$

promieniowanie beta (β, ang. beta rays) jeden z rodzajów promieniowania emitowanego w procesach jądrowych, składający się z wysokoenergetycznych elektronów

promieniowanie gamma (γ, ang. gamma rays) jeden z rodzajów promieniowania emitowanego w procesach jądrowych, składający się z wysokoenergetycznych fotonów

promień jądra atomowego (ang. radius of a nucleus) promień jądra jest dany wzorem $r = r_0 A^{1/3}$

radiofarmaceutyk (ang. radiopharmaceutical) związek zawierający izotop promieniotwórczy, używany do obrazowania medycznego

reaktor powielający (ang. breeder reactor) reaktor przeznaczony m.in. do produkcji plutonu

reaktor termojądrowy (ang. fusion reactor) reaktor jądrowy, w którym energia wytwarzana jest w procesach syntezy jądrowej

rem (ang. rem) stara, niezalecana jednostka równoważnika pochłoniętej dawki promieniowania równa $0{,}01\ \text{Sv}$

rozpad alfa (ang. alpha decay) proces rozpadu promieniotwórczego jądra, w którym emitowana jest cząstka α

rozpad beta (ang. beta decay) proces rozpadu promieniotwórczego jądra, w którym emitowana jest cząstka β

rozpad gamma (ang. gamma decay) proces rozpadu promieniotwórczego jądra, w którym emitowana jest cząstka γ

rozpad promieniotwórczy (ang. radioactive decay) proces, w którym indywidualne jądro atomowe niestabilnego izotopu traci masę i energię, emitując cząstki promieniowania jonizującego

rozszczepienie (ang. fission) rozpad jądra atomowego na lżejsze jądra

silne oddziaływanie jądrowe (ang. strong nuclear force) siły, które wiążą nukleony w jądrze

siwert (Sv, ang. sievert) jednostka dawki pochłoniętej odnosząca się do wpływu na tkanki biologiczne

stała rozpadu (ang. radioactive decay constant) wielkość ta jest odwrotnie proporcjonalna do okresu połowicznego rozpadu

synteza (fuzja) jądrowa, reakcja termojądrowa (ang. nuclear fusion) proces łączenia się lżejszych jąder w cięższe

szereg promieniotwórczy (ang. decay series) ciąg rozpadów jądrowych, kończący się stabilnym jądrem

tabela nuklidów (ang. chart of the nuclides) diagram obejmujący stabilne i niestabilne jądra

tomografia emisyjna pojedynczych fotonów (ang. single-photon-emission computed tomography, SPECT) tomografia komputerowa wykorzystująca radiofarmaceutyki emitujące promieniowanie γ

umiarkowana dawka (ang. moderate dose) dawka promieniowania od $0{,}1\ \text{Sv}$ do $1\ \text{Sv}$

wysoka dawka (ang. high dose) dawka promieniowania większa niż $1\ \text{Sv}$

względna skuteczność biologiczna promieniowania – WSB (ang. relative biological effectiveness, RBE) liczba wyrażająca względną skalę obrażeń powodowanych w tkankach biologicznych przez ustaloną ilość promieniowania jonizującego danego typu

znaczniki radioaktywne (ang. radioactive markers, radioactive tags) specjalne leki (radiofarmaceutyki), które pozwalają lekarzom śledzić ruch substancji w organizmie

średni czas życia (ang. lifetime) średni czas, po jakim jądro ulega rozpadowi

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Liczba masowa atomu	$A = Z + N$
Standardowy format oznaczania nuklidu	${}^{A}_{Z}\mathrm{X}$
Promień jądra, gdzie r_0 jest promieniem pojedynczego protonu	$r = r_0 A^{1/3}$
Defekt masy	$\Delta m = Zm_\mathrm{p} + (A - Z)m_\mathrm{n} - m_\mathrm{j}$
Energia wiązania	$E_\mathrm{w} = \Delta mc^2$
Energia wiązania na nukleon	$\mathrm{EWN} = \frac{E_\mathrm{w}}{A}$
Szybkość rozpadu promieniotwórczego	$-\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \lambda N$
Prawo rozpadu promieniotwórczego	$N = N_0 e^{-\lambda t}$
Stała rozpadu	$\lambda = \frac{0{,}693}{T_{1/2}}$
Średni czas życia jądra	$\overline{T} = \frac{1}{\lambda}$
Aktywność substancji promieniotwórczej	$A = A_0 e^{-\lambda t}$
Aktywność substancji promieniotwórczej (postać liniowa)	$\ln A = -\lambda t + \ln A_0$
Rozpad alfa	${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$
Rozpad beta	${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}\mathrm{e} + \overline{\nu}$
Emisja pozytonu	${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}_{Z-1}^{A}\mathrm{Y} + {}^{0}_{1}\mathrm{e} + \nu$
Rozpad gamma	${}^{A}_{Z}\mathrm{X}^* \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \gamma$

PODSUMOWANIE

10.1 Własności jądra atomowego

- Jądro atomowe składa się z protonów i neutronów.
- Liczba protonów w jądrze określa jego liczbę atomową Z. Liczba neutronów w jądrze określa liczbę neutronową N. Całkowita liczba nukleonów w jądrze to liczba masowa A.
- Jądra atomowe o tej samej liczbie atomowej Z, ale o różnych liczbach neutronowych N, to izotopy tego samego pierwiastka.
- Masa molowa pierwiastka jest zdefiniowana jako średnia ważona mas molowych jego izotopów.

10.2 Energia wiązania jądra

- Defekt masy jądra jest różnicą między sumą mas wszystkich tworzących jądro nukleonów a masą jądra.
- Energia wiązania (E_w) jądra jest równa ilości energii uwalnianej przy tworzeniu jądra, czyli wartości defektu masy pomnożonej przez prędkość światła podniesioną do kwadratu.
- Wykres energii wiązania na nukleon (EWN) w zależności od liczby atomowej A wskazuje, że przy podziale lub łączeniu jąder wyzwalana jest ogromna ilość energii.
- Energia wiązania nukleonu w jądrze jest wielkością analogiczną do energii jonizacji atomu.

10.3 Rozpad promieniotwórczy

- W rozpadzie substancji promieniotwórczej, jeśli stała rozpadu λ jest duża, to okres połowicznego rozpadu jest krótki (i na odwrót).
- Prawo rozpadu promieniotwórczego $N = N_0 e^{-\lambda t}$ pozwala wykorzystać właściwości substancji promieniotwórczych do szacowania wieku substancji.
- Radioaktywny węgiel ma te same własności chemiczne co stabilny izotop węgla, więc włącza się w ekosferę i ostatecznie staje się częścią każdego żywego organizmu. Porównując zawartość $^{14}\mathrm{C}$ w przedmiocie z normalną zawartością w żywej tkance, możemy określić wiek przedmiotu.

10.4 Procesy rozpadu

- Wyróżnia się trzy rodzaje promieniowania jądrowego: alfa (α), beta (β) i gamma (γ).
- Rozpad α reprezentujemy symbolicznie poprzez zapis ${}^{A}_{Z}\mathrm{X} \longrightarrow {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$. Istnieją dwa rodzaje rozpadu β: jądro emituje elektron (β^-) lub pozyton (β^+) (do rozpadów β należy też proces wychwytu elektronu, w którym jądro pochłania elektron). Rozpad γ jest reprezentowany symbolicznie równaniem ${}^{A}_{Z}\mathrm{X}^* \rightarrow {}^{A}_{Z}\mathrm{X} + \gamma$.
- Gdy ciężkie jądro rozpada się, tworząc jądro lżejsze, jądro potomne może stać się jądrem pierwotnym w kolejnym procesie rozpadu itd.; w ten sposób powstaje szereg promieniotwórczy.

10.5 Rozszczepienie jądra atomowego

- Rozszczepienie jest procesem, w którym suma mas powstałych jąder atomowych jest mniejsza niż łączna masa substratów reakcji.
- Bilans energetyczny reakcji rozszczepienia można zrozumieć na podstawie wykresu energii wiązania na nukleon.
- Produkcja izotopów rozszczepialnych przez przemianę jądrową nazywa się powielaniem (ang. **breeding**), a reaktory przeznaczone do tego celu są nazywane reaktorami powielającymi.

10.6 Fuzja jądrowa

- Synteza (fuzja) jądrowa jest reakcją, w której dwa jądra łączą się i tworzą większe jądro; w czasie fuzji dwóch lekkich jąder i tworzenia jądra o średniej masie uwalniania jest energia.
- Ilość energii wytwarzaną w reakcji syntezy jądrowej oznaczamy symbolem Q.
- Syntezą jądrową jest m.in. reakcja pomiędzy jądrami deuteru i trytu, zachodząca w bombie wodorowej. Synteza jądrowa wyjaśnia również produkcję energii we wnętrzu Słońca, proces nukleosyntezy i powstawanie ciężkich pierwiastków.

10.7 Skutki biologiczne i zastosowania medyczne promieniowania jądrowego

- Techniki jądrowe są używane w medycynie do umiejscawiania i badania chorych tkanek za pomocą specjalnych leków nazywanych radiofarmaceutykami. Znaczniki radioaktywne są używane do identyfikacji komórek nowotworowych w kościach, guzów mózgu i choroby Alzheimera oraz do monitorowania funkcji narządów ciała, takich jak przepływ krwi, czynność mięśnia sercowego i wychwyt jodu w tarczycy.
- Skutki biologiczne promieniowania jonizującego wynikają z dwóch mechanizmów oddziaływania na komórki: zaburzenia rozmnażania komórek i niszczenia funkcji komórki.
- Typowe źródła promieniowania oddziałującego na ludzi obejmują: emisję przez Ziemię, w której promieniują izotopy uranu, toru i potasu; naturalne promieniowanie kosmiczne, promieniowanie gleby, materiałów budowlanych oraz sztuczne źródła używane w medycznych i stomatologicznych badaniach diagnostycznych.
- Biologiczne skutki promieniowania jądrowego wyrażane są za pomocą wielu różnych wielkości fizycznych i wielu różnych jednostek.

PYTANIA

10.1 Własności jądra atomowego

1. Zdefiniuj i podaj istotne różnice między pojęciami: neutron, nukleon, jądro i nuklid.

2. Co to są izotopy? Dlaczego różne izotopy danego pierwiastka mają takie same właściwości chemiczne?

10.2 Energia wiązania jądra

3. Wyjaśnij, dlaczego układ związany powinien mieć mniejszą masę niż jego składniki. Dlaczego nie obserwuje się tego w codziennym życiu, np. w przypadku budynku zbudowanego z cegieł?

4. Dlaczego w przypadku stabilnych jąder, dla których A jest większe niż około 40, liczba neutronów jest większa od liczby protonów? Dlaczego ten efekt jest bardziej widoczny dla najcięższych jąder?

5. Aby uzyskać najdokładniejsze wartości energii wiązania na nukleon, ważne jest, aby wziąć pod uwagę siły między nukleonami na powierzchni jądra. Czy efekty powierzchniowe zwiększą, czy też zmniejszą oszacowane wartości EWN?

10.3 Rozpad promieniotwórczy

6. Jaki jest związek początkowej aktywności substancji promieniotwórczej z jej okresem połowicznego roz-

padu?

7. Jakie istotne założenie dotyczące zmienności w czasie intensywności promieniowania kosmicznego czyni się w procedurze datowania węglowego, opisanej w tym rozdziale?

10.4 Procesy rozpadu

8. Czym istotnym różnią się, a jakie ważne cechy mają wspólne rozpad beta (β^-) i rozpad alfa?

9. Jaka jest różnica między promieniowaniem γ a charakterystycznym promieniowaniem rentgenowskim i światłem widzialnym?

10. Jakie cechy promieniotwórczości wskazują na jej jądrowe, a nie atomowe pochodzenie?

11. Przeanalizuj Rysunek 10.12. Jeśli pole magnetyczne zastąpimy polem elektrycznym skierowanym do kartki, to w którą stronę zakrzywią się tory promieniowania α, β^+ i γ?

12. Dlaczego jądro Ziemi jest płynne?

10.5 Rozszczepienie jądra atomowego

13. Czy bombę atomową powinno się w rzeczywistości nazywać bombą jądrową?

14. Dlaczego proces rozszczepienia prowadzi do reakcji łańcuchowej?

15. W jakim sensie jądro atomowe jest podobne do kropli cieczy?

10.6 Fuzja jądrowa

16. Wyjaśnij różnicę między rozszczepieniem jądrowym a syntezą jądrową.

17. Dlaczego fuzji lekkich jąder do jąder cięższych towarzyszy uwalnianie energii?

10.7 Skutki biologiczne i zastosowania medyczne promieniowania jądrowego

18. Dlaczego tomografia pozytonowa (PET) jest dokładniejsza niż scyntygrafia SPECT?

19. Izotopy, które emitują promieniowanie α, są stosunkowo bezpieczne, gdy znajdują się poza ciałem, ale wyjątkowo niebezpieczne wewnątrz. Wyjaśnij dlaczego.

20. Promieniowanie jonizujące może zaburzać zdolność komórki do naprawy DNA. Podaj trzy sposoby, na jakie może zareagować komórka.

ZADANIA

10.1 Własności jądra atomowego

21. Określ liczby atomowe, masowe i neutronowe dla

a. ${}^{58}_{29}\text{Cu}$;
b. ${}^{24}_{11}\text{Na}$;
c. ${}^{210}_{84}\text{Po}$;
d. ${}^{45}_{20}\text{Ca}$;
e. ${}^{206}_{82}\text{Pb}$.

22. Srebro ma dwa stabilne izotopy. Nuklid ${}^{107}_{47}\text{Ag}$ ma masę molową $106{,}905\,095\,\text{g}/\text{mol}$ i zawartość $51{,}83\%$; natomiast ${}^{109}_{47}\text{Ag}$ ma masę molową $108{,}904\,754\,\text{g}/\text{mol}$ i zawartość $48{,}17\%$. Oblicz masę atomową jąder srebra.

23. Masę M i promień r jądra można wyrazić przez jego liczbę masową A.
a. Wykaż, że gęstość jądra jest niezależna od A;
b. Oblicz gęstość jądra złota (Au). Porównaj swój wynik z otrzymanym w tym rozdziale dla żelaza (Fe).

24. Cząstka ma masę równą $10\,\text{u}$. Jeśli masa ta zostanie całkowicie przekształcona w energię, to ile energii zostanie uwolnione? Wyraź swoją odpowiedź w megaelektronowoltach (MeV). Przypomnijmy, że $1\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}$.

25. Oblicz długość boku sześcianu o masie $1\,\text{kg}$ i gęstości materii jądrowej.

26. Wielkość szczegółów, które można obserwować za pomocą wiązki promieniowania, jest ograniczona przez długość fali. Oblicz energię cząstki, która ma długość fali $10^{-16}\,\text{m}$, wystarczająco małą, aby wykryć szczegóły wielkości $1/10$ rozmiarów nukleonu. Wskazówka: Energia takiej cząstki jest znacznie większa od jej energii spoczynkowej.

10.2 Energia wiązania jądra

27. Ile energii zostałoby uwolnione, gdyby połączyć sześć atomów wodoru i sześć neutronów, tworząc ${}^{12}_{6}\text{C}$?

28. Oblicz defekt masy i energię wiązania jądra ${}^{4}\text{He}$.

29. ${}^{56}\text{Fe}$ jest jednym z najsilniej związanych nuklidów. Izotop ten stanowi ponad 90% naturalnego żelaza. Zauważ, że ${}^{56}\text{Fe}$ ma parzyste liczby protonów i neutronów. Oblicz energię wiązania na nukleon dla jądra ${}^{56}\text{Fe}$ i

porównaj ją z przybliżoną wartością uzyskaną z wykresu na Rysunku 10.7.

30. ^{209}Bi jest najcięższym trwałym nuklidem i jego EWN jest niska w porównaniu z nuklidami o średnich masach. Oblicz EWN dla tego jądra i porównaj ją z przybliżoną wartością uzyskaną z wykresu na Rysunku 10.7.

31. Oblicz EWN dla
a. ^{235}U, drugiego pod względem częstości występowania izotopu uranu;
b. ^{238}U (większość jąder uranu to właśnie izotop ^{238}U).

32. Maksimum EWN w pobliżu wartości $A = 60$ oznacza, że zasięg silnych oddziaływań jądrowych jest rzędu średnicy tego jądra.
a. Oblicz średnicę jądra o $A = 60$;
b. Porównaj EWN dla ^{58}Ni i ^{90}Sr. Pierwszy z nich jest jednym z najsilniej związanych nuklidów, natomiast drugi jest większy i nie tak silnie związany.

10.3 Rozpad promieniotwórczy

33. Z bardzo starej skały wyizolowano próbkę materiału radioaktywnego. Wykres A w zależności od t ma nachylenie $-10^{-9}\ \mathrm{s}^{-1}$ – patrz Rysunek 10.10 (b). Jaki jest okres połowicznego rozpadu tego materiału?

34. Udowodnij, że $\overline{T} = 1 / \lambda$.

35. Okres połowicznego rozpadu strontu $^{91}_{38}\mathrm{Sr}$ jest równy $9{,}7\ \mathrm{h}$. Określ
a. stałą rozpadu tego nuklidu;
b. aktywność po 15 godzinach dla próbki o początkowej masie $1\ \mathrm{g}$.

36. Próbka czystego ^{14}C ($T_{1/2} = 5730\ \mathrm{lat}$) ma aktywność promieniotwórczą $1\ \mathrm{\mu Ci}$. Jaka jest masa próbki?

37. Próbka radioaktywna początkowo zawiera $2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{mol}$ materiału promieniotwórczego, którego okres połowicznego rozpadu wynosi $6\ \mathrm{h}$. Ile moli materiału promieniotwórczego pozostanie po
a. $6\ \mathrm{h}$;
b. $12\ \mathrm{h}$;
c. $36\ \mathrm{h}$?

38. W trakcie prac archeologicznych odkryto stare ognisko. Jak się okazało, pozostały węgiel drzewny zawierał mniej niż $1 / 1000$ normalnej ilości ^{14}C. Oszacuj minimalny wiek węgla drzewnego, wykorzystując równość $2^{10} = 1024$.

39.
a. Oblicz aktywność w kiurach dla $1\ \mathrm{g}$ ^{226}Ra;
b. Wytłumacz, dlaczego twój wynik nie wynosi dokładnie $1\ \mathrm{Ci}$, chociaż kiur pierwotnie miał dokładnie odpowiadać aktywności jednego grama radu.

40. Naturalny uran zawiera ^{235}U (zawartość $0{,}72\%$, $\lambda = 3{,}12 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{s}^{-1}$) oraz ^{238}U (zawartość $99{,}27\%$, $\lambda = 4{,}92 \cdot 10^{-18}\ \mathrm{s}^{-1}$). Jakie były wartości zawartości ^{235}U oraz ^{238}U, kiedy powstawała Ziemia, tj. $4{,}5 \cdot 10^9$ lat temu?

41. Samoloty używane w czasie II wojny światowej miały tarcze wskaźników malowane świecącą farbą radową. Aktywność jednego z takich wskaźników wynosiła $10^5\ \mathrm{Bq}$, gdy wskaźnik był nowy.
a. Jaką masę ^{226}Ra zawierała farba?
b. Po kilku latach luminofor na tarczach wskaźników zdegradował się chemicznie, ale rad się nie ulotnił. Jaka była aktywność tego instrumentu 57 lat po jego wyprodukowaniu?

42. Źródło ^{210}Po wykorzystywane w laboratorium fizycznym jest oznaczone jako posiadające aktywność $1\ \mathrm{\mu Ci}$ w dniu jego wytworzenia. Studentka mierzy radioaktywność tego źródła licznikiem Geigera i stwierdza 1500 zliczeń na minutę. Zauważa, że źródło zostało przygotowane 120 dni przed jej zajęciami. Jaki ułamek rozpadów wykrywa ona swoim licznikiem?

43. Przeciwpancerne pociski z rdzeniem ze zubożonego uranu są wystrzeliwane przez samoloty w czołgi (wysoka gęstość uranu zapewnia ich skuteczność). Uran jest określany jako zubożony, ponieważ zawarty w nim ^{235}U usunięto i wykorzystano w reaktorze, pozostawiając niemal czysty ^{238}U. Uran zubożony błędnie nazywano niepromieniotwórczym. Aby wykazać, że to określenie jest błędne:
a. Oblicz aktywność $60\ \mathrm{g}$ czystego ^{238}U;
b. Oblicz aktywność $60\ \mathrm{g}$ naturalnego uranu, pomijając ^{234}U i wszystkie nuklidy potomne.

10.4 Procesy rozpadu

44. Kaliforn ^{249}Cf ulega rozpadowi alfa.
a. Napisz równanie reakcji;
b. Oblicz energię uwalnianą w procesie rozpadu.

45. Wykonaj obliczenia i odpowiedz na poniższe pytania.
a. Oblicz energię uwalnianą w rozpadzie α jądra ^{238}U;
b. Jaki ułamek masy pojedynczego jądra ^{238}U zostaje utracony w tym procesie? Masa ^{234}Th wynosi $234{,}043\,593\ \mathrm{u}$;
c. Choć względna utrata masy jest duża dla jednego jądra, trudno ją zaobserwować w całej makroskopowej próbce uranu. Dlaczego?

46. Cząstki β^- emitowane w procesie rozpadu ^{3}H (trytu) oddziałują z materią, co prowadzi do emisji światła w świecących w ciemności tabliczkach, np. wskazujących kierunek do wyjścia. W momencie wytworzenia aktywność promieniotwórcza takiej tabliczki, pochodząca od izotopu ^{3}H, wynosi $6 \cdot 10^{11}\ \mathrm{Bq}$.
a. Jaka jest masa trytu?
b. Jaka jest jego aktywność 5 lat po wyprodukowaniu?

47.
a. Napisz pełne równanie rozpadu β^- jądra ^{90}Sr, głównego odpadu z reaktorów jądrowych;
b. Oblicz energię uwalnianą w procesie rozpadu.

48. Napisz reakcję rozpadu β^-, w której powstaje jądro ^{90}Y. Wskazówka: Jądro pierwotne jest głównym odpadem z reaktorów i ma własności chemiczne podobne do wapnia, co powoduje, że po spożyciu kumuluje się w kościach.

49. Napisz kompletne równanie rozpadu w pełnym zapisie ${}^A_Z X_N$ dla rozpadu beta (β^-) nuklidu ^3H (trytu), sztucznego izotopu wodoru, stosowanego w niektórych wyświetlaczach zegarków, ale wytwarzanego głównie do produkcji bomb wodorowych.

50. Jeśli kawałek ołowiu o grubości $1{,}5\,\text{cm}$ może wchłonąć 90% promieniowania ze źródła promieniotwórczego, to ile centymetrów ołowiu potrzeba, aby pochłonąć niemal całe promieniowanie, pozostawiając $0{,}1\%$ jego pierwotnego natężenia?

51. Elektron może oddziaływać z jądrem w procesie wychwytu beta ${}^A_Z X + e \longrightarrow Y + \nu$.
a. Napisz pełne równanie reakcji wychwytu elektronu przez jądro ^7Be;
b. Oblicz energię uwalnianą w tym procesie.

52.
a. Napisz pełne równanie reakcji wychwytu elektronu przez jądro ^{15}O;
b. Oblicz energię uwalnianą w tym procesie.

53. W rzadko obserwowanym procesie rozpadu ^{222}Ra emituje jądro ^{14}C.
a. Równanie rozpadu ma postać $^{222}\text{Ra} \longrightarrow {}^A\text{X} + {}^{14}\text{C}$. Zidentyfikuj nuklid ${}^A\text{X}$;
b. Oblicz energię emitowaną w rozpadzie. Masa ^{222}Ra wynosi $222{,}015\,353\,\text{u}$.

10.5 Rozszczepienie jądra atomowego

54. Duży reaktor energetyczny, który pracował przez kilka miesięcy, został wyłączony, ale szczątkowa aktywność w rdzeniu nadal generuje $150\,\text{MW}$ energii. Jaka jest aktywność promieniotwórcza rdzenia, jeśli średnia energia na jeden rozpad izotopów pozostałych po procesie rozszczepienia wynosi $1\,\text{MeV}$?

55. Wykonaj obliczenia oraz odpowiedz na pytanie.
a. Oblicz energię uwalnianą w wywołanym przez neutron procesie rozszczepienia $\text{n} + {}^{238}\text{U} \longrightarrow {}^{96}\text{Sr} + {}^{140}\text{Xe} + 3\text{n}$, jeśli $m\left({}^{96}\text{Sr}\right) = 95{,}921\,750\,\text{u}$, a $m\left({}^{140}\text{Xe}\right) = 139{,}921\,64\,\text{u}$;
b. Ta wartość jest większa o blisko $6\,\text{MeV}$ niż wynik dla rozszczepienia spontanicznego. Dlaczego?
c. Udowodnij, że w tej reakcji są zachowane całkowita liczba nukleonów i całkowity ładunek.

56.
a. Oblicz energię uwalnianą w wywołanym przez neutron procesie rozszczepienia $\text{n} + {}^{235}\text{U} \longrightarrow {}^{92}\text{Kr} + {}^{142}\text{Ba} + 2\text{n}$, jeśli $m\left({}^{92}\text{Kr}\right) = 91{,}926\,269\,\text{u}$ i $m\left({}^{142}\text{Ba}\right) = 141{,}916\,361\,\text{u}$;
b. Udowodnij, że w tej reakcji są zachowane całkowita liczba nukleonów i całkowity ładunek.

57. Moc elektryczna dużej elektrowni jądrowej wynosi $900\,\text{MW}$. Osiąga ona sprawność konwersji energii jądrowej na elektryczną równą 35%.
a. Jaka jest generowana moc energii cieplnej w megawatach?
b. Ile jąder ^{235}U ulega rozszczepieniu co sekundę przy założeniu, że typowe rozszczepienie wytwarza $200\,\text{MW}$ energii?
c. Jaka masa ^{235}U ulega rozszczepieniu w ciągu jednego roku pracy pełną mocą?

58. Oblicz całkowitą energię uwolnioną w procesie rozszczepienia $1\,\text{kg}$ uranu ${}^{235}_{92}\text{U}$.

10.6 Fuzja jądrowa

59. Udowodnij, że w każdej z następujących reakcji syntezy jądrowej w cyklu protonowym zachowane są całkowita liczba nukleonów i całkowity ładunek.
a. ${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \longrightarrow {}^2\text{H} + e^+ + \nu$;
b. ${}^1\text{H} + {}^2\text{H} \longrightarrow {}^3\text{He} + \gamma$;
c. ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H}$.

Wypisz wartości każdej zachowanej wielkości przed każdą reakcją i po niej.

60. Oblicz ilość uwolnionej energii w każdej reakcji termojądrowej w cyklu protonowym i sprawdź wartości ustalone w poprzednim zadaniu.

61. Pokaż, że całkowita energia uwalniana w cyklu protonowym wynosi $26{,}7\,\text{MeV}$, biorąc pod uwagę łączny efekt energetyczny reakcji ${}^1\text{H} + {}^1\text{H} \longrightarrow {}^2 2 + e^+ + \nu$, ${}^1\text{H} + {}^2\text{H} \longrightarrow {}^3\text{He} + \gamma$ i ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + {}^1\text{H} + {}^1\text{H}$. Nie zapomnij uwzględnić energię anihilacji.

62. W tekście wspomniano o dwóch reakcjach syntezy jądrowej $\text{n} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + \gamma$ i $\text{n} + {}^1\text{H} \longrightarrow {}^2\text{H} + \gamma$. W obu uwalniana jest energia, ale w drugiej powstaje też więcej paliwa. Udowodnij, że energie uzyskiwane w tych reakcjach wynoszą odpowiednio $20{,}58\,\text{MeV}$ i $2{,}22\,\text{MeV}$. Określ, który z powstających nuklidów jest silniej związany: ^4He czy ^2H.

63. Moc Słońca wynosi około $4 \cdot 10^{26}\,\text{W}$.
a. Jeśli 90% tej energii jest dostarczane przez cykl protonowy, to ile protonów zużywanych jest w ciągu sekundy?
b. Ile neutrin pochodzących z tego procesu opuszcza Słońce w ciągu sekundy na każdy metr kwadratowy jego powierzchni?

64. Innym ciągiem reakcji, w których następuje fuzja wodoru w hel w Słońcu, a w jeszcze większym stopniu w gorętszych od niego gwiazdach, jest cykl CNO:
1. $^{12}C + ^{1}H \longrightarrow ^{13}N + \gamma$,
2. $^{13}N \longrightarrow ^{13}C + e^{+} + \nu$,
3. $^{13}C + ^{1}H \longrightarrow ^{14}N + \gamma$,
4. $^{14}N + ^{1}H \longrightarrow ^{15}O + \gamma$,
5. $^{15}O \longrightarrow ^{15}N + e^{+} + \nu$,
6. $^{15}N + ^{1}H \longrightarrow ^{12}C + ^{4}He$.

Proces ten jest cyklem, ponieważ ^{12}C pojawia się na początku i na końcu tych reakcji. Napisz ogólny bilans tego cyklu (tak jak zrobiliśmy dla cyklu protonowego, otrzymując $2e + 4^{1}H \longrightarrow ^{4}He + 2\nu + 6\gamma$). Załóż, że pozytony anihilują z elektronami, tworząc kolejne fotony γ.

65. Wykonaj obliczenia i odpowiedz na pytanie.
a. Oblicz energię uwalnianą w czasie fuzji 1 kg mieszaniny deuteru i trytu, z której powstaje hel. Mieszanina zawiera równe liczby jąder deuteru i trytu;
b. Jeśli proces ten odbywa się nieprzerwanie i trwa rok, to jaka jest średnia generowana moc?

10.7 Skutki biologiczne i zastosowania medyczne promieniowania jądrowego

66. Określ równoważnik dawki w milisiwertach odpowiadający
a. $0{,}1$ Gy promieniowania X;
b. ekspozycji oka na $2{,}5$ mGy neutronów;
c. $1{,}5$ mGy promieniowania α.

67. Oblicz dawki promieniowania w grejach dla
a. 10 mSv równoważnika dawki otrzymanej w rentgenowskim badaniu fluoroskopowym;
b. ekspozycji skóry na dawkę 50 mSv promieniowania α;
c. 160 mSv promieniowania β^- i γ pochodzących z ^{40}K w twoim ciele.

68. Oblicz masę ^{239}Pu, która ma aktywność promieniotwórczą 1 kBq.

69. W 1980 roku ukuto określenie picowave (pikofala), wykorzystywane w opisie napromieniowania środków spożywczych, w celu przełamania oporu społecznego poprzez odniesienie do powszechnie uznawanego za bezpieczne promieniowania mikrofalowego. Oblicz energię w megaelektronowoltach fotonu o długości fali jednego pikometra.

70. Jaka jest dawka w siwertach w terapii nowotworu, w której pacjent otrzymuje 200 Gy promieniowania γ?

71. Połowa promieniowania γ pochodzącego z ^{99m}T jest pochłaniana przez ołowianą tarczę o grubości $0{,}17$ mm. Połowa promieniowania γ, które przechodzi przez pierwszą warstwę ołowiu, jest pochłaniana przez drugą warstwę o takiej samej grubości. Jaka grubość ołowiu pochłonie prawie całe to promieniowanie γ pozostawiając $1 / 1000$ jego początkowej intensywności?

72. Jaka dawka w grejach jest potrzebna, aby jej równoważnik otrzymany przez guz nowotworowy wyniósł 40 Sv, jeśli jest on naświetlany promieniami α?

73. Przyjmuje się, że prawdopodobieństwo wystąpienia w określonym przedziale czasu skutków napromieniowania jest proporcjonalne do równoważnika dawki otrzymanej przez daną osobę. Na podstawie analiz statystycznych oszacowano, że współczynnik proporcjonalności dla zgonu spowodowanego nowotworem równy jest $1 / (10^3 \text{ Sv rok})$, a dla wad genetycznych wynosi on $0{,}33 / (10^3 \text{ Sv rok})$. Hydraulik w elektrowni jądrowej otrzymuje dawkę 20 mSv na całe ciało w ciągu 15 minut podczas usuwania awarii zaworu. Oblicz roczne ryzyko zgonu z powodu nowotworu związane z napromieniowaniem oraz prawdopodobieństwo wystąpienia wady genetycznej wynikające z tej maksymalnej dopuszczalnej ekspozycji.

74. Oblicz równoważnik dawki w siwertach na rok, otrzymanej przez płuca pracownika zakładów zbrojeniowych, który w wyniku wypadku wdycha i zatrzymuje aktywność promieniotwórczą 1 kBq plutonu ^{239}Pu. Masa narażonej tkanki płucnej wynosi 2 kg, a pluton rozpada się przez emisję cząstki α o energii $5{,}23$ MeV. Przyjmij wartość WSB równą 20.

ZADANIA DODATKOWE

75. Podejrzana strona internetowa stwierdza, że masa atomowa chloru wynosi $40 \text{ g} / \text{mol}$. Sprawdź ten wynik. Wskazówka: Dwa najpowszechniej występujące stabilne izotopy chloru to $^{35}_{17}Cl$ i $^{37}_{17}Cl$. Zawartość naturalna ^{35}Cl wynosi $75{,}8\%$, a ^{37}Cl $24{,}2\%$.

76. Fizyk cząstek elementarnych odkrywa neutralną cząstkę o masie $2{,}027\,33$ u i przypuszcza, że są to dwa związane ze sobą neutrony.
a. Oblicz energię wiązania;
b. Co w tym wyniku budzi zastrzeżenia?

77. Fizyk jądrowy znajduje 1 μg izotopu ^{226}Ra w kawałku rudy uranu ($T_{1/2} = 1600$ lat).
a. Stosując prawo rozpadu określ, ile ^{226}Ra musiałoby być na Ziemi, gdy powstała ona $4{,}543 \cdot 10^9$ lat temu, by do chwili obecnej pozostał 1 μg;
b. Co budzi zastrzeżenia w tym wyniku?
c. W jaki sposób można rozwiązać tę zagadkę?

78. Grupa naukowców określa za pomocą datowania węglowego wiek kawałka drewna na 3 mln lat. Dlaczego wynik ten nie ma sensu?

79. Twój kolega z laboratorium twierdzi, że kryształ jodku sodu o grubości $2\ \mathrm{cm}$ przepuszcza 10% promieniowania, pochłaniając resztę, a kawałek z tego samego materiału o grubości $4\ \mathrm{cm}$ przepuszcza tylko 5%. Czy ten wynik jest poprawny?

80. W dziale naukowym pewniej gazety ukazał się artykuł na temat grupy naukowców próbujących zbudować nowy reaktor jądrowy, który rozszczepiałby żelazo (Fe). Czy to jest dobry pomysł?

81. Ceramiczna powłoka na pomarańczowo-czerwonym talerzu amerykańskiej firmy „Fiesta” jest wykonana z U_2O_3 i zawiera $50\ \mathrm{g}$ izotopu ^{238}U, ale bardzo mało ^{235}U.

a. Jaka jest aktywność promieniotwórcza talerza?

b. Oblicz całkowitą energię, która zostanie uwolniona w rozpadzie ^{238}U;

c. Jeśli koszt energii wynosi 50 groszy za $\mathrm{kW\,h}$, to jaka jest ekonomiczna wartość wyemitowanej energii (produkcję tych kolorowych talerzy ceramicznych zakończono w latach 70. XX wieku, ale nadal są one dostępne na rynku kolekcjonerskim)?

82. Duże ilości zubożonego uranu (^{238}U) są dostępne jako produkt uboczny przetwarzania uranu w celu uzyskania paliwa do reaktorów lub broni. Uran ma bardzo dużą gęstość i nadaje się na elementy balastowe (przeciwwagę) w samolotach. Załóżmy, że mamy blok $4000\ \mathrm{kg}$ izotopu ^{238}U.

a. Oblicz jego aktywność promieniotwórczą;

b. Ile energii cieplnej wytwarza się w ciągu doby w wyniku termalizacji energii rozpadu?

c. Czy uważasz, że da się wykryć tę energię jako ciepło? Wyjaśnij dlaczego.

83. Kawałek drewna ze starożytnego egipskiego grobowca badany jest pod kątem aktywności węgla ^{14}C. Okazuje się, że ma on aktywność na gram węgla równą $A = 10\ \mathrm{min^{-1}\ g^{-1}}$. Jaki jest wiek drewna?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

84. To zadanie pokazuje, że energia wiązania elektronu w stanie podstawowym atomu wodoru jest znacznie mniejsza niż energie spoczynkowe protonu i elektronu.

a. Oblicz masę równoważną energii wiązania elektronu w atomie wodoru, równej $13{,}6\ \mathrm{eV}$. Wynik podaj w jednostkach masy atomowej i porównaj go ze znaną masą atomu wodoru;

b. Odejmij znaną masę protonu od znanej masy atomu wodoru;

c. Oblicz stosunek energii wiązania elektronu $(13{,}6\ \mathrm{eV})$ do energii równoważnej masie elektronu $(0{,}511\ \mathrm{MeV})$;

d. W jak sposób twoje odpowiedzi potwierdzają tezę tego zadania?

85. Sonda kosmiczna *Galileo* rozpoczęła w 1989 roku swą długą podróż, której trasa miała przebiegać w pobliżu Wenus i Ziemi, by ostatecznie osiągnąć orbitę Jowisza. Jej źródłem zasilania było $11\ \mathrm{kg}$ izotopu ^{238}Pu, który jest produktem ubocznym produkcji plutonu na potrzeby broni jądrowej. Energia elektryczna jest generowana termoelektrycznie z ciepła, które jest wytwarzane, gdy cząstki α o energii $5{,}59\ \mathrm{MeV}$, emitowane w każdym procesie rozpadu, zatrzymują się w wyniku zderzeń w plutonie i jego osłonie. Okres połowicznego rozpadu ^{238}Pu wynosi 87,7 roku.

a. Jaka była pierwotna aktywność promieniotwórcza ^{238}Pu w bekerelach?

b. Jaka moc (w kilowatach) była emitowana?

c. Jaka moc była emitowana 12 lat po wystrzeleniu sondy? Możesz pominąć dodatkową energię pochodzącą z rozpadu nuklidów potomnych oraz straty wynikające z ucieczki promieni γ.

86. Oblicz energię emitowaną w rozpadzie β^- jądra ^{60}Co.

87. Inżynierowie są często wzywani do przeglądu i, jeśli to konieczne, naprawy sprzętu w elektrowniach jądrowych. Wyobraźmy sobie, że w mieście gasną światła. Po oględzinach reaktora jądrowego znajdujesz nieszczelną rurę, która prowadzi z generatora pary do komory turbiny.

a. Jak mają się do siebie wyniki pomiaru ciśnienia w komorze turbiny i w skraplaczu pary?

b. Dlaczego reaktor jądrowy nie wytwarza energii elektrycznej?

88. Aby dwa jądra połączyły się w reakcji jądrowej, muszą poruszać się wystarczająco szybko, by odpychająca siła Coulomba między nimi nie zapobiegała ich zbliżeniu na odległość $R \approx 10^{-14}\ \mathrm{m}$. Na takich lub mniejszych odległościach przyciągające siły jądrowe przeważają nad siłą Coulomba i jądra mogą się połączyć.

a. Określ prostą formułę, która może służyć do oszacowania minimalnej energii kinetycznej jąder niezbędnej do ich połączenia. Aby uprościć obliczenia, załóż, że jądra są identyczne i przemieszczają się naprzeciw siebie z tą samą co do wartości prędkością v;

b. Na podstawie tej minimalnej energii kinetycznej oszacuj minimalną temperaturę, jaką musi mieć gaz jąder, by znaczna liczba jąder ulegała fuzji. Oblicz tę minimalną temperaturę najpierw dla wodoru, a następnie dla helu. Wskazówka: Aby nastąpiła fuzja, energia kinetyczna oddalonych od siebie jąder musi być co najmniej równa kulombowskiej energii potencjalnej jąder, które zbliżyły się do siebie na odległość R.

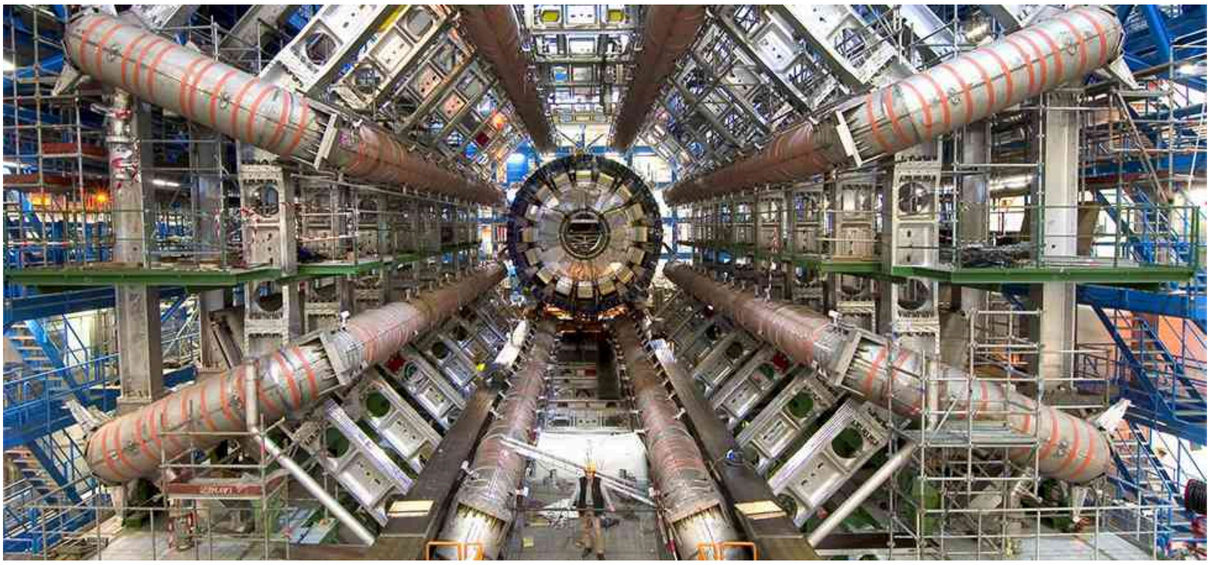
89. Rozważ reakcję $\mathrm{n} + {}^{3}\mathrm{He} \longrightarrow {}^{4}\mathrm{He} + \gamma$. Oblicz ilość

energii przekazanej do ^{4}He i γ (po prawej stronie równania). Załóż, że substraty są początkowo w spoczynku. Wskazówka: Użyj zasady zachowania pędu.

90. Inżynierowie są często wzywani do przeglądu i, jeśli to konieczne, naprawy sprzętu w szpitalach. Wyobraźmy sobie, że aparat PET działa wadliwie. Po oględzinach aparatu podejrzewasz, że jeden z detektorów fotonów jest nieprawidłowo ustawiony. Aby sprawdzić swoje przypuszczenie, umieszczasz jeden detektor w położeniu $(r, \theta, \phi) = (1{,}5, 45^\circ, 30^\circ)$ względem testowej próbki radioaktywnej w środku łóżka pacjenta.

a. Jeżeli drugi detektor fotonów jest prawidłowo ustawiony, to gdzie powinien on być położony?
b. Jaki jest oczekiwany wynik pomiarów energii?

11 | FIZYKA CZĄSTEK ELEMENTARNYCH I KOSMOLOGIA



Rysunek 11.1 **Wielki Zderzacz Hadronów** (ang. **Large Hadron Collider, LHC**) znajduje się ponad 150 m pod ziemią na granicy szwajcarsko-francuskiej, niedaleko Genewy w Szwajcarii. LHC jest najpotężniejszym w historii urządzeniem badawczym skonstruowanym przez człowieka do zgłębiania fizyki oddziaływania cząstek elementarnych. Na zdjęciu widać detektor ATLAS, który umożliwia identyfikację nowych cząstek powstałych w wyniku zderzeń. Źródło: modyfikacja pracy Maximiliena Brice'a, CERN

Treść rozdziału

Wstęp

Na początku tego podręcznika omawialiśmy szeroki zakres skal wielkości występujących w fizyce, od najmniejszych cząstek do największego możliwego obiektu – całego Wszechświata. W tym, ostatnim już, rozdziale naszego podręcznika przedstawimy niektóre z najbardziej zaawansowanych zagadnień fizyki typowych dla tych skal. Fizyka cząstek elementarnych zajmuje się najbardziej fundamentalnymi budulcami materii i siłami, które pozwalają utrzymywać je jako całość. Kosmologia jest nauką o gwiazdach, galaktykach i wszystkich (także niepoznanych jeszcze) strukturach wypełniających Wszechświat – ich powstaniem, ewolucją i przyszłością.

Te dwa obszary zainteresowań fizyki nie są tak od siebie odległe, jak moglibyśmy się spodziewać. Badania prowadzone nad cząstkami elementarnymi wymagają użycia olbrzymich energii do wyprodukowania pojedynczych, wyizolowanych cząstek, co wymaga budowy jednych z najpotężniejszych maszyn, jakie człowiek potrafi skonstruować.

Z drugiej strony tak wielkie energie występowały w najwcześniejszych etapach rozwoju Wszechświata, a dzisiejszy Wszechświat jest częściowo ukształtowany właśnie przez naturę i oddziaływania cząstek elementarnych, które wtedy powstały. Musimy wiedzieć, że fizyka cząstek elementarnych i kosmologia są obszarami aktualnych i zaawansowanych badań oraz sporów między naukowcami i spekulacji przedstawicieli innych środowisk (w tym wielu pisarzy science-fiction). W tym rozdziale spróbujemy rozróżnić to, co wiemy już na pewno na podstawie wniosków z obserwacji i eksperymentalnej rewizji wiedzy teoretycznej, i to, co pozostaje niezwykle fascynującymi ideami, domysłami i przypuszczeniami jeszcze nie w pełni potwierdzonymi.

11.1 | Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać cztery oddziaływania podstawowe i cząstki w nich pośredniczące;
- definiować i opisywać fermiony oraz bozony;
- identyfikować i opisywać rodziny kwarków i leptonów;
- rozróżniać cząstki i antycząstki oraz opisywać ich oddziaływania.

Fizyka cząstek elementarnych (nazywana też fizyką wysokich energii) zajmuje się badaniem cząstek elementarnych występujących w przyrodzie i podstawowych oddziaływań między nimi. Naukowcy zajmujący się tą dziedziną – fizycy wysokich energii – w odróżnieniu od pozostałych fizyków mają do czynienia z zupełnie innymi rozmiarami badanych obiektów i wielkościami mierzonych energii. Nie interesuje ich mikroskopowy świat komórek, molekuł, atomów ani nawet jąder atomowych. Są oni zainteresowani poznaniem procesów zachodzących w skali znacznie mniejszej od rozmiarów jądra atomowego. Jednocześnie w swoich badaniach dotykają największych tajemnic przyrody: Jaki był początek Wszechświata? W jaki sposób wyjaśnić rozkład masy we Wszechświecie? Dlaczego we Wszechświecie jest więcej materii niż antymaterii? Dlaczego zachowane są takie wielkości jak energia i pęd? W jakim kierunku będzie ewoluował Wszechświat w dalekiej przyszłości?

Cztery oddziaływania podstawowe

Ważnym krokiem w próbie odpowiedzi na postawione powyżej pytania jest zrozumienie natury cząstek elementarnych i ich wzajemnych oddziaływań. Oddziaływanie między cząstkami możemy wyrazić za pomocą czterech podstawowych sił – przejawów czterech **oddziaływań podstawowych** (ang. **fundamental forces**). W porządku malejącym są to: **silne oddziaływanie jądrowe** (ang. **strong nuclear force**), **oddziaływanie elektromagnetyczne** (ang. **electromagnetic force**), **słabe oddziaływanie jądrowe** (ang. **weak nuclear force**) oraz **oddziaływanie grawitacyjne** (ang. **gravitational force**). Oddziaływania podstawowe nie mogą być rozłożone ani zamienione na żadne inne oddziaływania. Na przykład siła grawitacji nie może być traktowana jako przejaw innej siły (np. elektrycznej), bo jej natura jest odmienna.

1. **Oddziaływanie jądrowe silne.** Silne oddziaływanie jądrowe jest bardzo silnym oddziaływaniem przyciągającym, które występuje tylko na bardzo niewielkich odległościach (ok. 10^{-15} m). Cząstki związane silnym przyciąganiem jądrowym są związane tylko wtedy, gdy występują blisko siebie, a po przekroczeniu pewnej granicznej odległości dochodzi do rozerwania wiązania i cząstki (np. dodatnio naładowane protony) się odpychają. Dodatkowo oddziaływanie silne ma pewną „dziwną” cechę – mówimy o tzw. asymptotycznej swobodzie cząstek, co oznacza, że cząstki znajdujące się bardzo blisko siebie zachowują się jakby były prawie swobodne (niezwiązane), gdy się od siebie zaczynają oddalać – pojawia się oddziaływanie, które przyciąga je z powrotem do siebie, a dopiero po przekroczeniu większej odległości może dojść do rozerwania wiązania. Wyjaśnienie zjawiska asymptotycznej swobody stało się podstawą przyznania Nagrody Nobla z fizyki w 2004 roku. Oddziaływanie silne odpowiada za wiązanie protonów i neutronów w jądrach atomowych. Nie wszystkie cząstki doznają oddziaływania silnego, na przykład elektrony i neutrina są na nie obojętne. Jak wskazuje sama nazwa, oddziaływanie silne jest znacznie większe niż wszystkie inne.
2. **Oddziaływanie elektromagnetyczne.** Oddziaływanie elektromagnetyczne występuje nawet na dużych odległościach między ciałami (jego zasięg jest nieskończony), ale siła równa się tylko ok. $1 / 100$ wielkości oddziaływań silnych. O cząstkach, które doznają tego oddziaływania, mówimy, że mają ładunek. W klasycznej teorii oddziaływań elektrycznych (elektrostatyce, którą rządzi prawo Coulomba) siła elektrostatycznego oddziaływania zależy od iloczynu ładunków oddziałujących cząstek i jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości między nimi. W przeciwieństwie do oddziaływania silnego, które zawsze ma charakter przyciągający, oddziaływanie elektromagnetyczne może być przyciągające lub odpychające (ładunki różnoimienne przyciągają się, a jednoimienne – odpychają). Siła wynikająca z oddziaływań magnetycznych

(siła Lorentza) zależy w bardziej złożony sposób od ładunku elektrycznego, jakim obdarzona jest cząstka, i jej ruchu. Unifikacja oddziaływań elektrostatycznych i magnetycznych (dokonana przez Jamesa Clerka Maxwella) to jedno z największych osiągnięć naukowych i intelektualnych ludzkości w XIX wieku. Siła elektromagnetyczna stanowi podstawę modeli struktury atomowej materiałów i wiązań molekularnych.

3. **Oddziaływanie jądrowe słabe**. Oddziaływanie słabe występuje na bardzo niewielkich odległościach (rzędu 10^{-15} m), a jego wielkość, jak wskazuje nazwa, jest bardzo mała. Wynosi ok. 10^{-6} wielkości oddziaływania silnego. Oddziaływanie słabe przejawia się przede wszystkim w rozpadach cząstek elementarnych i procesach, w które zaangażowane są neutrina. Przykładowo neutron może się rozpaść na proton, elektron i neutrino elektronowe (ściślej: antyneutrino elektronowe) dzięki oddziaływaniu słabemu. Poznanie natury oddziaływań słabych jest istotne dla zrozumienia nukleosyntezy gwiezdnej – procesu wytwarzania jąder cięższych atomów wewnątrz jąder gwiazd.
4. **Oddziaływanie grawitacyjne**. Podobnie jak oddziaływanie elektromagnetyczne również oddziaływanie grawitacyjne ma nieskończony zasięg występowania. Jednakże jego siła jest tylko ułamkiem 10^{-38} wielkości oddziaływań silnych. W klasycznej teorii grawitacji Newtona siła grawitacji zależy wprost proporcjonalnie od iloczynu mas oddziałujących cząstek i odwrotnie proporcjonalnie od kwadratu odległości między nimi (masa odgrywa rolę ładunku w oddziaływaniach grawitacyjnych). To oddziaływanie jest zawsze przyciągające. We współczesnych teoriach oddziaływań oddziaływania grawitacyjne traktuje się jako szczególny przypadek oddziaływań makroskopowych o niskich energiach. W stosunku do innych typów oddziaływań grawitacyjne jest zdecydowanie najsłabsze.

Obecnie uważa się, że oddziaływania podstawowe są niezupełnie podstawowe i można je raczej traktować jako różne przejawy tego samego oddziaływania (uniwersalnego). Tak jak oddziaływania elektryczne i magnetyczne zunifikowano do oddziaływań elektromagnetycznych, tak w latach 70. XX wieku naukowcom udało się dokonać unifikacji oddziaływań elektromagnetycznych i słabych oddziaływań jądrowych. W ten sposób mamy **oddziaływania elektrosłabe** (ang. **electroweak force**). Wszelkie naukowe próby unifikacji oddziaływań silnych i elektrosłabych są nazywane **wielką teorią unifikacji (GUT)** (ang. **grand unified theory**), a próby unifikacji wszystkich czterech oddziaływań podstawowych w jedno określa się mianem **teorii wszystkiego** (ang. **theory of everything**). Powrócimy do tych koncepcji w dalszych częściach rozdziału.

Klasyfikacja cząstek elementarnych

W przyrodzie występuje duża liczba cząstek subatomowych (o rozmiarach mniejszych niż jądro atomowe); nazywamy je cząstkami elementarnymi. Dodatkowo niektóre z nich – te, które nie mają struktury wewnętrznej, są już niepodzielne (przynajmniej wg aktualnego stanu wiedzy) – nazywamy cząstkami fundamentalnymi. Na przykład proton jest cząstką elementarną, bo jest częścią jądra atomowego, ale składa się z kwarków, które z kolei są cząstkami fundamentalnymi, bo są niepodzielne. Wszystkie te cząstki możemy klasyfikować według różnych kryteriów. Tutaj skupimy się na dwóch: ze względu na spin oraz ze względu na typ oddziaływania fundamentalnego. Przypomnijmy, że spin cząstki może być interpretowany jako jej obrót wokół własnej (wewnętrznej) osi. W tym sensie jest to jakby wewnętrzny moment pędu cząstki. Podziały ze względu na te dwie właściwości prezentujemy poniżej.

Klasyfikacja ze względu na spin

Ze względu na wartość spinu wszystkie cząstki dzielimy na **fermiony** (ang. **fermion**) i **bozony** (ang. **boson**). Fermiony mają spiny o wartościach połówkowych wyrażonych w jednostkach stałej $\hbar$ ($\hbar\ /\ 2, 3\hbar\ /\ 2, \ldots$), natomiast bozony – o wartościach całkowitych ($0\hbar, 1\hbar, 2\hbar, \ldots$). Mówimy krótko: spin połówkowy lub całkowity. Znanymi nam przykładami fermionów są elektron, proton i neutron. Z kolei foton to najprostszy przykład bozonu. Z punktu widzenia mechaniki kwantowej fermiony i bozony zachowują się zupełnie inaczej, są to odrębne rodziny cząstek. Przykładowo, gdy elektrony zamkniemy w niewielkiej przestrzeni, to **zakaz Pauliego** (ang. **Pauli's exclusion principle**) wymusi, że dwa elektrony nie będą mogły obsadzać tego samego stanu kwantowo-mechanicznego. Natomiast fotony zamknięte w małym pudełku wcale nie muszą spełniać tego zakazu i mogą przyjąć dowolny stan.

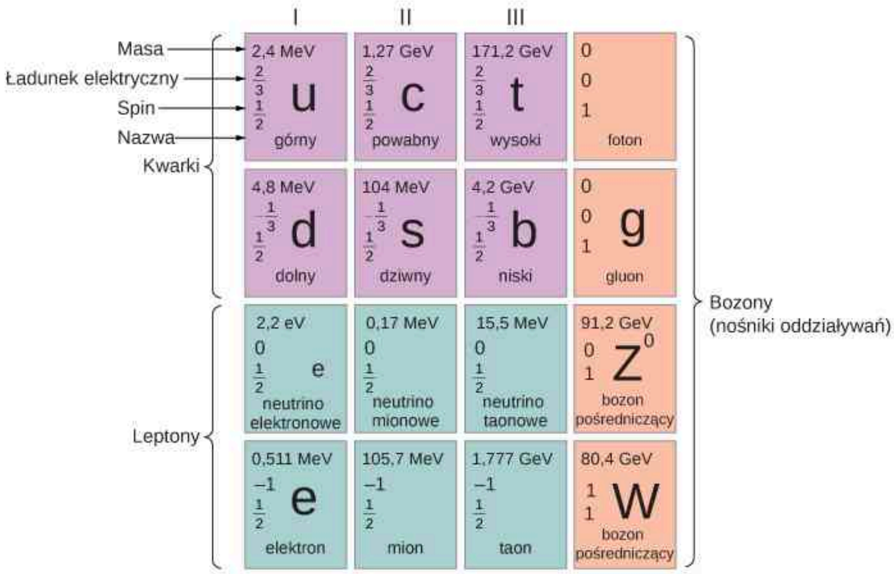
Odmienne zachowanie fermionów i bozonów można także zrozumieć w oparciu o właściwość nierozróżnialności (identyczności) cząstek. Cząstki mają cechę nierozróżnialności, gdy są identyczne. Na przykład elektrony są nierozróżnialne, bo każdy elektron we Wszechświecie ma dokładnie te same: masę, ładunek elektryczny i spin – „jeśli zobaczyłeś jeden elektron, to znasz już je wszystkie". Jeśli w małym układzie zamkniętym na niewielkiej przestrzeni znajdują się dwa elektrony, które nagle zostaną zamienione miejscami, to kwadrat funkcji falowej opisującej układ ($|\Psi|^2$), będący wielkością mierzalną, pozostaje niezmieniony. Gdyby tak nie było, moglibyśmy eksperymentalnie ocenić, czy cząstki zostały zamienione, czy nie, a one same nie byłyby nierozróżnialne. Także fotony (i wszystkie bozony) są cząstkami nierozróżnialnymi. Czym się więc różnią te dwie rodziny cząstek? Fermiony i bozony możemy odróżnić po tym, czy znak funkcji falowej (Ψ) – wielkości bezpośrednio niemierzalnej – zamienia się na przeciwny przy zamianie dwóch cząstek miejscami

$$\Psi \longrightarrow -\Psi \text{ (nierozróżnialne fermiony)},$$
$$\Psi \longrightarrow +\Psi \text{ (nierozróżnialne bozony)}.$$

Mówimy, że funkcja falowa układu bozonów jest symetryczna ze względu na zamianę cząstek (nie zmieni ona znaku przy zamianie położeń dwóch cząstek lub ich spinów), natomiast funkcja falowa fermionów jest antysymetryczna (zmienia znak). Zasada wykluczania Pauliego stanowi konsekwencję antysymetryczności funkcji falowej fermionów, mówimy tutaj o **symetrii funkcji falowej** (ang. **exchange symmetry**) – związek ten wynika z bardziej zaawansowanych rozważań fizyki teoretycznej. Struktura elektronowa pierwiastków została ustalona w oparciu o zakaz Pauliego i dlatego jest także wynikiem nierozróżnialności elektronów.

Klasyfikacja ze względu na typ oddziaływania

Fermiony dzielą się dalej na **kwarki** (ang. **quark**) i **leptony** (ang. **lepton**). Najważniejsza różnica między tymi dwiema rodzinami cząstek polega na tym, że kwarki oddziałują silnie, a leptony nie. Wszystkie kwarki i leptony (a także bozony, które omówimy później) zaprezentowano w tabeli na Rysunku 11.2. Pierwsze dwa wiersze (trzy kolumny zaznaczone na fioletowo) zawierają sześć kwarków. Kwarki dzielimy dodatkowo na dwie rodziny: górne, powabne i wysokie (zwane też prawdziwymi) – oznaczone kolejno przez $(\mathrm{u}, \mathrm{c}, \mathrm{t})$ od angielskich nazw **up**, **charm**, **top/true**, oraz dolne, dziwne i niskie (zwane też pięknymi) – oznaczone przez $(\mathrm{d}, \mathrm{s}, \mathrm{b})$ od angielskich nazw **down**, **strange**, **bottom/beauty**. Kwarki przynależące do jednej rodziny mają te same właściwości, różnią się jedynie masą (wyrażoną w $\mathrm{MeV} / \mathrm{c}^2$). Przykładowo masa kwarka wysokiego (t) jest o wiele większa niż masa kwarka powabnego (c), a masa kwarka c jest o wiele większa od masy kwarka górnego (u). Wszystkie kwarki oddziałują ze sobą za pośrednictwem oddziaływania silnego.



Rysunek 11.2 Rodziny cząstek fundamentalnych ułożone pod względem typu oddziaływania między nimi. Źródło: modyfikacja pracy „MissMJ”/Wikimedia Commons

Dwa dolne wiersze na rysunku (zaznaczone na zielono) zawierają sześć leptonów ułożonych w dwie grupy: elektron, mion i taon (e, μ, τ) oraz neutrino elektronowe, neutrino mionowe i neutrino taonowe $(\nu_\mathrm{e}, \nu_\mu, \nu_\tau)$. Mion jest ponad 200 razy cięższy od elektronu, mimo to cechuje się dużym podobieństwem do elektronu pod względem właściwości. Taon jest ok. 3500 razy cięższy od elektronu, ale również go przypomina. Wszystkie trzy cząstki mają podobne właściwości. Zaraz po powstaniu (np. wskutek wytworzenia w akceleratorze) taony i miony szybko rozpadają się na lżejsze cząstki za pośrednictwem oddziaływania słabego. Leptony doznają oddziaływań słabych, elektromagnetycznych i grawitacyjnych, ale nie oddziałują silnie. O kwarkach i leptonach będziemy mówić więcej w dalszych częściach rozdziału.

Bozony (zaznaczone na rysunku kolorem pomarańczowym) są nośnikami oddziaływań między fermionami. Pośredniczą w oddziaływaniach. Leptony i kwarki oddziałują ze sobą, wysyłając i pochłaniając bozon pośredniczący. Przykładowo oddziaływanie kulombowskie występuje wtedy, gdy dwie naładowane cząstki wyślą i pochłoną (wymienią) fotony. Mówimy, że fotony przenoszą oddziaływanie między ładunkami, są pośrednikami tego oddziaływania.

Podobnie przyciąganie między dwoma kwarkami odbywa się na zasadzie wymiany **gluonów** (ang. **gluon**). Pozostałe bozony to **bozony W i Z** (ang. **W and Z bosons**; nośniki oddziaływania słabego) oraz **grawiton** (ang. **graviton**; nośnik oddziaływania grawitacyjnego). Bozon Higgsa, o którym zapewne także słyszeliście, jest innym rodzajem bozonu – w oddziaływaniu z innymi cząstkami pośredniczy w przekazywaniu nie siły, ale masy. Innymi słowy bozon Higgsa odpowiada za wymianę masy między powstającymi i rozpadającymi się cząstkami. W tym sensie zrozumienie cech i procesów związanych z bozonem Higgsa pozwala odpowiedzieć na pytanie, dlaczego cząstki mają masę. Wszystkie zaprezentowane wyżej wielkości są częścią tzw. modelu standardowego – teorii fizyki cząstek elementarnych – którym bardziej szczegółowo zajmiemy się później.

Cząstki i antycząstki

Pod koniec lat 20. XX wieku szczególną teorię względności Einsteina udało się połączyć z mechaniką kwantową, dzięki czemu powstała relatywistyczna teoria kwantowa elektronu. Największe zasługi dla niej miał **Paul Dirac (1902–1984)**, który w 1928 roku zaproponował równanie falowe opisujące stan kwantowy elektronu jako cząstki relatywistycznej (równanie Diraca). Zaskakującym wynikiem tej teorii było przewidzenie dwóch stanów energetycznych elektronu (energii dodatniej i ujemnej): jeden z nich jest utożsamiany z elektronem, a drugi z cząstką o tej samej masie, lecz przeciwnym ładunku e^+. Tę nową cząstkę nazwano **pozytonem** (ang. **positron**). Odkrycie nastąpiło niedługo po sformułowaniu hipotezy o jego istnieniu – w 1932 roku.

Wkrótce odkryto także, że każdej cząstce materialnej w przyrodzie towarzyszy **antycząstka** (ang. **antiparticle**). Ma ona tę samą masę i ten sam czas życia co towarzysząca jej cząstka, ale znak jej ładunku elektrycznego jest przeciwny. Takie cząstki powstają w reakcjach wysokoenergetycznych, np. zachodzących w reaktorach, ale też w wyniku rozpadów jądrowych czy syntezy jądrowej. Przykładowe antycząstki to: antymion (μ^+), antykwark górny ($\overline{\mathrm{u}}$), zwany częściej kwarkiem anty-u, czy kwark anty-d ($\overline{\mathrm{d}}$). Zwróćmy uwagę, że antycząstki kwarków (zazwyczaj także i antycząstki barionów) oznaczamy kreseczką nad symbolem kwarka, zaś leptony (a także mezony) indeksem górnym $+$ lub - przy symbolu. Wiele barionów (i wszystkie mezony) zawiera antycząstki w swojej strukturze kwarkowej. Na przykład antyproton ($\overline{\mathrm{p}}$) składa się z trzech antykwarków $\overline{\mathrm{u}}\overline{\mathrm{u}}\overline{\mathrm{d}}$, natomiast dodatnio naładowany pion (mezon π^+) składa się z kwarka i antykwarka $\mathrm{u}\overline{\mathrm{d}}$. Niektóre z obojętnych elektrycznie cząstek, jak foton i mezon π^0, są same dla siebie antycząstkami. Podstawowe cząstki i odpowiadające im antycząstki, a także ich podstawowe właściwości zebrano w Tabeli 11.1.

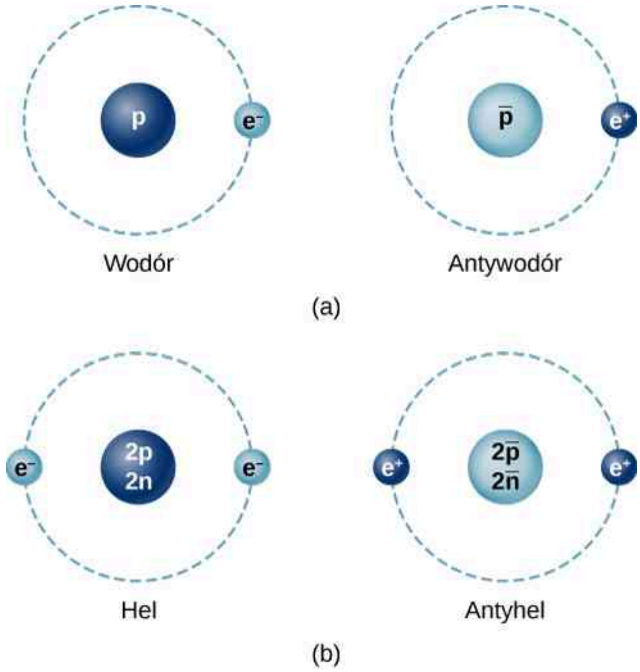
	Nazwa cząstki	Symbol	Antycząstka	Masa (MeV / c^2)	Średni czas życia (s)
			Leptony		
	Elektron	e^-	e^+	0,511	Stabilny
	Neutrino elektronowe	ν_e	$\overline{\nu_e}$	≈ 0	Stabilne
	Mion	μ^-	μ^+	105,7	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$
	Neutrino mionowe	ν_μ	$\overline{\nu_\mu}$	≈ 0	Stabilne
	Taon	τ^-	τ^+	1784	$< 4 \cdot 10^{-13}$
	Neutrino taonowe	ν_τ	$\overline{\nu_\tau}$	≈ 0	Stabilne
			Hadrony		
Bariony	Proton	p	$\overline{\mathrm{p}}$	938,3	Stabilny
	Neutron	n	$\overline{\mathrm{n}}$	939,6	920
	Lambda	Λ^0	$\overline{\Lambda^0}$	1115,6	$2{,}6 \cdot 10^{-10}$
	Sigma	Σ^+	Σ^-	1189,4	$0{,}8 \cdot 10^{-10}$
	Ksi	Ξ^+	Ξ^-	1315	$2{,}9 \cdot 10^{-10}$
	Omega	Ω^+	Ω^-	1672	$0{,}82 \cdot 10^{-10}$
Mezony	Pion	π^+	π^-	13,6	$2{,}6 \cdot 10^{-8}$

Tabela 11.1 Podstawowe cząstki i odpowiadające im antycząstki.

Nazwa cząstki	Symbol	Antycząstka	Masa (MeV / c^2)	Średni czas życia (s)
Pion obojętny (π-zero)	π^0	π^0	135	$0{,}83 \cdot 10^{-16}$
Kaon	K^+	K^-	493,7	$1{,}24 \cdot 10^{-8}$
Kaon krótko żyjący	K_S^0	$\overline{K_S^0}$	497,7	$0{,}89 \cdot 10^{-10}$
Kaon długo żyjący	K_L^0	$\overline{K_L^0}$	497	$5{,}2 \cdot 10^{-8}$
J / Ψ	J / Ψ	J / Ψ	3100	$7{,}1 \cdot 10^{-21}$
Ypsilon	Υ	Υ	9460	$1{,}2 \cdot 10^{-20}$

Tabela 11.1 Podstawowe cząstki i odpowiadające im antycząstki.

Te same siły, które powodują, że materia się nie rozpada, także łączą ze sobą cząstki antymaterii. W pewnych szczególnych warunkach jest możliwe wytworzenie na Ziemi antymaterii, np. antyatomów, takich jak antywodór, antytlen, czy nawet molekuł antywody. Na Rysunku 11.3 porównujemy budowę atomów i antyatomów.



Rysunek 11.3 Porównanie najprostszych atomów materii i antymaterii. (a) W prostym modelu Bohra atom antywodoru składa się z pozytonu orbitującego wokół antyprotonu. (b) Atom antyhelu zawiera dwa pozytony, które poruszają się wokół jądra złożonego z dwóch antyprotonów i dwóch antyneutronów.

Antymateria nie może występować w naturze przez długi czas, ponieważ cząstki i antycząstki natychmiast ulegają anihilacji, wytwarzając promieniowanie o wysokiej energii. Najprostszym przykładem takiego procesu jest anihilacja elektronu i pozytonu. Równanie reakcji w tym procesie możemy zapisać następująco

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \longrightarrow 2\gamma.$$

W wyniku anihilacji pozyton i elektron znikają, a w ich miejsce powstają dwa fotony γ o energii równej masie spoczynkowej elektronu $(0{,}511\,\mathrm{MeV} / c^2)$ każdy. Okazuje się, że w tym procesie muszą powstać dwa fotony rozbiegające się w przeciwnych kierunkach, aby spełnić zasady zachowania energii i pędu. Produkcja pojedynczego fotonu łamałaby zasadę zachowania pędu. Reakcja powyższa może też zachodzić w odwrotnym kierunku: dwa fotony mogą anihilować, w wyniku czego powstaje para elektron–pozyton. Możliwe jest także wytworzenie pary elektron–pozyton przez pojedynczy foton w pobliżu masywnego jądra, które przejmuje część pędu fotonu. Taki odwrotny do anihila-

cji proces nazywamy kreacją par. Wszystkie tego typu reakcje nieustannie rejestrują współczesne detektory cząstek. Występowanie antycząstek (antymaterii) zostało stwierdzone z pewnością, nie jest to pomysł rodem z science-fiction.

Obejrzyj ten filmik (https://openstaxcollege.org/l/21matter) , aby dowiedzieć się więcej o cząstkach materii i antymaterii.

11.2 | Zasady zachowania w fizyce cząstek elementarnych

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- rozróżniać trzy prawa zachowania w fizyce cząstek elementarnych: prawo zachowania liczby barionowej, liczby leptonowej i dziwności;
- określać całkowite liczby barionową, leptonową i dziwność układu cząstek przed zajściem i po zajściu reakcji;
- korzystać z zasad zachowania liczb barionowej, leptonowej i dziwności w celu ustalenia, czy dana reakcja jest możliwa.

Zasady zachowania w fizyce cząstek elementarnych są kluczowe dla zrozumienia ścieżek reakcji cząstek. Z dotychczasowych badań wynika jasno, że energia, pęd i moment pędu są zachowane w oddziaływaniach między cząstkami. Przykładowo anihilacja pozytonu i elektronu pozostających w spoczynku nie może doprowadzić do powstania tylko jednego fotonu, bo łamałoby to zasadę zachowania pędu, co potwierdzono eksperymentalnie. Jak omawialiśmy w rozdziale Teoria względności, szczególna teoria względności modyfikuje definicje pędu, energii i innych wielkości fizycznych. W szczególności pęd relatywistyczny różni się od klasycznego o czynnik $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - (v / c)^2}$, którego wartość zmienia się w zakresie od 1 do ∞, w zależności od prędkości cząstki.

W poprzednich rozdziałach poznaliśmy także inne zasady zachowania. We wszystkich zjawiskach z dziedziny elektrostatyki zachowany jest ładunek elektryczny. Jego zniknięcie w jednym punkcie skutkuje pojawieniem się tego samego ładunku w innym miejscu, ponieważ jest on przenoszony przez cząstki materialne. Nie znamy żadnych procesów fizycznych, które łamałyby zasadę zachowania ładunku elektrycznego. W kolejnych podrozdziałach zajmiemy się trzema mniej znanymi zasadami zachowania w fizyce: zasadą zachowania liczby barionowej, zasadą zachowania liczby leptonowej i zasadą zachowania dziwności. Nie są to jedyne prawa zachowania w fizyce cząstek elementarnych. Znamy np. zasady zachowania wszelkich symetrii (C, P, T) i ich kombinacji, ale o nich nie będziemy mówić.

Zachowanie liczby barionowej

Żadna z dotychczas poznanych zasad zachowania nie wyklucza rozpadu neutronu na elektron i pozyton

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^- .$$

W tym procesie zachowane zostają ładunek, energia i pęd, jednakże nie zachodzi on w przyrodzie, bo łamałby zasadę zachowania liczby barionowej. Mówi ona, że całkowita liczba barionowa układu cząstek musi być taka sama przed reakcją i po niej. Żeby określić ją dla układu, każdej cząstce elementarnej przyporządkowujemy **liczbę barionową** (ang. **baryon number**) B. Liczba barionowa wszystkich barionów wynosi $B = +1$, natomiast wszystkie antybariony mają liczbę barionową $B = -1$, a pozostałe cząstki mają liczbę barionową równą 0. Wracając do powyższego przykładu rozpadu neutronu na parę elektron–pozyton, zauważamy, że neutron ma liczbę barionową $B = +1$, natomiast elektron i pozyton mają liczby barionowe równe 0. Zatem tak zapisana reakcja nie może zachodzić, bo liczba barionowa zmieniałaby się w jej trakcie od 1 do 0. Następujące zderzenie protonu i antyprotonu

$$\mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}} + \overline{\mathrm{p}}$$

spełnia zasadę zachowania liczby barionowej, ponieważ całkowita liczba barionowa przed reakcją i po niej wynosi 0. Liczby barionowe kilkunastu przykładowych cząstek elementarnych, jak również ich liczby leptonowe i dziwność przedstawia Tabela 11.2.

Nazwa cząstki	Symbol	Liczba leptonowa (L_e)	Liczba leptonowa (L_μ)	Liczba leptonowa (L_τ)	Liczba barionowa (B)	Dziwność
Elektron	e^-	1	0	0	0	0
Neutrino elektronowe	ν_e	1	0	0	0	0
Mion	μ^-	0	1	0	0	0
Neutrino mionowe	ν_μ	0	1	0	0	0
Taon	τ^-	0	0	1	0	0
Neutrino taonowe	ν_τ	0	0	1	0	0
Pion	π^+	0	0	0	0	0
Kaon dodatni	K^+	0	0	0	0	1
Kaon ujemny	K^-	0	0	0	0	−1
Proton	p	0	0	0	1	0
Neutron	n	0	0	0	1	0
Cząstka lambda zero	Λ^0	0	0	0	1	−1
Cząstka sigma (dodatnia)	Σ^+	0	0	0	1	−1
Cząstka sigma (ujemna)	Σ^-	0	0	0	1	−1
Cząstka ksi zero	Ξ^0	0	0	0	1	−2
Cząstka ksi (ujemna)	Σ^-	0	0	0	1	−2
Cząstka omega	Ω^-	0	0	0	1	−3

Tabela 11.2 Liczby zachowania cząstek elementarnych.

Przykład 11.1

Zachowanie liczby barionowej

Na podstawie zasady zachowania liczby barionowej oceńmy, które z poniższych reakcji mogą zachodzić:

a. $\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow \pi^0 + \mathrm{n} + \pi^- + \pi^+$;

b. $\mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}}$.

Strategia rozwiązania

Obliczymy całkowitą liczbę barionową substratów i produktów reakcji, a następnie sprawdzimy, czy liczby się zgadzają.

Rozwiązanie

W przypadku reakcji (a) całkowita liczba barionowa substratów wynosi $0 + 1 = 1$, a całkowita liczba barionowa produktów to $0 + 1 + 0 + 0 = 1$. Ponieważ liczby barionowe są sobie równe, to ze względu na zasadę zachowania liczby barionowej reakcja jest możliwa.

W przypadku reakcji (b) liczba barionowa substratów wynosi $1 + (-1) = 0$, a liczba barionowa hipotetycznych produktów to $1 + 1 + (-1) = 1$. Liczby barionowe nie są równe, więc reakcja nie jest możliwa.

Znaczenie

Liczba barionowa zostaje zachowana w pierwszej reakcji, ale w drugiej już nie. Złamanie tej zasady pokazuje, że dana reakcja na pewno nie jest możliwa. Z kolei spełnienie zasady zachowania liczby barionowej jedynie nie wyklucza poprawności reakcji. Pamiętajmy, że są jeszcze inne zasady zachowania.

11.1 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaką liczbę barionową ma jądro wodoru?

Zachowanie liczby leptonowej

Zasada zachowania liczby leptonowej mówi, że całkowita liczba leptonowa substratów musi się równać liczbie leptonowej produktów reakcji. Pewną komplikacją w stosunku do liczby barionowej jest to, że mamy trzy różne **liczby leptonowe** (ang. **lepton numbers**): elektronową liczbę leptonową L_{e}, mionową liczbę leptonową L_{μ} oraz taonową liczbę leptonową L_{τ}. We wszystkich procesach każda z tych liczb leptonowych musi być zachowana oddzielnie. Wartości liczb leptonowych są następujące: elektrony i neutrina elektronowe mają $L_{\mathrm{e}} = 1$, ich antycząstki mają $L_{\mathrm{e}} = -1$, a wszystkie inne cząstki mają $L_{\mathrm{e}} = 0$. Podobnie $L_{\mu} = 1$ dla mionów i neutrin mionowych, $L_{\mu} = -1$ dla ich antycząstek, a $L_{\mu} = 0$ dla wszystkich pozostałych cząstek. Wreszcie $L_{\tau} = 1$, $L_{\tau} = -1$ lub $L_{\tau} = 0$ odpowiednio dla taonów i neutrin taonowych, ich antycząstek i wszystkich pozostałych. Zachowanie liczby leptonowej gwarantuje, że całkowita liczba elektronów i pozytonów we Wszechświecie jest mniej więcej stała. Zauważmy, że w świetle naszej dotychczasowej wiedzy całkowita liczba leptonowa jest zachowana w przyrodzie. Jednak obserwacje fizyczne potwierdzają, że pojedyncze liczby leptonowe (np. L_{e}) podlegają pewnym zmianom, np. w zjawisku nazywanym oscylacjami neutrin.

Żeby zilustrować zasadę zachowania liczby leptonowej, przyjrzyjmy się dwuetapowemu procesowi rozpadu pionu

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_{\mu},$$
$$\mu^+ \longrightarrow \mathrm{e}^+ + \nu_{\mathrm{e}} + \overline{\nu}_{\mu}.$$

W pierwszym procesie suma wszystkich liczb leptonowych dla π^+ wynosi zero. Dla produktów po prawej stronie mamy: $L_{\mu} = -1$ dla mionu μ^+ oraz $L_{\mu} = 1$ dla neutrina mionowego ν_{μ}. Zatem liczba leptonowa mionowa jest w tym procesie zachowana. Ani elektron, ani taon, ani ich neutrina nie są zaangażowane w proces pierwszy, dlatego $L_{\mathrm{e}} = 0$ i $L_{\tau} = 0$ w całym procesie. W takim razie także liczby leptonowe elektronowe i taonowe też są zachowane. W drugim procesie mion μ^+ ma mionową liczbę leptonową równą $L_{\mu} = -1$, podczas gdy liczba ta dla produktów rozpadu wynosi $0 + 0 + (-1) = -1$. Zatem liczba leptonowa mionowa w drugim procesie jest też zachowana. Tak jak liczba elektronowa, bowiem $L_{\mathrm{e}} = 0$ dla μ^+, a dla produktów rozpadu mamy $(-1) + 1 + 0 = 0$. Zauważmy, że żaden taon ani żadne neutrino taonowe nie uczestniczą w drugim procesie, dlatego liczba leptonowa taonowa jest zawsze równa zero i jest zachowana. Podsumowując, w kontekście zasady zachowania liczby leptonowej przedstawiony powyżej dwuetapowy proces rozpadu pionu może zajść w przyrodzie.

Przykład 11.2

Zachowanie liczby leptonowej

Na podstawie zasady zachowania liczby leptonowej oceńmy, która z poniższych reakcji jest możliwa:

a. $\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_{\mathrm{e}}$;

b. $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \nu_{\mu} + \overline{\nu}_{\mu}$.

Strategia rozwiązania

Obliczymy całkowite liczby leptonowe (osobno elektronową, mionową i taonową) dla substratów i produktów reakcji, a następnie sprawdzimy, czy są sobie równe.

Rozwiązanie

W przykładowym procesie (a) liczba leptonowa elektronowa dla neutronu wynosi 0, a suma tych liczb dla produktów rozpadu to $0 + 1 + (-1) = 0$. Liczba elektronowa jest więc zachowana. W reakcji nie biorą udziału miony, taony ani ich neutrina, zatem liczby mionowe i taonowe też są zachowane. Wobec tego zasada zachowania liczby leptonowej pozwala na występowanie takiej reakcji w przyrodzie.

W przypadku rozpadu (b) liczba mionowa dla pionu π^- wynosi 0, a całkowita liczba mionowa produktów rozpadu to $1 + 1 + (-1) = 1$. Zatem na podstawie zasady zachowania liczby leptonowej mionowej możemy stwierdzić, że reakcja nie może zajść.

Znaczenie

Ustaliliśmy zachowanie liczb leptonowych w pierwszym procesie oraz niespełnienie zasady zachowania w drugim. Zasada zachowania liczby leptonowej pozwala ocenić, które procesy mogą zajść, a które na pewno nie występują w przyrodzie.

11.2 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Ile wynosi liczba leptonowa pary elektron–pozyton?

Zachowanie dziwności

Na przełomie lat 40. i 50. XX wieku w eksperymentach dotyczących promieniowania kosmicznego zarejestrowano występowanie cząstek, których nigdy dotąd nie obserwowano na Ziemi. Powstawały one w wyniku zderzeń pionów z protonami i neutronami w atmosferze. Jednak ich tworzenie i procesy rozpadu były niezwykłe. Powstawały w wyniku silnych oddziaływań jądrowych pionów z nukleonami, a więc musiały być hadronami. Natomiast ich rozpad zachodził pod wpływem znacznie słabszego oddziaływania (słabe oddziaływanie jądrowe). Czasy życia cząstek to aż 10^{-10} s do 10^{-8} s, podczas gdy typowe czasy życia cząstek rozpadających się za pośrednictwem oddziaływania silnego są rzędu 10^{-23} s. Ponadto cząstki te zawsze były produktem zderzeń pion–nukleon, co także wydawało się bardzo nietypowe. Z tych wszystkich powodów nazwano je cząstkami dziwnymi. Wytworzenie i następujący po tym rozpad dwóch cząstek dziwnych przedstawiono na Rysunku 11.4, można go zapisać w postaci reakcji

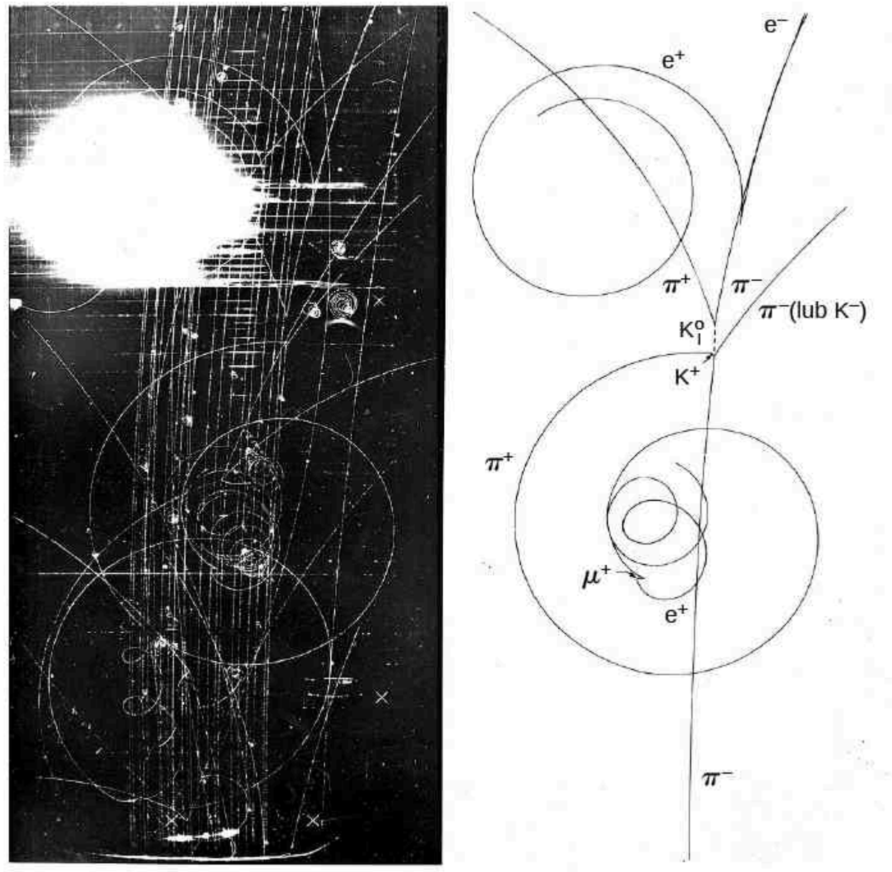
$$\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow \Lambda^0 + K^0.$$

Cząstka Λ rozpada się w wyniku oddziaływania słabego w następujący sposób

$$\Lambda^0 \longrightarrow \pi^- + \mathrm{p},$$

natomiast kaon wskutek oddziaływania słabego rozpada się na

$$K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-.$$



(a) (b)

Rysunek 11.4 Oddziaływanie między hadronami. (a) Zdjęcie z komory pęcherzykowej. (b) Schemat obserwacji zarejestrowanej w komorze.

W celu ujęcia tych obserwacji w sposób naukowy fizycy cząstek elementarnych wprowadzili nową właściwość cząstek elementarnych, która jest zachowana w oddziaływaniach silnych, ale nie w oddziaływaniach słabych. Nazwali ją **dziwnością** (ang. **strangeness**) i, jak wskazuje nazwa, skojarzyli ją z występowaniem kwarka dziwnego s w tych cząstkach. Zatem dziwność jest cechą tych cząstek, w skład których wchodzi kwark s (nazywamy je cząstkami dziwnymi). Takie hadrony, które zawierają kwark s, ale nie zawierają kwarka c ani b, nazywamy dodatkowo hiperonami. Zasada zachowania dziwności w reakcjach takich jak rozpady zakłada, że całkowita dziwność (suma dziwności wszystkich cząstek) jest taka na końcu procesu jak na jego początku. Zachowanie dziwności nie zawsze jest spełnione: dotyczy tylko oddziaływań silnych i elektromagnetycznych, ale nie zachodzi podczas oddziaływań słabych. W tym sensie może być wyznacznikiem tego, jakim kanałem (za pośrednictwem jakich oddziaływań) dany proces zaszedł. Dziwności różnych cząstek przedstawiono w Tabeli 11.2.

Przykład 11.3

Zachowanie dziwności

a. Korzystając z zasady zachowania dziwności, oceńmy, czy następująca reakcja może zachodzić

$$\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow K^+ + K^- + \mathrm{n}.$$

b. Następujący rozpad zachodzi pod wpływem oddziaływań słabych

$$K^+ \longrightarrow \pi^+ + \pi^0.$$

Czy rozpad ten zachowuje dziwność? Jeśli nie, to czy może zachodzić?

Strategia rozwiązania

Obliczymy całkowitą dziwność cząstek przed rozpadem i po rozpadzie, a następnie sprawdzimy, czy są równe.

Rozwiązanie

a. Suma dziwności cząstek przed rozpadem wynosi $0 + 0 = 0$, a suma dziwności cząstek po rozpadzie to $1 + (-1) + 0 = 0$. Zatem oddziaływanie silne między pionem a protonem w tym rozpadzie jest z punktu widzenia zachowania dziwności niezabronione. Zauważmy, że liczba barionowa jest w tym procesie także zachowana.

b. Całkowite dziwności przed rozpadem i po nim wynoszą 1 oraz 0, więc ten rozpad nie zachowuje dziwności. Jednak mimo to nadal jest możliwy, ponieważ zasada zachowania dziwności nie obowiązuje w oddziaływaniach słabych.

Znaczenie

Dziwność jest zachowana w pierwszej reakcji, a nie jest zachowana w drugiej. Zasada zachowania dziwności mówi, czy proces, w którym występuje oddziaływanie silne, może zachodzić czy nie. W procesach słabych dziwność nie musi być zachowana.

11.3 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaką dziwność ma mion?

11.3 | Kwarki

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- porównywać i wymieniać różnice między sześcioma poznanymi kwarkami;
- na podstawie budowy kwarkowej hadronów obliczać całkowity ładunek tych cząstek;
- wyjaśniać pierwotne przesłanki przemawiające za istnieniem kwarków.

Na początku lat 60. XX wieku fizycy zaczęli zdawać sobie sprawę z tego, że hadrony nie są niepodzielne i składają się z cząstek nazywanych kwarkami. Hipotezę istnienia kwarków w 1964 roku sformułowali amerykańscy fizycy **Murray Gell-Mann (ur. 1929)** i **George Zweig (ur. 1937)**. Nazwę „kwark” Gell-Mann zaczerpnął z powieści Jamesa Joyce’a pt. *Finneganów tren* (ang. **Finnegans Wake**). Początkowo uważano, że istnieją tylko trzy kwarki, nazwane górnym (u), dolnym (d) i dziwnym (s). Szybko jednak okazało się, że liczba kwarków wynosi sześć – interesująca koincydencja z liczbą leptonów – z dodatkowymi kwarkami: powabnym (c), niskim (b) oraz wysokim (t). Oczywiście symbole literowe pochodzą od angielskich nazw: **up**, **down**, **strange**, **charm**, **bottom** oraz **top**. W polskiej nomenklaturze czasem używa się też nazw: prawdziwy dla kwarka t (od ang. **true**) oraz piękny dla kwarka b (od ang. **beauty**). Sami fizycy jednak bardzo często używają po prostu nazw angielskich lub samych symboli literowych.

Wszystkie kwarki są fermionami (cząstkami o spinie połówkowym $s = 1/2$), mają ułamkowy ładunek elektryczny ($1/3e$ lub $2/3e$, dodatni lub ujemny) oraz liczbę barionową $B = 1/3$. Każdy kwark ma swój antykwark o tej samej masie, ale przeciwnym ładunku i przeciwnej liczbie barionowej. Nazwy i właściwości sześciu istniejących kwarków zapisaliśmy w Tabeli 11.3.

Kwark	Ładunek elektryczny (e)	Spin (s)	Liczba barionowa	Dziwność
Dolny (d)	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0
Górny (u)	$+2/3$	$1/2$	$1/3$	0
Dziwny (s)	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	-1
Powabny (c)	$+2/3$	$1/2$	$1/3$	0

Tabela 11.3 Kwarki.

Kwark	Ładunek elektryczny (e)	Spin (s)	Liczba barionowa	Dziwność
Niski (b)	$-1/3$	$1/2$	$1/3$	0
Wysoki (t)	$+2/3$	$1/2$	$1/3$	0

Tabela 11.3 Kwarki.

Układy kwarków

Jak już wspominaliśmy w poprzednich podrozdziałach, kwarki łączą się w grupy po dwa lub trzy, tworząc hadrony. Bariony składają się zawsze z trzech kwarków. Przykładowe konfiguracje kwarków tworzących znane bariony oraz ich właściwości przedstawiono w Tabeli 11.4. Co ciekawe, np. barion Δ^+ (delta plus) zbudowany jest z tej samej trójki kwarków co proton, ale jego całkowity spin równa się $3/2$, a nie $1/2$ jak dla protonu. Oba te bariony różnią się też masą: Δ^+ o spinie $3/2$ jest $1{,}3$ razy cięższy od protonu, z kolei barion Δ^0 (delta zero) o spinie $3/2$ jest $1{,}3$ razy cięższy od neutronu o tej samej budowie kwarkowej. Ewidentnie energia związana ze spinem (czy też momentem pędu) cząstki wnosi znaczny wkład do całkowitej energii cząstki, a więc i jej masy (równoważność masy i energii spoczynkowej). Równie ciekawe jest to, że w świetle dotychczasowej wiedzy nie istnieją bariony zbudowane z kwarków t, które rozpadają się zbyt szybko, by mogły związać się z innymi kwarkami w trakcie tworzenia cząstki.

Nazwa	Symbol	Kwarki	Ładunek (e)	Spin (s)	Masa (GeV/c^2)
Proton	p	uud	1	$1/2$	0,938
Neutron	n	udd	0	$1/2$	0,94
Delta plus plus	Δ^{++}	uuu	2	$3/2$	1,232
Delta plus	Δ^+	uud	1	$3/2$	1,232
Delta zero	Δ^0	udd	0	$3/2$	1,232
Delta minus	Δ^-	ddd	-1	$3/2$	1,232
Lambda zero	Λ^0	uds	0	$1/2$	1,116
Sigma dodatni	Σ^+	uus	1	$1/2$	1,189
Sigma obojętny	Σ^0	uds	0	$1/2$	1,192
Ksi ujemny	Ξ^-	sds	-1	$1/2$	1,321
Ksi obojętny	Ξ^0	sus	0	$1/2$	1,315
Omega minus	Ω^-	sss	-1	$3/2$	1,672
Lambda powabny	Λ_c^+	udc	1	$1/2$	2,281
Lambda niski	Λ_b^0	udb	0	$1/2$	5,619

Tabela 11.4 Budowa kwarkowa wybranych barionów.

Mezony są zbudowane zawsze z pary kwark–antykwark. Przykłady mezonów wraz z ich składem kwarkowym i właściwościami zawiera Tabela 11.5. Rozważmy budowę pionu ($\pi^+ = \mathrm{u\overline{d}}$). Na podstawie składu kwarkowego możemy ustalić całkowity ładunek pionu

$$\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e = e.$$

Oba kwarki mają oczywiście połówkowy spin ($s = 1/2$), więc całkowity spin pionu może wynosić 0 albo 1. W przypadku mezonu π^+ spin wynosi 0. Ta sama para kwark–antykwark tworzy także mezon ρ o spinie 1. Jednak jego masa jest ok. $5{,}5$ razy większa niż masa mezonu π^+. Kolejny raz widzimy, że wielkość spinu wpływa na masę cząstki.

Przykład 11.4

Struktura kwarkowa

Pokażmy, że budowa kwarkowa barionu Ξ^0 podana w Tabeli 11.5 jest zgodna z naszą wiedzą o ładunku, spinie i dziwności tej cząstki.

Strategia rozwiązania

Ξ^0 składa się z dwóch kwarków s i jednego kwarka u (sus). Możemy dodać właściwości pojedynczych kwarków i sprawdzić, czy wartości pokrywają się z tymi dla barionu Ξ^0.

Rozwiązanie

Ładunek kwarka s wynosi $-e/3$, a ładunek kwarka u to $2e/3$. Zatem kombinacja (sus) nie ma wypadkowego ładunku, co zgadza się z wielkością ładunku barionu Ξ^0. Ponieważ trzy kwarki o spinie $1/2$ mogą tworzyć cząstkę o spinie całkowitym $1/2$ lub $3/2$, to budowa kwarkowa Ξ^0 jest poprawna także ze względu na całkowity spin tego barionu ($s = 1/2$). Wreszcie, całkowita dziwność układu (sus) wynosi $(-1) + 0 + (-1) = -2$, czyli także zgodnie ze znaną wartością dla barionu.

Znaczenie

Ładunek, spin i dziwność cząstki Ξ^0 można określić na podstawie właściwości budujących ją kwarków. Olbrzymia różnorodność właściwości barionów i mezonów wynika z kombinacji cech tylko sześciu kwarków: u, d, c, s, b, t.

11.4 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Ile wynosi liczba barionowa pionu?

Nazwa	Symbol	Kwarki	Ładunek (e)	Spin	Masa (GeV/c^2)
Pion dodatni	π^+	$u\bar{d}$	1	0	0,14
Rho dodatni	ρ^+	$u\bar{d}$	1	1	0,768
Pion ujemny	π^-	$\bar{u}d$	−1	0	0,14
Rho ujemny	ρ^-	$\bar{u}d$	−1	1	0,768
Pion obojętny	π^0	$\bar{u}u$ albo $\bar{d}d$	0	0	0,135
Eta obojętny	η^0	$\bar{u}u$, $\bar{d}d$ albo $\bar{s}s$	0	0	0,547
Kaon dodatni	K^+	$u\bar{s}$	1	0	0,494
Kaon obojętny	K^0	$d\bar{s}$	0	0	0,498
Kaon ujemny	K^-	$\bar{u}s$	−1	0	0,494
J/Psi	J/Ψ	$\bar{c}c$	0	1	3,1
Eta powabny	η_0	$c\bar{c}$	0	0	2,98
D obojętny	D^0	$\bar{u}c$	0	0	1,86
D obojętny	D^{*0}	$\bar{u}c$	0	1	2,01
D dodatni	D^+	$\bar{d}c$	1	0	1,87
B obojętny	B^0	$\bar{d}b$	0	0	5,26
Ypsilon	Υ	$b\bar{b}$	0	1	9,46

Tabela 11.5 Budowa kwarkowa wybranych mezonów.

Kolor

Kwarki są fermionami, które podlegają zakazowi Pauliego, zatem mogłoby się wydawać niemożliwe, aby trzy kwarki były związane wewnątrz nukleonu. W jaki sposób zatem dwa kwarki górne mogą znajdować się na niewielkiej przestrzeni wewnątrz protonu? Rozwiązanie tego problemu wymaga wprowadzenia kolejnej nowej właściwości rozróżniającej kwarki. Jest nią **kolor** (ang. **color**), który odgrywa tę samą rolę w oddziaływaniach silnych jądrowych, co ładunek elektryczny w oddziaływaniu elektromagnetycznym. Z tego względu czasem na kolor kwarka mówimy ładunek kolorowy.

Wyróżniamy trzy kolory kwarków: czerwony, zielony i niebieski (oznaczone R, G, B od angielskich nazw kolorów). Oczywiście są to tylko umowne nazwy przypisane kwarkom o różnych właściwościach ze względu na oddziaływania silne. W rzeczywistości kwarki nie mają koloru w znaczeniu barwy. Każdy z kwarków (u, d, c, s, b, t) może mieć dowolny z trzech kolorów. Przykładowo kwark dziwny może występować w trzech odmianach: kwark dziwny czerwony, kwark dziwny zielony lub kwark dziwny niebieski. Antykwarki mają swój antykolor. Zasada budowy cząstek z kwarków jest prosta: każda cząstka z nich złożona (czyli hadron: barion lub mezon) musi być bezbarwna (alternatywnie: biała lub neutralna). Oznacza to, że każdy barion musi zawierać jednocześnie trzy kwarki o różnych kolorach: czerwony, zielony i niebieski (te trzy barwy podstawowe w sumie dają barwę białą). Także mezony muszą być koloru neutralnego, co oznacza, że zawsze są zbudowane z pary: czerwony–antyczerwony, zielony–antyzielony lub niebieski–antyniebieski. Wobec tego kwarki o tym samym stanie spinowym mogą znajdować się w jednym miejscu wewnątrz nukleonu, bo różnią się kolorem.

Uwięzienie kwarków

Pierwsze dowody na istnienie kwarków przyniosły eksperymenty przeprowadzone ok. 1970 roku przy użyciu akceleratora SLAC (**Stanford Linear Accelerator Center**) w Kalifornii oraz w CERN pod Genewą. Miały one na celu zbadanie struktury protonu, zaprojektowano je podobnie do słynnego eksperymentu Rutherforda z bombardowaniem folii złota cząstkami α. Tutaj jednak rozpędzone do energii ok. $20\,\mathrm{GeV}$ elektrony uderzały w tarczę protonową i się na niej rozpraszały. Przy tak dużych energiach elektronów możemy przyjąć $E \approx pc$, więc długość fali de Broglie’a elektronów to

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{E} \approx 6 \cdot 10^{-17}\ \mathrm{m}. \tag{11.1}$$

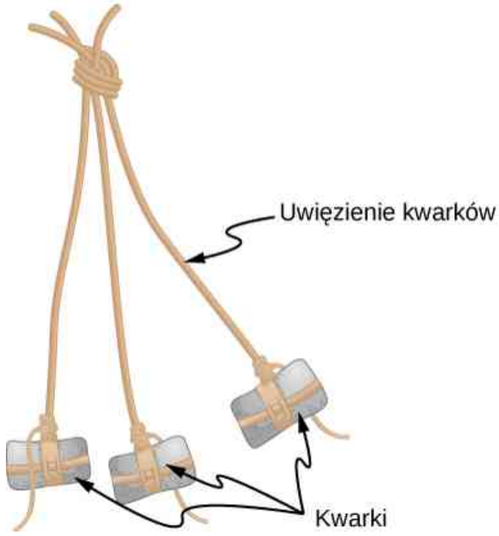
Długość fali elektronu o tej energii jest znacznie mniejsza od średnicy protonu (ok. $10^{-15}\ \mathrm{m}$). Zatem elektron może swobodnie przenikać wnętrze nukleonu i próbkować jego strukturę.

W eksperymencie SLAC odkryto, że niewielka część elektronów odbija się od protonów pod bardzo dużym kątem (bliskim $180°$), co świadczy o występowaniu centrów rozpraszania o bardzo niewielkich rozmiarach wewnątrz jądra. Przekrój czynny na to rozpraszanie był zgodny z modelem rozpraszania elektronów na cząstkach o spinie $1\,/\,2$, czyli dokładnie takim, jaki mają kwarki. Eksperyment w CERN wykorzystywał neutrina zamiast elektronów, jednak jego wyniki były zgodne z wynikami uzyskanymi w SLAC – również potwierdziły istnienie małych centrów rozpraszania w środku protonów. W wyniku obu eksperymentów ustalono, że ładunek elektryczny tych małych cząstek rozpraszających elektrony lub neutrina wynosi $+2e\,/\,3$ lub $-e\,/\,3$, co jest zgodne z przewidywaniami modelu kwarkowego.

Obejrzyj ten filmik (https://openstaxcollege.org/l/21quarks) , aby poznać więcej niesamowicie ciekawych informacji o kwarkach.

Model kwarkowy okazał się niebywale skuteczny w próbie usystematyzowania opisu złożonego świata cząstek subatomowych i ich właściwości. Żaden eksperyment jednak nie potwierdził występowania pojedynczego kwarka jako samodzielnej cząstki. Wszystkie kwarki mają ułamkowy ładunek elektryczny, więc w eksperymentach fizyki wysokich energii powinny być łatwo odróżnialne od innych znanych nam cząstek elementarnych, których ładunek jest zawsze całkowitą wielokrotnością e. Dlaczego zatem pojedyncze kwarki nie są obserwowane? W świetle obecnych modeli fizyki cząstek elementarnych odpowiedź przynosi koncepcja **uwięzienia kwarków** (ang. **quark confinement**), czasem także nazywana uwięzieniem koloru. Zakłada ona, że kwarki mogą na niewielkiej przestrzeni tworzyć jedynie grupy dwóch lub trzech kwarków i w obrębie tej przestrzeni poruszają się zupełnie swobodnie, wymieniając między sobą gluony (wiązanie kwarków w hadrony realizuje się jako nieustanne wysyłanie i odbieranie gluonu od pozostałych kwarków). Jednak gdy któryś z kwarków oddala się zbyt daleko od pozostałych, oddziaływanie silne przyciąga go z powrotem. To oddziaływanie czasem obrazuje się przez porównanie z bronią myśliwską używaną przez Indian i Eskimosów, zwaną bola (Rysunek 11.5). Bola składa się z trzech kamieni przywiązanych sznurkiem do jednego punktu, przez co żaden z nich nie może odlecieć zbyt daleko od pozostałych. W tym porównaniu bola jest odpowiednikiem barionu, kamienie – kwarków, a sznurki – gluonów wiążących kwarki ze sobą. Mówimy także, że oddziaływanie silne między kwarkami ma właściwość tzw. **asymptotycznej swobody** (ang. **asymptotic freedom**). Asymptotyczna swoboda

oznacza, że gdy kwarki są blisko siebie (w odległości ok. 1 fm), to zachowują się jak cząstki swobodne, jednak gdy się od siebie oddalają, siła oddziaływania między nimi rośnie proporcjonalnie do odległości i przyciąga je z powrotem ku sobie.



Rysunek 11.5 Barion jest podobny do boli, indiańskiej broni myśliwskiej. W tym porównaniu kamienie są odpowiednikami kwarków. Kwarki mogą poruszać się swobodnie i niezależnie od siebie nawzajem, ale muszą pozostać w niewielkiej odległości od siebie.

11.4 | Akceleratory i detektory cząstek

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- porównywać ze sobą różne rodzaje akceleratorów cząstek oraz podawać różnice w ich działaniu;
- opisywać przeznaczenie, budowę i sposób działania typowych zderzaczy cząstek;
- wyjaśniać rolę każdego z segmentów typowego detektora cząstek elementarnych;
- wykorzystywać krzywiznę toru lotu cząstki naładowanej do określenia jej pędu.

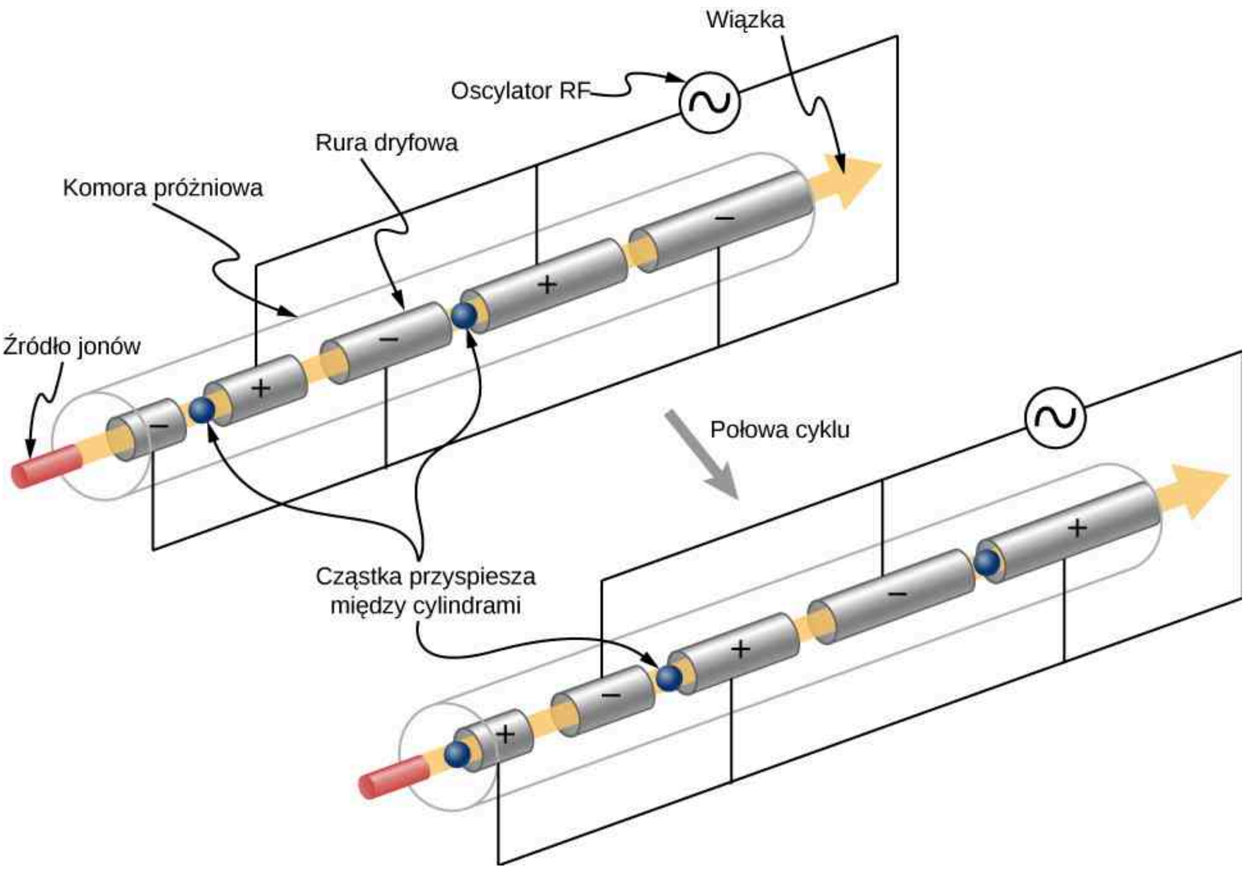
Zasadniczym celem fizyki doświadczalnej cząstek elementarnych jest rejestrowanie i precyzyjne mierzenie wszystkich właściwości wytwarzanych cząstek. Podstawową metodą badawczą jest przy tym zderzanie wysokoenergetycznych cząstek, które są łatwo dostępne i doskonale znane. W efekcie powstają ogromne ilości nowych cząstek, w tym także interesujących nas w danym eksperymencie. Pomiarów produktów tych zderzeń dokonuje się przy użyciu bardzo czułych detektorów cząstek. Tego typu eksperymenty służą testowaniu oraz rewidowaniu już istniejących modeli cząstek elementarnych i stają się także impulsem do tworzenia nowych. W tym podrozdziale zajmiemy się opisem nowoczesnych akceleratorów i detektorów cząstek. Ponieważ najnowocześniejsze urządzenia tego typu powstały w oparciu o wcześniejsze konstrukcje, prześledzimy także krótko historię rozwoju akceleratorów.

Pierwsze akceleratory

Akcelerator cząstek (ang. **particle accelerator**) jest maszyną zaprojektowaną do przyspieszania cząstek naładowanych, dlatego nazywamy go też przyspieszaczem. Duże przyspieszenie cząstek zazwyczaj uzyskuje się przy pomocy pola elektrycznego, często w połączeniu z polem magnetycznym. Prostym przykładem (jednym z pierwszych) przyspieszacza jest elektrostatyczny **akcelerator Van de Graaffa** (ang. **Van de Graaff accelerator**) (został on opisany w rozdziale Potencjał elektryczny (https://cnx.org/content/m67172/latest/)). W tym urządzeniu ładunki przenoszone pasem transmisyjnym są gromadzone na metalowej kopule w kształcie sfery. Gdy ich ilość jest odpowiednio duża, uzyskujemy dużą różnicę potencjałów, przy pomocy której możemy przyspieszać cząstki wpuszczone w obszar pola

elektrycznego w rurze próżniowej. Energie uzyskiwane w akceleratorach Van de Graaffa nie są na tyle wysokie, aby wytwarzać cząstki elementarne, ale urządzenia te były z powodzeniem wykorzystywane w pionierskich badaniach nad strukturą jądra atomowego.

Dużo większe energie może wytwarzać **akcelerator liniowy** (ang. **linear accelerator**; nazywany **liniakiem** od ang. skrótu **linac**). Obdarzona ładunkiem elektrycznym cząstka, najczęściej wytwarzana na początku akceleratora, jest wpuszczana do układu naładowanych elektrycznie pustych cylindrów, po przejściu przez które jest przyspieszana. Napięcia między sąsiednimi cylindrami są cyklicznie zmienne i tak dobrane, że cząstka jest początkowo wciągana do cylindra, a po zmianie polaryzacji napięcia – wypychana z niego w kierunku następnego cylindra. Innymi słowy napięcia są przykładane do cylindrów synchronicznie z ruchem przyspieszanej cząstki tak, że doznaje ona elektrycznych kopnięć (kicków) w każdej kolejnej sekcji (Rysunek 11.6). Współczesne akceleratory liniowe wykorzystują wnęki rezonansowe o częstotliwości radiowej, w których powstaje zmienne pole elektryczne odpowiednie do rozpędzenia cząstki. Cały mechanizm jest podobny do wzbierającej fali na oceanie rozpędzającej surfera. Liniaki mogą rozpędzić elektrony do energii $100\,\mathrm{MeV}$. Zwróćmy uwagę, że elektrony już przy energii $2\,\mathrm{MeV}$ uzyskują prędkość bardzo bliską prędkości światła. Współcześnie akceleratory liniowe najczęściej używane są do przyspieszania ciężkich jonów, a także lekkich cząstek na początkowym etapie przyspieszania w eksperymentach z użyciem akceleratorów kołowych.



Rysunek 11.6 W akceleratorze liniowym przyspieszanie odbywa się na drodze elektrycznych kicków ze strony naładowanych cylindrów (oznaczonych jako rury dryfowe). Każdy następny cylinder jest dłuższy od poprzedniego, bo cząstka pokonuje coraz większy dystans w trakcie rozpędzania.

Przykład 11.5

Sekcje przyspieszające

Akcelerator liniowy zaprojektowany do wytwarzania wiązki protonów o energii $800\,\mathrm{MeV}$ składa się z 2000 oddzielnych sekcji przyspieszających. Jakie średnie napięcie musi panować między dwiema sąsiednimi sekcjami, aby można było uzyskać żądaną energię wiązki? (Wskazówka: $E_\mathrm{p} = qU$).

Strategia rozwiązania

W każdej przerwie między sekcjami protonom dostarczana jest energia $E_\mathrm{p} = qU$, gdzie q jest ładunkiem protonu, a U różnicą potencjałów (napięciem) między cylindrami. Ponieważ $q = e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, nato-

miast $1\,\text{eV} = 1\,\text{V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{C}$, to proton zyskuje energię $1\,\text{eV}$ na każdy $1\,\text{V}$ napięcia między sekcjami. Napięcie przyłożone do przerw między sekcjami jest zmienne w czasie, a zmiany są dopasowane tak, aby energia protonu zwiększała się po przejściu przez każdą sekcję. Napięcie efektywne jest sumą wszystkich napięć na każdej przerwie między sekcjami i wynosi $800\,\text{MV}$, tak aby całkowita energia protonu wynosiła $800\,\text{MeV}$.

Rozwiązanie

Mamy 2000 przerw między sekcjami, a suma napięć na długości całego akceleratora ma wynosić efektywnie $800\,\text{MV}$. Dlatego średnio na każdą sekcję musimy mieć napięcie $0{,}4\,\text{MV}$, czyli $400\,\text{kV}$.

Znaczenie

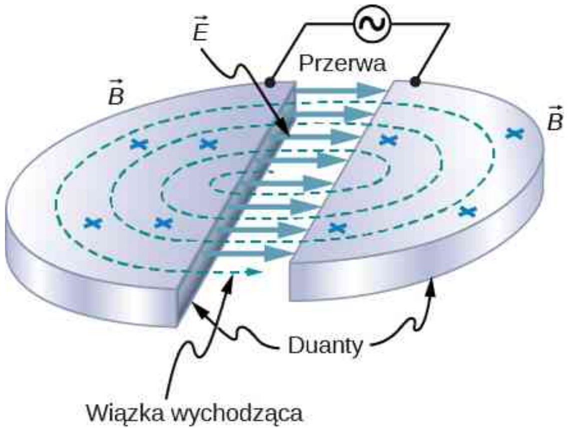
Napięcie o tej wartości nie jest trudne do uzyskania w próżni. Do osiągnięcia wyższych energii, np. tych w akceleratorze SLAC o maksymalnej energii elektronów $50\,\text{GeV}$, potrzeba o wiele większych średnich napięć między kolejnymi sekcjami. Synchrotrony są akceleratorami o kołowym przebiegu wiązki przyspieszanych cząstek, które mogą wielokrotnie krążyć wewnątrz, dzięki czemu efektywnie zwiększa się krotność przyspieszenia. To pozwala na uzyskanie energii większych od $1\,\text{TeV}$, jak ma to miejsce np. w akceleratorze LHC w CERN.

11.5 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Jaką energię uzyskuje elektron przyspieszany różnicą potencjałów $1\,\text{V}$?

Akceleratorami następnej generacji po liniakach były **cyklotrony** (ang. **cyclotrons**; Rysunek 11.7). Wykorzystują one zarówno pole elektryczne, jak i stałe pole magnetyczne do przyspieszania cząstek na torze o kształcie spirali. Cząstka, początkowo umieszczona w środku cyklotronu, jest najpierw przyspieszana w polu elektrycznym panującym między dwiema połówkami magnesu o kształcie litery D (są to tzw. duanty). Gdy wpada w obszar pola magnetycznego wewnątrz duantów, porusza się po torze kołowym wskutek działania siły Lorentza. (Pojęcie siły Lorentza omawialiśmy w rozdziale Siły i pola magnetyczne (https://cnx.org/content/m67199/latest/)). Wewnątrz duantów nie następuje przyspieszanie, a tylko zakrzywianie toru cząstek. Przy założeniu braku strat energii wewnątrz duantów pęd cząstek jest proporcjonalny do promienia krzywizny i indukcji pola magnetycznego. Dla cząstki o ładunku elementarnym (np. elektronu lub protonu) zależność tę opisuje uproszczony wzór

$$p = 0{,}3Br. \tag{11.2}$$

W powyższym wzorze p oznacza pęd w jednostkach GeV/c, B to indukcja pola magnetycznego w teslach, a r jest promieniem krzywizny toru cząstek (promieniem orbity) w metrach. Powyższe wyrażenie jest prawdziwe dla prędkości zarówno klasycznych, jak i relatywistycznych. Dla cząstek o większym ładunku wystarczy prawą stronę równania pomnożyć przez krotność ładunku elementarnego. Poruszając się po fragmencie orbity kołowej, cząstka wraca w obszar między duantami, gdzie kierunek pola elektrycznego jest odwrócony i cząstka znowu przyspiesza. Gdy porusza się coraz szybciej, promień okręgu zwiększa się coraz bardziej. W efekcie torem ruchu cząstek jest spirala, której promień zwiększa się aż do momentu, gdy cząstka opuści urządzenie.



Rysunek 11.7 Cyklotrony wykorzystują pole magnetyczne do zakrzywiania toru ruchu cząstek. Gdy przechodzi ona przez obszar między duantami, ulega przyspieszeniu, a przy kolejnych przejściach przez duanty zmienia się kierunek pola elektrycznego. W efekcie podczas pełnego okrążenia cząstka jest przyspieszana dwukrotnie.

Obejrzyj ten filmik (https://openstaxcollege.org/l/21cyclotron) , żeby dowiedzieć się więcej o cyklotronach.

Synchrotrony (ang. **synchrotron**) są kolejną generacją akceleratorów, pozwalają one na uzyskanie jeszcze większych energii. Zasadniczym ograniczeniem cyklotronów jest ich rozmiar, który pozwala na uzyskanie maksymalnej możliwej energii przez cząstki. W synchrotronie wykorzystuje się sekwencje pól elektrycznego i magnetycznego o rosnącej wartości indukcji. Ponieważ wraz ze zwiększaniem się prędkości cząstek rośnie indukcja pola w magnesach, zwanych zakrzywiającymi, tor ruchu cząstek jest stały. Cząstki w synchrotronie są przyspieszane w sekcjach zbudowanych z wnęk rezonansowych o częstotliwości radiowej, a następnie zakrzywiane i skupiane w wąskie wiązki w magnesach. Wnęki rezonansowe są synchronizowane tak, by w kolejnych sekcjach dostarczać cząstkom energię w postaci kicków, od czego pochodzi nazwa tego typu akceleratorów. Zakrzywianie wiązki wysokoenergetycznych cząstek wymaga użycia silnych pól magnetycznych, dlatego też do ich wytwarzania najczęściej używa się magnesów nadprzewodnikowych. Muszą one być chłodzone ciekłym azotem i ciekłym helem, dzięki czemu pozostają w stanie nadprzewodzącym i mogą przewodzić olbrzymi prąd, potrzebny do uzyskania silnych pól magnetycznych. W synchrotronach obserwujemy dodatkowy efekt. Gdy wysokoenergetyczne cząstki poruszają się po zakrzywionych torach, ich ruchowi towarzyszy wypromieniowanie energii: według klasycznej teorii elektrodynamiki każda cząstka poruszająca się z przyspieszeniem (tak jak w ruchu po okręgu) wytwarza promieniowanie. W synchrotronach takie promieniowanie nazywa się **promieniowaniem synchrotronowym** (ang. **synchrotron radiation**). Ma ono bardzo szczególne właściwości i znajduje zastosowanie w wielu dziedzinach, takich jak nauki materiałowe czy medycyna.

Przykład 11.6

Energia elektronu w cyklotronie

Elektron jest przyspieszany w cyklotronie. Jeżeli pole magnetyczne w duantach wynosi $1{,}5\,\mathrm{T}$, a promień duantów $1{,}2\,\mathrm{m}$, to z jaką energią kinetyczną elektron opuszcza akcelerator?

Strategia rozwiązania

Jeżeli promień orbity elektronu osiąga długość promienia duantów, to elektron opuszcza wnętrze cyklotronu. W takim razie wielkość duantów określa maksymalną wartość pędu i energii elektronu. Wartość pędu elektronu opuszczającego cyklotron obliczymy na podstawie promienia duantów i wielkości pola magnetycznego. Z kolei energię kinetyczną elektronu obliczymy na podstawie pędu (Teoria względności).

Rozwiązanie

Jeśli założymy brak strat energii w cyklotronie, to pęd elektronu wynosi

$$p = 0{,}3Br = 0{,}3 \cdot 1{,}5\,\mathrm{T} \cdot 1{,}2\,\mathrm{m} = 0{,}543\,\mathrm{GeV} / c.$$

Wyrażenie $pc^2 = 0{,}543\,\mathrm{GeV} = 543\,\mathrm{MeV}$ ma znacznie większą wartość niż energia spoczynkowa elektronu: $mc^2 = 0{,}511\,\mathrm{MeV}$, dlatego musimy zastosować relatywistyczny wzór na energię elektronu (szczegóły w rozdziale Teoria względności). Całkowita energia elektronu wynosi

$$E_{\text{cał}} = \sqrt{(pc)^2 + \left(mc^2\right)^2} = \sqrt{(543\,\text{MeV})^2 + (0{,}511\,\text{MeV})^2} \approx 543\,\text{MeV}\,,$$

natomiast energia kinetyczna elektronu to

$$E_{\text{k}} = E_{\text{cał}} - mc^2 = 543\,\text{MeV} - 0{,}511\,\text{MeV} \approx 543\,\text{MeV}\,.$$

Znaczenie

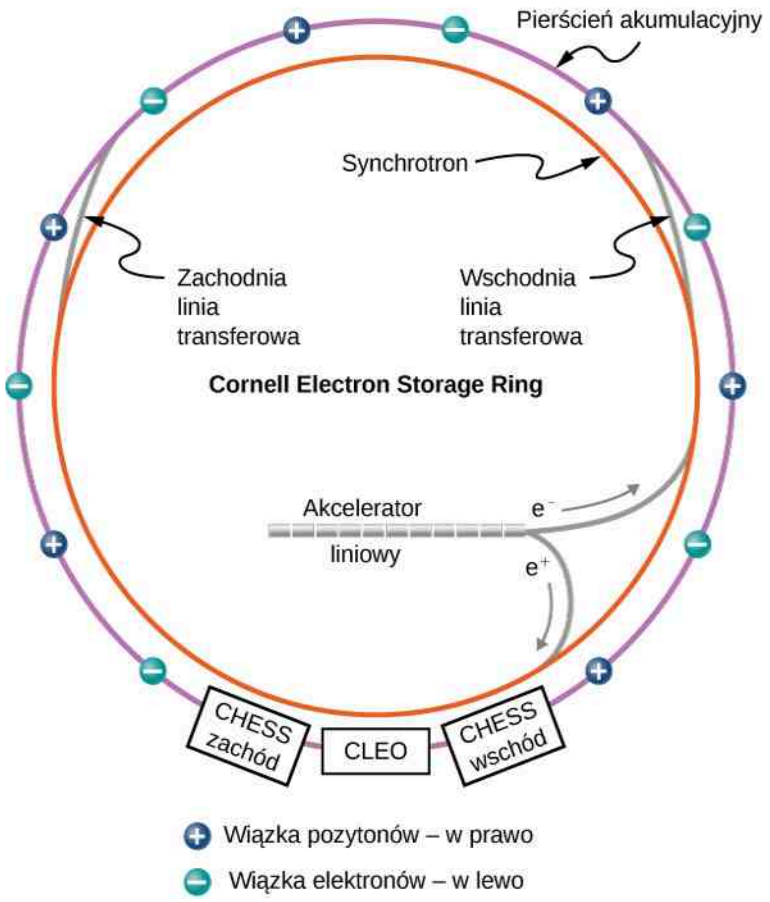
Całkowita energia elektronu jest znacznie większa od jego energii spoczynkowej. Oznacza to, że praktycznie cała energia elektronu jest zgromadzona w formie jego energii kinetycznej. Cyklotrony powszechnie wykorzystuje się w eksperymentach fizyki jądrowej, a także w terapii hadronowej (np. protonowej) do leczenia nowotworów. Tego typu terapia w Polsce dostępna jest w Centrum Cyklotronowym Bronowice w Krakowie.

11.6 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Naładowana cząstka o określonym pędzie porusza się w polu magnetycznym po łuku okręgu o pewnym promieniu. Co się stanie, gdy indukcja pola wzrośnie dwa razy?

Zderzacze cząstek

W zderzeniach cząstek o wysokiej energii można wytwarzać zupełnie nowe cząstki. Zgodnie z teorią równoważności masy i energii Einsteina, energie zderzanych cząstek są zamieniane w masy cząstek wytwarzanych. Najbardziej efektywnym sposobem produkcji cząstek jest użycie akceleratorów zderzeniowych (zderzaczy cząstek). Wytwarzane są w nich dwie wiązki cząstek poruszające się po kołowych torach w przeciwnych kierunkach, po uzyskaniu odpowiedniej energii mogą one być przechowywane wewnątrz akceleratora bez strat energii. W pewnym momencie przeciwbieżne wiązki cząstek są kierowane do jednego punktu i przecinają się dokładnie w środku czułego detektora rejestrującego cząstki i promieniowanie.

Przykładowym akceleratorem zderzeniowym jest pierścień akumulacyjny elektronów Uniwersytetu Cornell (**Cornell Electron Storage Ring**), który działał od 1979 roku przez ponad 20 lat, dostarczając cennych informacji o oddziaływaniu mezonów i leptonów (Rysunek 11.8). Elektrony (e^-) i pozytony (e^+) są wytwarzane na początku akceleratora liniowego i wstępnie przyspieszane do energii $150\,\text{MeV}$. Następnie wiązki elektronów i pozytonów są wstrzykiwane do wewnętrznego pierścienia synchrotronu. Ma on dwa tunele, w których wiązki biegną w przeciwnych kierunkach. Tam cząstki są dalej przyspieszane przy pomocy wnęk rezonansowych do energii $4{,}5\,\text{GeV}$–$6\,\text{GeV}$. Po osiągnięciu docelowej energii, kierowane są do zewnętrznego pierścienia akumulacyjnego, gdzie energia cząstek jest podtrzymywana przez dowolnie długi czas. Dwie przeciwbieżne wiązki są utrzymywane w pewnej odległości od siebie do momentu, gdy doprowadzimy do ich zderzenia. W akceleratorze Uniwersytetu Cornell elektrony i pozytony w każdej sekundzie wykonywały $390\,000$ pełnych okrążeń pierścienia akumulacyjnego. Na podobnej zasadzie działają europejskie pierścienie akumulacyjne w GSI w Darmstadt, w DESY w Hamburgu, czy – znany ci już dobrze – LHC w CERN pod Genewą.



Rysunek 11.8 **Cornell Electron Storage Ring** używa akceleratora liniowego i synchrotronu do przyspieszania elektronów i pozytonów do energii $4{,}5\,\text{GeV}$–$6\,\text{GeV}$. Po jej uzyskaniu cząstki są przechowywane w zewnętrznym pierścieniu akumulacyjnym aż do momentu, gdy zostanie wymuszone ich zderzenie wewnątrz detektora. Na rysunku zaznaczono też miejsca detektorów używanych w trzech eksperymentach CHESS zachód, CLEO i CHESS wschód. Źródło: modyfikacja pracy wykonanej przez **Laboratory of Nuclear Studies, Cornell Electron Storage Ring**

Gdy dochodzi do zderzenia elektronów z pozytonami, ulegają one anihilacji i powstają fotony o bardzo dużej energii. Fotony te żyją zbyt krótko, by dało się je zarejestrować. Ich energia zostaje zużyta na wytworzenie albo pary leptonów (np. elektron–pozyton, mion–antymion, taon–antytaon), albo pary kwarków. Gdy efektem są kwarki, powstają mezony, takie jak $c\bar{c}$ albo $b\bar{b}$. Pozostają one praktycznie w spoczynku i nie poruszają się, bo początkowy pęd układu elektron–pozyton jest zerowy. Zwróćmy uwagę, że mezony nie powstają przy każdej energii zderzających się wiązek, lecz tylko w warunkach tzw. energii rezonansowej, która odpowiada ściśle masom określonych mezonów (Tabela 11.5). Wytwarzane w ten sposób mezony są bardzo niestabilne i szybko się rozpadają na lżejsze cząstki, takie jak protony, elektrony czy fotony. Wykrycie wszystkich fragmentów rozpadu pozwala na uzyskanie cennych informacji o oddziaływaniach między cząstkami.

Wraz z rozwojem fizyki cząstek elementarnych także narzędzia badawcze, takie jak synchrotrony i akceleratory zderzeniowe, stają się coraz potężniejsze. Produkcja masywnych cząstek wymaga olbrzymich energii. Akcelerator o nazwie **Wielki Zderzacz Hadronów** (ang. **Large Hadron Collider, LHC**) to obecnie największy akcelerator na świecie, zderzane są w nim protony o energiach $6\,\text{TeV}$–$7\,\text{TeV}$. Energia uzyskiwana w środku masy zderzających się przeciwbieżnych wiązek (W), czyli tzw. energia w układzie środka masy (koncepcję układu środka masy omawialiśmy w rozdziale Pęd i zderzenia (https://cnx.org/content/m65781/latest/)) odpowiada maksymalnej energii dostępnej do tworzenia nowych cząstek. W takim razie w LHC możemy wytwarzać pojedyncze cząstki lub ich układy o całkowitej masie blisko $14\,\text{TeV}/c^2$. Energię w środku masy możemy obliczyć za pomocą wzoru

$$W^2 = 2E_1E_2 + 2 \cdot p_1c \cdot p_2c + \left(m_1c^2\right)^2 + \left(m_2c^2\right)^2, \tag{11.3}$$

gdzie E_1 i E_2 są całkowitymi energiami zderzających się cząstek 1 i 2, p_1 i p_2 wartościami pędów tych cząstek, a m_1 i m_2 ich masami spoczynkowymi.

Przykład 11.7

Wytwarzanie nowych cząstek

Mezon Υ o budowie kwarkowej $(b\overline{b})$ powstaje w symetrycznym zderzaczu elektronów i pozytonów w wyniku idealnie centralnego zderzenia pary elektron–pozyton. Jaka musi być energia wiązki, aby powstanie mezonu było możliwe?

Strategia rozwiązania

Organizacja zrzeszająca fizyków cząstek elementarnych o nazwie Particle Data Group (https://openstaxcollege.org/l/21particledata) podaje, że masa mezonu w jednostkach energii to ok. $10{,}58\,\mathrm{GeV}$. Powyższe wyrażenie na energię w środku masy możemy uprościć, bo nasze zderzenie jest idealnie symetryczne, co oznacza, że $\overrightarrow{p_1} = -\overrightarrow{p_2}$. Także energie spoczynkowe zderzających się cząstek (elektronów i pozytonów) są identyczne $(m_e c^2 = 0{,}511\,\mathrm{MeV})$ i znacznie mniejsze od energii wytwarzanej cząstki. W takim razie W możemy wyrazić tylko przez energię wiązek równą $E_{\text{wiązki}} = E_1 = E_2$.

Rozwiązanie

Na podstawie powyższych danych otrzymujemy

$$W^2 \approx 2E_1E_2 + 2E_1E_2 = 4E_1E_2 = 4E_1^2.$$

Energia wiązki w takim razie wynosi

$$E_{\text{wiązki}} \approx E_1 = \frac{W}{2}.$$

Energia spoczynkowa wytwarzanej cząstki (mezonu) równa się energii w środku masy, czyli $W = 10{,}58\,\mathrm{GeV}$, a zatem

$$E_{\text{wiązki}} \approx \frac{10{,}58\,\mathrm{GeV}}{2} = 5{,}29\,\mathrm{GeV}.$$

Znaczenie

Okazuje się, że energia spoczynkowa wytwarzanych mezonów Υ praktycznie w całości pochodzi z energii kinetycznej zderzanych elektronów i pozytonów. Powstały mezon jest bardzo niestabilny i szybko rozpada się, tworząc kaskadę lżejszych cząstek. Zwiększona produkcja takich lekkich cząstek przy energii zderzenia $5{,}29\,\mathrm{GeV}$ jest wyraźnym świadectwem produkcji mezonu Υ w akceleratorze.

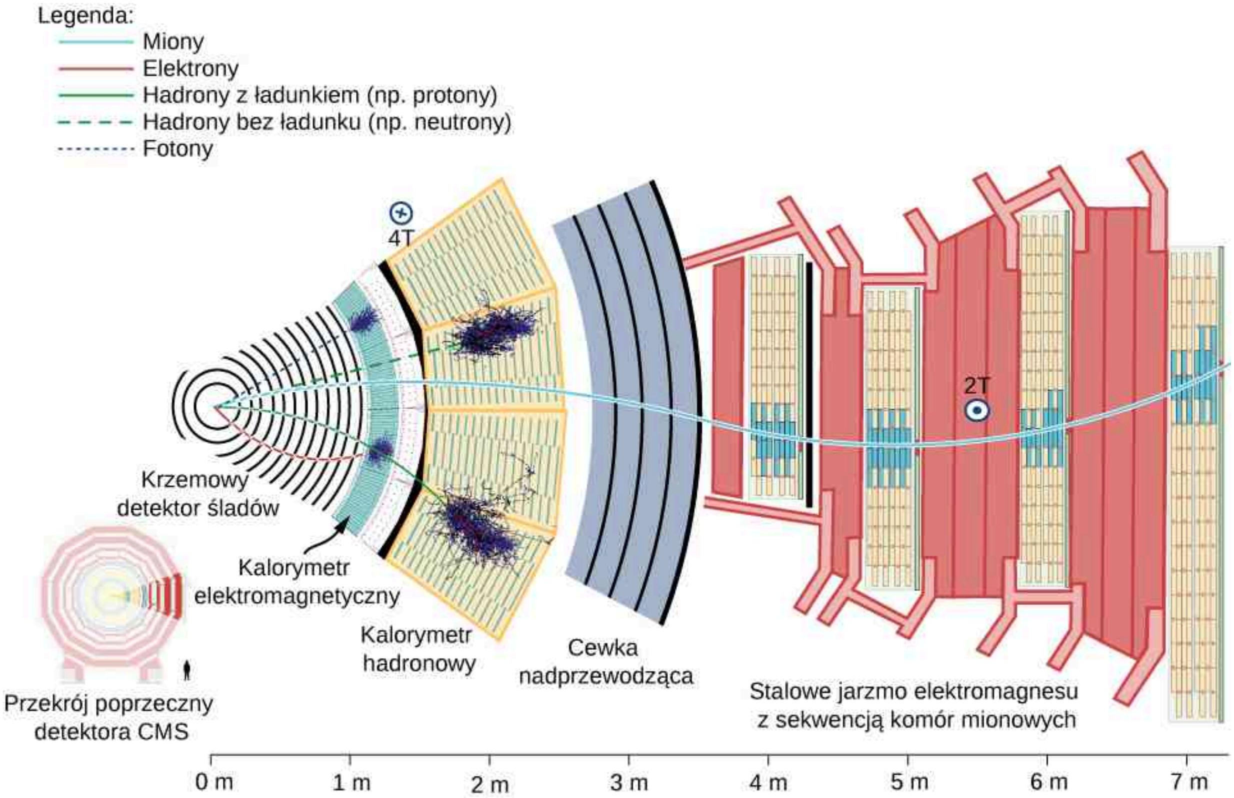
11.7 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Co to znaczy, że zderzacz jest symetryczny?

Wysokie energie, które chcemy uzyskiwać w akceleratorach, by produkować coraz cięższe cząstki, wymagają budowy coraz większych urządzeń. Współczesne akceleratory są więc naprawdę duże, przykładowo LHC ma obwód ok. 27 km (Rysunek 5.27). W latach 40. Enrico Fermi zaproponował hipotetyczny akcelerator o rozmiarze kuli ziemskiej, w którym cząstki okrążałyby Ziemię po obwodzie ok. $40\,000\,\mathrm{km}$! Poważnym wyzwaniem dla fizyków w XXI wieku jest redukcja rozmiarów akceleratorów cząstek przy jednoczesnej możliwości uzyskiwania coraz większych energii.

Detektory cząstek

Samo wytworzenie nowych cząstek w potężnych akceleratorach nie byłoby wiele warte, gdybyśmy nie potrafili ich mierzyć i obserwować produktów ich rozpadów. Do tego służy **detektor cząstek** (ang. **particle detector**). Jest to wielozadaniowe urządzenie, złożone z wielu segmentów mających różne funkcje; ma ono dokonywać dokładnych pomiarów produktów zderzeń w różnych aspektach fizycznych. Jeden z segmentów może być odpowiedzialny za rejestrację fotonów, inny mionów, jeszcze inny elektronów itd. Działanie poszczególnych segmentów detektora i to, jak na pod-

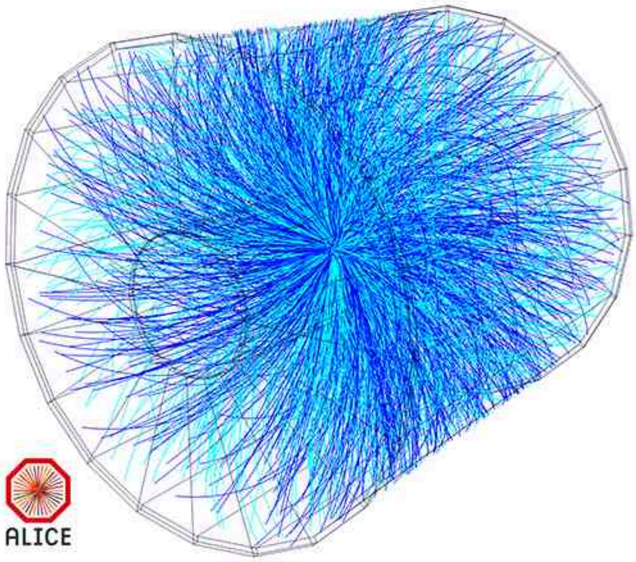
stawie ich wskazań możemy wnioskować o całym procesie zderzenia, przedstawimy na przykładzie **detektora CMS** (ang. **Compact Muon Solenoid**), który wykorzystano przy odkryciu bozonu Higgsa w eksperymencie LHC (Rysunek 11.9).



Rysunek 11.9 Detektor CMS Wielkiego Zderzacza Hadronów (LHC). Składa się on z kilku wielowarstwowych segmentów odpowiedzialnych za pomiar cząstek różnego typu. Źródło: David Barney/CERN

Wiązka biegnie w rurze akceleratora położonej prostopadle do płaszczyzny rysunku w środku detektora. Cząstki produkowane w zderzeniach pp (proton–proton), nazywane „fragmentami zderzenia”, rozbiegają się we wszystkich kierunkach. Na swojej drodze przechodzą przez wiele warstw kolejnych segmentów detektora. Każdy segment także jest detektorem zaprojektowanym do pomiaru określonego typu cząstek. Segmenty są połączone w jeden kompleks tworzący cały detektor CMS. W poszczególnych segmentach znajduje się kilka głównych typów detektorów. Detektory śladowe (zwane trackerami) służą do wyznaczania torów fragmentów, a zatem i ich wektorów pędu, kalorymetry służą do pomiaru energii cząstek, w układzie znajdują się również detektory służące do identyfikacji cząstek na podstawie pomiaru ich masy.

Pierwszym segmentem detektora jest krzemowa komora mozaikowa i śladowa, która ma mierzyć pęd cząstek naładowanych (takich jak elektrony czy protony). Detektor znajduje się w obszarze jednorodnego pola magnetycznego, które powoduje zakrzywienie toru cząstek dzięki działaniu siły Lorentza (dokładnie tak jak w cyklotronach). Jeśli pęd cząstki jest duży, promień okręgu, po którym porusza się cząstka, też jest duży i ślad po cząstce w komorze jest prawie linią prostą. Jeśli natomiast pęd jest mały, to promień krzywizny cząstki także jest mały i w detektorze obserwujemy silnie zakrzywione ślady. Gdy cząstki przechodzą przez wnętrze detektora, oddziałują z krzemowymi paskami o rozmiarach mikrometrycznych (półprzewodnikowy detektor paskowy) w wielu kolejnych punktach. Każda interakcja cząstki z półprzewodnikiem w danym miejscu wytwarza niewielki sygnał elektryczny. Wszystkie sygnały są wzmacniane przez odpowiedni układ elektroniczny i zapisywane. Na podstawie serii kolejnych sygnałów odtwarza się całą trajektorię cząstki przechodzącej przez wnętrze detektora. Dzięki analizie komputerowej do punktów dopasowuje się krzywą najlepszego dopasowania, dla której możemy znaleźć promień krzywizny i w efekcie pęd cząstki. W LHC, gdzie wiązki mają ogromne energie, w pojedynczym akcie zderzenia rejestrujemy bardzo dużą liczbę śladów. Odtworzone krzywoliniowe trajektorie fragmentów zarejestrowanych w innym detektorze LHC, ALICE, zaznaczono niebieskimi liniami na Rysunku 11.10.



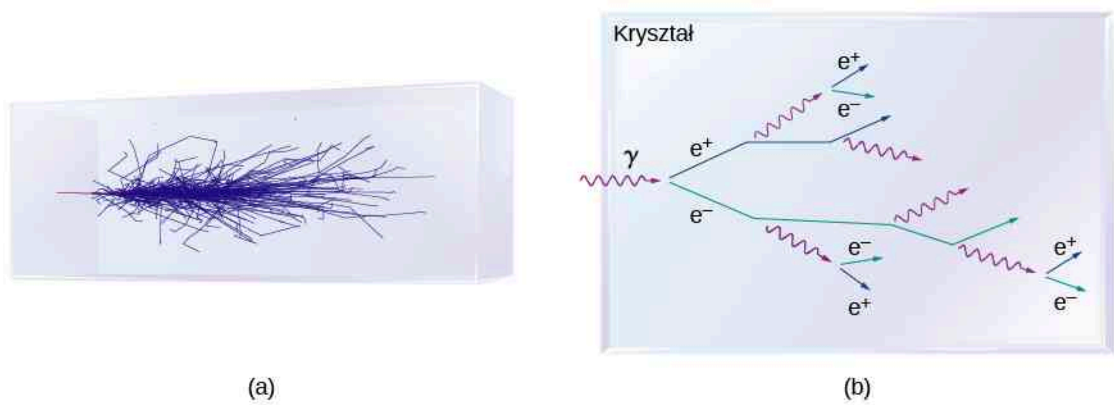
Rysunek 11.10 Trójwymiarowa wizualizacja torów fragmentów w **detektorze ALICE** (ang. **ALICE detector**). Źródło: LHC/CERN

Kolejny segment detektora to kalorymetr elektromagnetyczny. Ten detektor jest zbudowany z kryształów mających bardzo mało defektów, zawierających ciężki ołów w swojej strukturze krystalicznej. Kalorymetr służy do pomiaru całkowitej energii cząstek padających. Gdy cząstka wpada do jego wnętrza, wówczas oddziałuje z kryształem i traci energię wskutek absorpcji w materiale detektora. W wyniku tego wypromieniowywany jest strumień fotonów o wysokiej energii. Te fotony z kolei wytwarzają pary elektron–pozyton dzięki zjawisku kreacji par w sąsiedztwie ciężkich atomów ołowiu w krysztale. Następnie te cząstki też są absorbowane, przez co powstają kolejne fotony. Cały proces powtarza się wielokrotnie, w wyniku czego tworzy się kaskada cząstek (mówimy nawet „prysznic cząstek''), a sam kryształ rozbłyska. Uproszczony model fizyczny tego procesu wygląda następująco.

Elektron o energii E_0 zderza się z atomami kryształu i traci połowę swojej energii na wytworzenie fotonu. Ten foton wytwarza parę elektron–pozyton, a każda z cząstek pary ulatuje z energią równą połowie energii fotonu. W międzyczasie pierwotny elektron dalej wytwarza promieniowanie elektromagnetyczne. W tej sytuacji po pierwszym etapie otrzymujemy cztery cząstki: dwa elektrony, jeden pozyton i jeden foton, każda o energii $E_0 / 4$. Liczba cząstek w kaskadzie rośnie jak w ciągu geometrycznym. Po n zdarzeniach mamy $N = 2^n$ cząstek. Zatem całkowita energia po n zdarzeniach liczona na pojedynczą cząstkę wynosi

$$E(t) = \frac{E_0}{2^n},$$

gdzie E_0 jest początkową energią cząstki padającej, a $E(t)$ ilością energii przypadającą na cząstkę po n zdarzeniach. Podobną kaskadę zdarzeń wywołuje wpadający pierwotnie do kalorymetru foton (Rysunek 11.11). Gdy ta energia przypadająca na cząstkę spadnie poniżej pewnej progowej wartości, inne procesy radiacyjne zaczynają nabierać znaczenia, a kaskada cząstek gaśnie (kryształ przestaje świecić). Wreszcie cała energia początkowa padającej cząstki ulega absorpcji w materiale kalorymetru i zmienia się w sygnał elektryczny, który możemy mierzyć przy pomocy urządzeń elektronicznych.



Rysunek 11.11 (a) Prysznic cząstek wytworzony w kalorymetrze krystalicznym. (b) Diagram obrazujący typową sekwencję reakcji w kaskadzie.

Za kalorymetrem elektromagnetycznym znajduje się kalorymetr hadronowy. Jak możemy się domyślić, ten detektor rejestruje hadrony, takie jak protony czy piony. Kalorymetr hadronowy składa się z naprzemiennych warstw wykonanych z brązu i stali oddzielonych plastikowymi scyntylatorami. Kalorymetr ma zaabsorbować energię cząstek i zamienić ją na sygnał elektryczny. W materiale scyntylatora cząstki naładowane powodują rozbłyski (scyntylacje), które następnie są zamieniane na impulsy prądu. Za kalorymetrem ustawiona jest potężna cewka magnetyczna, wytwarzająca silne pole magnetyczne potrzebne do śledzenia trajektorii cząstek w komorze śladowej.

Ostatnim segmentem detektora CMS jest detektor mionowy. Składa się on z grubych płyt stalowych, przez które mogą przenikać tylko lekkie cząstki, takie jak miony czy neutrina. Pomiędzy płytami znajdują się detektory mionowe, które z wysoką czułością mierzą pęd padających mionów. Detektory te odgrywają często bardzo ważną rolę w wykrywaniu niektórych cząstek, np. bozon Higgsa (odkryty niedawno w LHC) rozpada się na cztery miony – ich zarejestrowanie umożliwia wnioskowanie o właściwościach bozonu.

Gdy wszystkie dane z detektorów w każdym segmencie są zebrane, można oszacować dokładny przebieg zderzenia i wszystkich etapów rozpadów następujących po nim. Energię relatywistyczną i-tej cząstki możemy obliczyć jako

$$E_i = \sqrt{(p_i c)^2 + \left(m_i c^2\right)^2},$$

gdzie p_i jest długością wektora pędu cząstki i-tej, a m_i jej masą spoczynkową.

Całkowita energia wszystkich cząstek wynosi zatem

$$E_{\text{cał}} = \sum_i E_i .$$

Jeśli udało się zarejestrować wszystkie cząstki biorące udział w reakcji (wszystkie produkty rozpadów), to całkowita energia $E_{\text{cał}}$ powinna być równa energii w układzie środka masy zderzających się cząstek W. W praktyce nigdy się to nie udaje, ponieważ albo jest bardzo trudno je zauważyć (jak w przypadku neutrin), albo po prostu wymykają się z detektora i nie są rejestrowane. W wielu przypadkach jednak udaje się zrekonstruować dokładny przebieg każdej reakcji, tak jak można złożyć zegarek rozbity na drobne części. Szczegółowa informacja o łańcuchach rozpadów jest bardzo ważna z punktu widzenia weryfikacji modeli oddziaływania cząstek elementarnych.

11.5 | Model standardowy

Cel dydaktyczny

W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać model standardowy cząstek elementarnych w kontekście czterech podstawowych oddziaływań i cząstek pośredniczących;
- zapisywać diagram Feynmana dla prostego oddziaływania cząstek;
- wykorzystywać zasadę nieoznaczoności Heisenberga do określenia zasięgu oddziaływań w modelu standardowym;
- podawać uzasadnienie sensowności teorii unifikacji.

Największe wysiłki intelektualne naukowców skupiają się na rozwijaniu i weryfikacji modeli naukowych. Fizycy cząstek elementarnych poszukują najlepszych modeli ich oddziaływania. Podstawą dla nich są teorie grawitacji i elektromagnetyzmu rozwinięte w ciągu XVII, XVIII i XIX wieku. Celem ich pracy jest stworzenie zunifikowanej teorii wszystkiego, która umożliwiałaby zapisanie wszystkich oddziaływań między cząstkami w postaci jednego eleganckiego równania i uzyskanie spójnego pojedynczego obrazu całej fizyki oddziaływań. Równanie to mogłoby być samo w sobie bardzo złożone, jednak wielu naukowców uważa, że koncepcja stojąca za takim równaniem musi być bardzo prosta, przez co kiedyś będziemy w stanie powiedzieć: „Jak mogliśmy to przeoczyć? Przecież to było takie oczywiste!”.

W tym podrozdziale poznamy szczegóły tzw. modelu standardowego – najlepszego obecnie modelu oddziaływań cząstek. Opisujemy go poprzez cztery podstawowe oddziaływania: grawitacyjne, elektromagnetyczne, słabe i silne jądrowe. Na końcu podsumujemy teorie unifikacji oddziaływań w fizyce.

Wprowadzenie do modelu standardowego

Model standardowy (ang. **Standard Model**) to współczesna teoria oddziaływań cząstek elementarnych, która opiera się na dwóch zasadniczych koncepcjach: teorii oddziaływań elektrosłabych oraz chromodynamice kwantowej. **Chromodynamika kwantowa (QCD)** (ang. **quantum chromodynamics**) to teoria oddziaływania ładunków kolorowych ze sobą. Teoria oddziaływań elektrosłabych (nazywana czasem małą teorią unifikacji) unifikuje **elektrodynamikę kwantową (QED)** (ang. **quantum electrodynamics**) – współczesną wersję elektromagnetyzmu – z teorią jądrowych oddziaływań słabych. W modelu standardowym wykorzystuje się narzędzia mechaniki zarówno relatywistycznej, jak i kwantowej.

Oddziaływanie cząstek między sobą w modelu standardowym zachodzi poprzez wymianę bozonów pośredniczących, które odgrywają rolę nośników oddziaływań. Przykładowo oddziaływanie elektrostatyczne (Coulomba) między dwiema cząstkami naładowanymi elektrycznie odbywa się na zasadzie emisji i pochłaniania bezmasowych fotonów. To oddziaływanie może zachodzić teoretycznie przy dowolnej odległości między cząstkami. Jego efektem jest występowanie przyciągającej lub odpychającej siły Coulomba. Podobnie interpretujemy oddziaływanie kwarków – przyciągają się one poprzez wymianę gluonów. Leptony rozpraszają się na innych leptonach lub rozpadają na lżejsze leptony w wyniku wymiany masywnych bozonów W i Z. Podsumowanie wszystkich oddziaływań w modelu standardowym znajduje się w Tabeli 11.6. Żeby zachować kompletność opisu, w tabeli wymieniono także oddziaływanie grawitacyjne, przenoszone za pośrednictwem bezmasowych grawitonów, jednak nie stanowi ono elementu modelu standardowego.

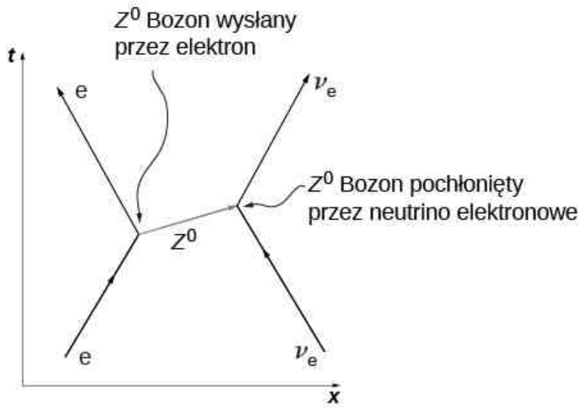
Oddziaływanie	Względna siła	Cząstka pośrednicząca (bozon)	Cząstki podlegające oddziaływaniu	Zasięg
Silne	1	gluon	kwarki	10^{-15} m
Elektromagnetyczne	1 / 137	foton	cząstki naładowane elektrycznie	∞
Słabe	10^{-10}	bozony W^+, W^- oraz Z	kwarki i leptony	10^{-18} m

Tabela 11.6 Cztery oddziaływania podstawowe w kontekście modelu standardowego.

Oddziaływanie	Względna siła	Cząstka pośrednicząca (bozon)	Cząstki podlegające oddziaływaniu	Zasięg
Grawitacyjne	10^{-38}	grawiton	wszystkie cząstki obdarzone masą	∞

Tabela 11.6 Cztery oddziaływania podstawowe w kontekście modelu standardowego.

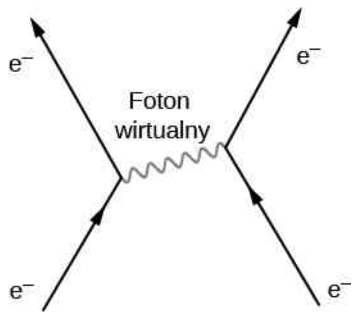
Wszystkie oddziaływania w modelu standardowym można zapisać przy użyciu równań i diagramów. Równania matematyczne są w nim dość skomplikowane i zazwyczaj wykładane w ramach zaawansowanego kursu fizyki współczesnej. Jednak istotę modelu standardowego da się wyrazić łatwo przy pomocy **diagramów Feynmana** (ang. **Feynman diagrams**). Diagram taki, wprowadzony do fizyki przez amerykańskiego fizyka noblistę **Richarda Feynmana (1918–1988)**, jest diagramem czasoprzestrzennym, w którym zapisujemy ewolucję czasową i oddziaływanie cząstek. Różne cząstki oznacza się różnymi symbolami, podobnie różne typy oddziaływań zaznacza się różnymi strzałkami. Oddziaływania cząstek w jednym wymiarze (wzdłuż wybranego kierunku w przestrzeni) przedstawia się w postaci wykresu zależności czasu od położenia (nie: położenia od czasu, jak zazwyczaj robimy w kinematyce). Dla przykładu za pomocą diagramu Feynmana omówmy rozpraszanie elektronu i neutrina elektronowego (Rysunek 11.12). Elektron porusza się w prawo, zgodnie z dodatnim kierunkiem osi x, i zderza się z neutrinem elektronowym, poruszającym się w lewo. W bliskiej odległości od siebie cząstki wymieniają bozon Z (o obojętnym ładunku elektrycznym) – precyzyjniej: to elektron wysyła bozon Z do neutrina. W wyniku tego elektron rozprasza się w lewo, a neutrino rozprasza się w prawo. Oddziaływanie nie jest natychmiastowe. Bozon Z przemieszcza się między cząstkami przez pewien krótki czas. Rozpraszanie elektronu na neutrinie odbywa się za pośrednictwem oddziaływania słabego jądrowego. Występowanie siły między cząstkami nie może być wyjaśnione w ramach klasycznego elektromagnetyzmu, bo neutrino elektronowe nie jest obdarzone ładunkiem elektrycznym. Do oddziaływań słabych wrócimy jeszcze na koniec tego podrozdziału.



Rysunek 11.12 Na tym diagramie Feynmana oddziaływanie słabe jądrowe między elektronem a neutrinem elektronowym odbywa się na zasadzie wymiany wirtualnego bozonu Z^0 .

Oddziaływanie elektromagnetyczne

W świetle elektrodynamiki kwantowej siła oddziaływania elektromagnetycznego jest przenoszona między cząstkami naładowanymi za pomocą fotonów. Teoria ta opiera się na trzech podstawowych procesach: cząstka naładowana (np. elektron) przemieszcza się z jednego miejsca do drugiego, emituje lub absorbuje foton, a następnie dalej przemieszcza się do kolejnego miejsca. Gdy np. dwa elektrony oddziałują ze sobą, jeden z nich wysyła, a drugi pochłania foton (Rysunek 11.13). Fotony przenoszą energię i pęd z jednego elektronu na drugi. W efekcie otrzymujemy siłę odpychającą między elektronami. Mówimy, że wymienione fotony są wirtualne. **Cząstka wirtualna** (ang. **virtual particle**) to taka, która żyje zbyt krótko, by dało się ją zaobserwować. Fotony wirtualne mogą łamać zasadę zachowania energii. Żeby to zrozumieć, musimy odwołać się do zasady nieoznaczoności Heisenberga. Załóżmy, że czas życia fotonu Δt jest niezwykle krótki, w takim razie nieoznaczoność energii fotonu ΔE może być bardzo duża, nawet większa niż energia potencjalna oddziaływania między elektronami.



Rysunek 11.13 Diagram Feynmana oddziaływania dwóch elektronów za pośrednictwem wirtualnego fotonu.

Żeby oszacować zasięg oddziaływania elektromagnetycznego, załóżmy, że nieoznaczoność energii fotonu jest porównywalna z samą energią fotonu. Zatem

$$\Delta E \approx E. \tag{11.4}$$

Zgodnie z relacją Heisenberga dla energii i czasu otrzymujemy

$$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\Delta t}, \tag{11.5}$$

gdzie $\hbar = h / 2\pi$ (czyt. h kreślone) jest zredukowaną stałą Plancka (albo stałą Diraca), natomiast h jest stałą Plancka. Połączywszy oba równania, otrzymamy wzór na czas życia fotonu wirtualnego

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{E}. \tag{11.6}$$

Energia fotonu jest jednoznacznie zdefiniowana przez jego częstotliwość, $E = hf$, więc

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{hf} \sim \frac{1}{f} = \frac{\lambda}{c}. \tag{11.7}$$

Pominęliśmy czynnik 2π. Droga d, jaką foton może przebyć w tym czasie, wynosi

$$d = c \cdot \Delta t \approx c \cdot \frac{\lambda}{c} = \lambda. \tag{11.8}$$

Energia fotonu wirtualnego może być dowolnie mała, wobec czego jego długość fali może być dowolnie duża – nie ma przeszkód, aby była wręcz nieskończenie duża. Dlatego też mówimy, że siła oddziaływań elektromagnetycznych jest dalekozasięgowa.

Słabe oddziaływanie jądrowe

Oddziaływanie słabe odpowiada za wszystkie rodzaje rozpadów promieniotwórczych, w tym za rozpady cząstek elementarnych. Zasięg oddziaływania słabego jest bardzo mały (w przybliżeniu równy tylko 10^{-18} m) i podobnie do innych oddziaływań w modelu standardowym można go opisać za pomocą wymiany cząstek pośredniczących. W odróżnieniu od oddziaływania elektromagnetycznego, w którym możemy podać siłę Coulomba, w przypadku oddziaływania słabego nie da się podać prostej definicji siły. Zachodzi ono w procesie wymiany jednego z trzech bozonów: W^+, W^- lub Z^0. Model standardowy bezsprzecznie potwierdza istnienie tych cząstek o spinie równym 1 oraz dokładnie przewiduje ich masy spoczynkowe. Zostały one po raz pierwszy zaobserwowane w latach 80. XX wieku w CERN, co było wielkim sukcesem modelu standardowego. Zmierzono ich dokładne masy, wynoszące $81\,\mathrm{GeV} / c^2$ w przypadku naładowanych elektrycznie bozonów W oraz $90\,\mathrm{GeV} / c^2$ w przypadku obojętnego elektrycznie bozonu Z^0.

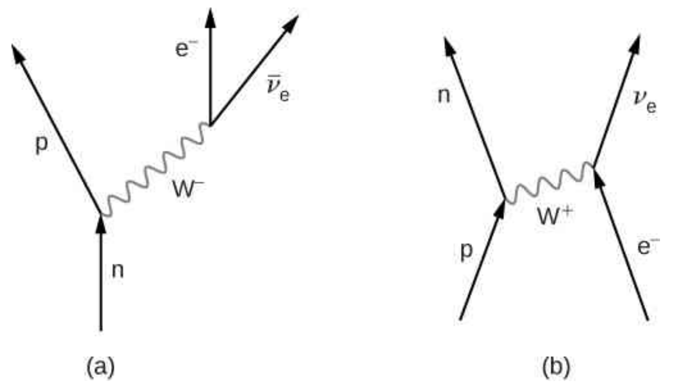
Oddziaływanie słabe jądrowe najczęściej przejawia się w procesach rozpadu niestabilnych cząstek masywnych na lżejsze, jak w przypadku rozpadu neutronu na proton, elektron i antyneutrino elektronowe. Schemat tej reakcji możemy zapisać następująco

$$\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e},$$

gdzie n oznacza neutron, p – proton, e^- – elektron, a $\overline{\nu}_\mathrm{e}$ to prawie bezmasowe antyneutrino elektronowe. Ten proces, nazywany rozpadem β^-, jest ważny z punktu widzenia wielu zjawisk fizycznych. Diagram Feynmana dla rozpadu β^- przedstawiono na Rysunku 11.14 (a). Neutron emituje bozon W^- i zamienia się w proton, następnie bozon W^- rozpada się na elektron i antyneutrino elektronowe. Taki rozpad podobny jest do innego, w pewnym sensie odwrotnego, procesu rozpraszania

$$\mathrm{e}^- + \mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{n} + \nu_\mathrm{e}.$$

W tym procesie proton emituje bozon W^+ i zamienia się w neutron: Rysunek 11.14 (b). Bozon W^+ następnie oddziałuje z elektronem, w wyniku czego powstaje neutrino elektronowe. Inne przykłady procesów, w których ujawnia się oddziaływanie słabe, omówimy w zadaniach.



Rysunek 11.14 Diagramy Feynmana dla reakcji zachodzących z wymianą bozonów pośredniczących W: (a) rozpad β^-; (b) konwersja protonu na neutron.

Omówimy teraz zagadnienie zasięgu oddziaływania słabego, analogicznie do oddziaływania elektromagnetycznego. Przyjmiemy także, że nieoznaczoność energii cząstki pośredniczącej w przybliżeniu równa się jej masie ($E \approx mc^2$). Otrzymujemy

$$\Delta t \approx \frac{\hbar}{mc^2}. \tag{11.9}$$

Największa odległość d, na jaką bozon pośredniczący może się oddalić, przy założeniu ruchu z prędkością bliską prędkości światła c, wynosi

$$d \approx c \cdot \Delta t = \frac{\hbar}{mc}. \tag{11.10}$$

Dla jednego z bozonów o masie spoczynkowej $mc^2 \approx 80\,\mathrm{GeV} = 1{,}28 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{J}$ otrzymujemy $mc = 4{,}27 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{J\,s\,/\,m}$. Zatem zasięg oddziaływania przenoszonego za pośrednictwem tego bozonu wynosi

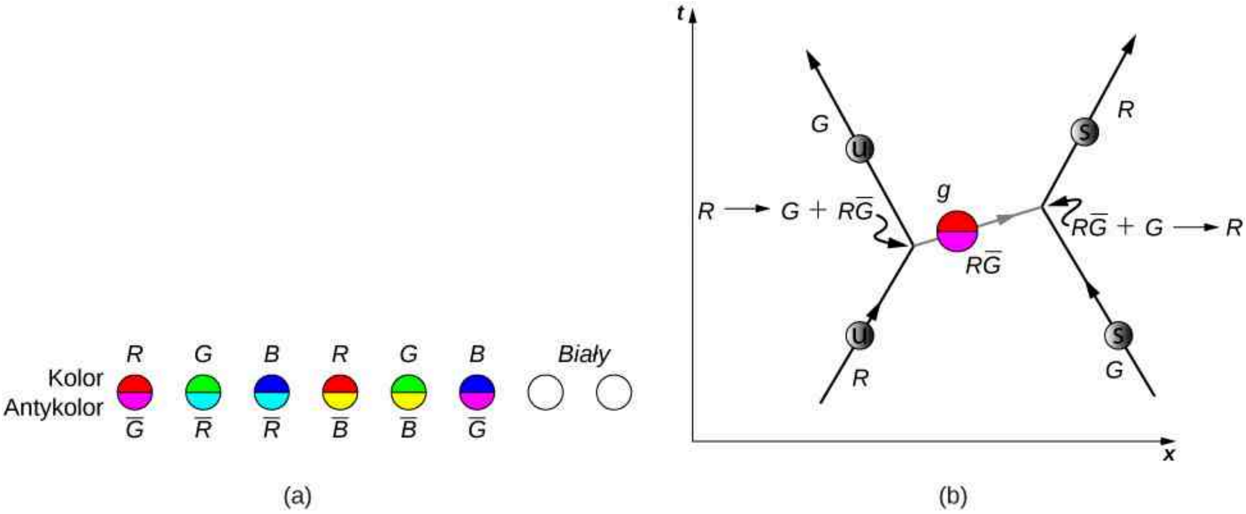
$$d \approx \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}}{4{,}27 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{J\,s\,/\,m}} \approx 2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{m}. \tag{11.11}$$

Silne oddziaływanie jądrowe

Oddziaływania silne zachodzą między kwarkami, teorią tych oddziaływań zajmuje się chromodynamika kwantowa. Według niej kwarki wiążą się, wymieniając między sobą gluony. Kwarki są obdarzone zarówno ładunkiem elektrycznym o wartości $+2e\,/\,3$ lub $-e\,/\,3$, od którego zależy ich siła oddziaływania elektromagnetycznego, jak i ładun-

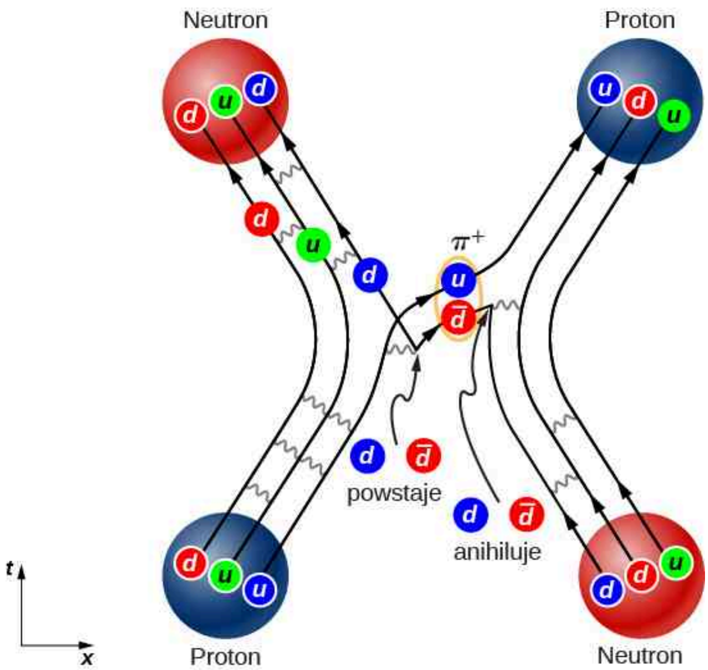
kiem kolorowym (czerwonym, niebieskim lub zielonym), który wpływa na wielkość oddziaływania silnego. Jak już wcześniej mówiliśmy, kwarki wiążą się tylko w dwójki lub trójki o kolorze neutralnym (są białe), przykładowo czerwony–niebieski–zielony albo czerwony–antyczerwony.

Co ciekawe, same gluony, a więc nośniki oddziaływania silnego, też przenoszą ładunek kolorowy. To tak, jakby fotony miały ładunek elektryczny. Znamy osiem różnych gluonów: sześć z nich ma jeden z trzech kolorów oraz jednocześnie jeden z antykolorów (inny niż odpowiedni kolor), a dwa są neutralne (nie mają koloru), spójrzmy na Rysunek 11.15 (a). Oddziaływanie dwóch kwarków za pośrednictwem kolorowych gluonów ilustrujemy za pomocą diagramu Feynmana na Rysunku 11.15 (b). W pewnym momencie z lewej strony nadlatuje czerwony kwark dolny, a z prawej – zielony kwark dziwny (spójrzmy na dolny fragment diagramu). Kwark dolny wymienia z kwarkiem dziwnym gluon, który niesie ładunek czerwony i antyzielony jednocześnie. Na schemacie oznaczyliśmy antykolory przez barwy komplementarne do barw podstawowych (magenta, cyjan i żółty). Zgodnie z zasadami kwantowej chromodynamiki wszystkie oddziaływania w tym procesie (reprezentowane na diagramie przez wszystkie wierzchołki) muszą być koloru neutralnego (białe). Dlatego kwark dolny musi zmienić kolor z czerwonego na zielony, a kwark dziwny – z zielonego na czerwony. Kwarki wymieniają się kolorami.



Rysunek 11.15 (a) Osiem rodzajów gluonów – bozonów przenoszących oddziaływanie silne. Gluony białe mają mieszankę koloru i antykoloru. (b) Oddziaływanie dwóch kwarków z wymianą gluonów.

Jak możemy się spodziewać na podstawie powyższego przykładu, oddziaływania między kwarkami w jądrze atomowym mogą być bardzo skomplikowane. Rysunek 11.16 przedstawia oddziaływanie protonu z neutronem. Zauważmy, że proton w tej reakcji zamienia się w neutron i odwrotnie. Występowanie par kwark–antykwark w tym procesie wymiennym sugeruje, że wiązanie nukleonów w jądra może być modelowane jako wymiana pionów.



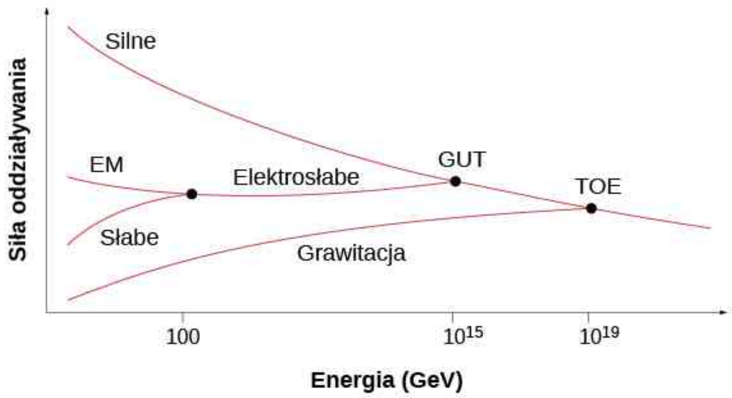
Rysunek 11.16 Diagram Feynmana opisujący oddziaływanie silne między protonem a neutronem w jądrze.

W praktyce szczegółowe zapisanie reakcji i prowadzenie obliczeń w chromodynamice kwantowej jest bardzo trudne. Ta trudność wynika z faktu, że wszystkim procesom zachodzącym w danej reakcji nieodłącznie towarzyszy oddziaływanie między wszystkimi cząstkami, którego nie da się pominąć w obliczeniach. Dlatego obliczenia chromodynamiki kwantowej często prowadzone są przy użyciu superkomputerów o dużej mocy obliczeniowej. Istnienie gluonów zostało potwierdzone w procesach rozpraszania elektronów na jądrach atomowych. W wyniku tych eksperymentów zauważono, że duża część pędu kwarków powstających w zderzeniach musi być unoszona przez inne cząstki – gluony, bez istnienia których całkowity pęd byłby znacznie mniejszy niż uzyskany.

Teorie unifikacji

W fizyce od dawna wiadomo, że siła (wielkość) oddziaływania między cząstkami zależy od odległości między nimi. Przykładowo dwie dodatnio naładowane elektrycznie cząstki doświadczają większego odpychania, gdy są bliżej siebie. W eksperymentach rozpraszania cząstek siła oddziaływania zależy od energii oddziałujących (padających na siebie) cząstek, ponieważ większa energia cząstek oznacza silniejsze oddziaływanie na mniejszej odległości.

Fizycy cząstek elementarnych obecnie uważają, że wszystkie oddziaływania między cząstkami (za pośrednictwem czterech oddziaływań podstawowych) przy bardzo dużych ich energiach łączą się w jedno (Rysunek 11.17). Teoria unifikacji tłumaczy, jakiego typu są te zunifikowane oddziaływania i dlaczego załamują się (rozpadają) przy niższych energiach. W ramach wielkiej teorii unifikacji (GUT) rozważa się pojedyncze oddziaływanie łączące oddziaływania elektrosłabe i silne. Teoria wszystkiego to koncepcja połączenia wszystkich czterech typów oddziaływań podstawowych w jedną teorię oddziaływania. Zauważmy, że energie, przy których ma dochodzić do unifikacji, są niewyobrażalnie wysokie i jeszcze długo będą nie do osiągnięcia w eksperymentach. Jednak uważa się, że panowały one tuż po Wielkim Wybuchu, kiedy wszystkie oddziaływania rzeczywiście mogły stanowić jedno.



Rysunek 11.17 Etapy unifikacji oddziaływań przy wysokich energiach.

11.6 | Wielki Wybuch

Cel dydaktyczny

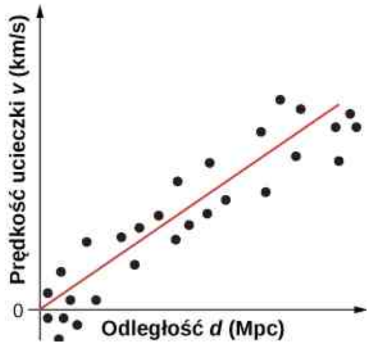
W tym podrozdziale nauczysz się:

- wyjaśniać przyczyny i przebieg ekspansji Wszechświata przy pomocy prawa Hubble’a i kosmologicznego przesunięcia ku czerwieni;
- podawać prostą analogię między rozszerzaniem się Wszechświata a pompowaniem balonu;
- korzystać z prawa Hubble’a do szacowania prędkości ucieczki odległych galaktyk.

W rozdziale 11 do tej pory omawialiśmy cząstki elementarne, które są najmniejszymi obiektami dostępnymi naszym badaniom. Teraz zajmiemy się badaniem Wszechświata, który jest z kolei największym możliwym przedmiotem badań nauki. Cechą łączącą oba te z pozoru odległe tematy jest wysoka energia: badanie oddziaływań cząstek wymaga użycia takich właśnie energii, a największe możliwe występowały na wczesnych etapach ewolucji Wszechświata. Niektórzy fizycy uważają, że zunifikowane oddziaływania, o których mówiliśmy w poprzednim podrozdziale, mogły determinować ewolucję Wszechświata od najwcześniejszych chwil jego istnienia.

Prawo Hubble’a

W 1929 roku amerykański astronom **Edwin Hubble (1889–1953)** opublikował jedno z największych odkryć współczesnej astronomii. Dokonał on następujących obserwacji: (1) galaktyki wydają się oddalać od Ziemi, (2) prędkość ucieczki galaktyki (v) jest wprost proporcjonalna do jej odległości (d) od Ziemi. Obie wielkości, v oraz d, można wyznaczyć eksperymentalnie na podstawie widm jasności gwiazdowych. Przykładowe dopasowanie do danych eksperymentalnych pokazuje Rysunek 11.18 (oryginalny wykres Hubble’a zawierał duży rozrzut danych wokół linii prostej, ale trend liniowy był wyraźnie zachowany).



Rysunek 11.18 Wykres zależności prędkości ucieczki w funkcji odległości galaktyki od Ziemi ma liniowy charakter. Im większa prędkość ucieczki galaktyki, tym większa jej odległość od Ziemi, co stanowi dowód na rozszerzanie się Wszechświata. Nachylenie prostej pokazuje przybliżone tempo ekspansji. Źródło: John Cub

Dane eksperymentalne sugerują wyraźnie prostą zależność liniową

$$v = H_0 d, \tag{11.12}$$

gdzie $H_0 = 70\,\mathrm{km}\,/\,(\mathrm{s\,Mpc})$ jest stałą, znaną jako **stała Hubble'a** (ang. **Hubble's constant**). (Uwaga: $1\,\mathrm{Mpc}$ to milion parseków, a parsek jest jednostką długości równą $3{,}26$ roku świetlnego). Zależność powyższa nosi nazwę **prawa Hubble'a** (ang. **Hubble's law**). Mówi ono, że odległe od nas galaktyki oddalają się w tempie $70\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}$ na każdy megaparsek odległości. Wartość stałej Hubble'a odpowiada współczynnikowi nachylenia dopasowanej prostej na wykresie (Rysunek 11.18). Należy przyznać, że nazwa „stała Hubble'a" jest dość myląca, jej wartość bowiem zmienia się w czasie. Podana tutaj to stała Hubble'a obowiązująca dzisiaj. Prędkość ucieczki galaktyk można łączyć z wielkością kosmologiczną, jaką jest przesunięcie ku czerwieni, o którym powiemy więcej w dalszej części. Tak naprawdę miarą prędkości ucieczki jest właśnie owo przesunięcie ku czerwieni.

Obejrzyj ten filmik (https://openstaxcollege.org/l/21hubble) , aby dowiedzieć się więcej o historii prawa i stałej Hubble'a.

Prawo Hubble'a poprawnie opisuje uśrednione zachowanie wszystkich galaktyk, z wyjątkiem tych najbliższych Ziemi. Przykładowo galaktyka odległa o $100\,\mathrm{Mpc}$ od nas (odległość znamy z obserwacji jej rozmiarów i jasności) oddala się od nas ze średnią prędkością

$$v = 70\,\mathrm{km}\,/\,(\mathrm{s\,Mpc}) \cdot 100\,\mathrm{Mpc} = 7000\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}.$$

Ta prędkość może się oczywiście nieco zmieniać z powodu oddziaływania z sąsiednimi galaktykami. Możemy też przeprowadzić odwrotną analizę – na podstawie znanej prędkości ucieczki galaktyki, wynoszącej $10\,000\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}$ (co wiemy z obserwacji wielkości przesunięcia ku czerwieni), potrafimy obliczyć średnią odległość tej galaktyki od nas

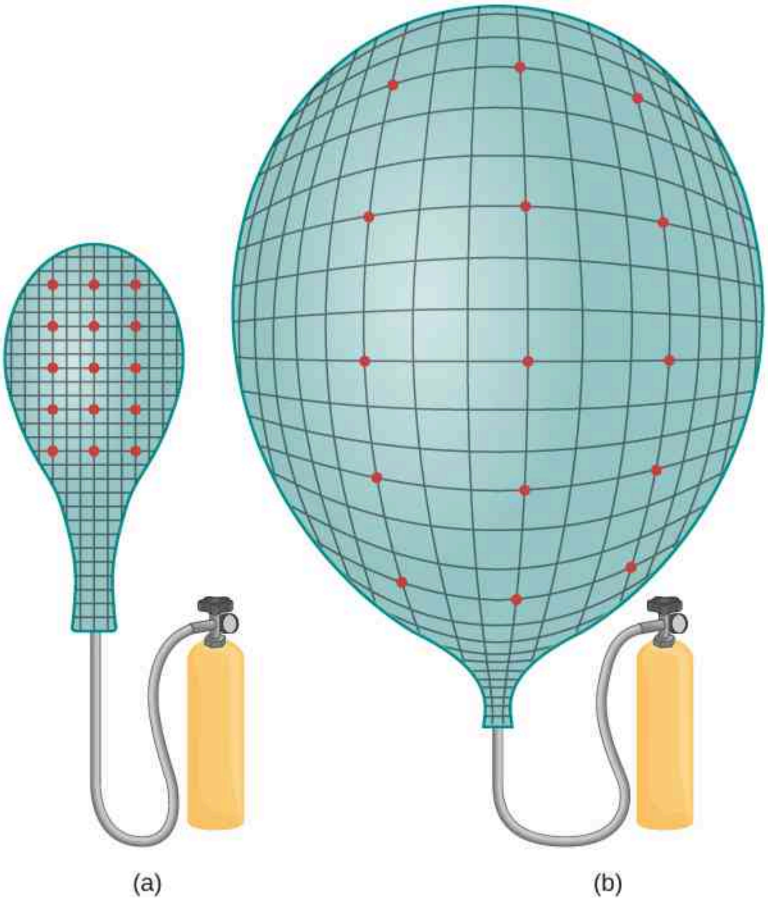
$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{10\,000\,\mathrm{km}\,/\,\mathrm{s}}{70\,\mathrm{km}\,/\,(\mathrm{s\,Mpc})} = 143\,\mathrm{Mpc}\,.$$

Pamiętajmy, że takie obliczenia są zawsze przybliżone, ponieważ nie znamy wartości stałej Hubble'a sprzed milionów czy miliardów lat. Tempo rozszerzania się Wszechświata na pewno zmieniało się i było inne np. 5 miliardów lat temu.

Model Wielkiego Wybuchu

Naukowcy zajmujący się **kosmologią** (ang. **cosmology**) – nauką o początku, ewolucji i przyszłości Wszechświata, uważają, że powstał on w wyniku gigantycznej eksplozji, nazywanej **Wielkim Wybuchem** (ang. **Big Bang**), która nastąpiła ok. $13{,}7$ miliarda lat temu. Tego wybuchu nie należy jednak rozumieć jako eksplozji jakiegoś ciała i jego ekspansji w przestrzeni, jak np. wybuchu fajerwerku w powietrzu, ale raczej jako gwałtowne i szybkie rozszerzanie się samej przestrzeni. Na podstawie obecnych odległości i prędkości ucieczki gwiazd i galaktyk możemy określić ten moment w czasie, gdy cała materia skupiała się w jednym punkcie czasoprzestrzeni – na początku czasu.

Naukowcy często wyjaśniają model Wielkiego Wybuchu i ekspansję czasoprzestrzeni za pomocą prostego modelu pompowanego balonu (Rysunek 11.19). Czerwone kropki na jego powierzchni symbolizują gwiazdy i galaktyki, a powłoka balonu jest modelem czterowymiarowej czasoprzestrzeni (Teoria względności). W miarę pompowania balon się rozszerza i każda kropka widzi, jakby wszystkie pozostałe kropki oddalały się od niej. Taki prosty obrazek uzmysławia nam dwie ważne cechy ekspansji Wszechświata. Po pierwsze, jest ona widoczna dla wszystkich obserwatorów we Wszechświecie, niezależnie od ich położenia. Nie istnieje środek Wszechświata, czy też środek ekspansji, zatem żaden punkt we Wszechświecie, także planeta Ziemia, nie jest szczególnie uprzywilejowany (zobacz ten przykład – Ćwiczenie 11.24).



Rysunek 11.19 Prosta analogia rozszerzającego się Wszechświata do pompowanego balonu. W trakcie pompowania kropki oddalają się od siebie, tak jak dokonuje się ekspansja czasoprzestrzeni. Porównaj kształt balonu i położenia kropek przed napompowaniem (a) i po (b) napompowaniu.

Po drugie, jak już sygnalizowaliśmy, w wyniku Wielkiego Wybuchu rozszerza się przestrzeń, a nie tylko zwiększa się odległość między galaktykami w zwykłej (statycznej) przestrzeni trójwymiarowej. Efekt kosmologicznej ekspansji dotyka wszystkich obiektów i zjawisk we Wszechświecie: planet, gwiazd, pyłów międzygwiezdnych, nawet światła. W konsekwencji długość fali świetlnej (λ) emitowanej przez odległe galaktyki jest rozciągnięta. Zwiększona długość fali powoduje zmniejszenie jej energii, a więc widziane przez obserwatora światło wydaje się „bardziej czerwone”. Efekt ten nazywa się kosmologicznym **przesunięciem ku czerwieni** (ang. **redshift**). Przesunięcie ku czerwieni jest mierzalne tylko dla naprawdę odległych obiektów, znajdujących się co najmniej 50 milionów lat świetlnych od nas.

Przykład 11.8

Obliczanie prędkości i odległości galaktyk

Zaobserwowano, że wielkość przesunięcia ku czerwieni pewnej galaktyki wynosi

$$z = \frac{\lambda_{\text{obs}} - \lambda_{\text{emit}}}{\lambda_{\text{emit}}} = 4{,}5.$$

Oznacza to, że galaktyka porusza się z prędkością bliską prędkości światła. Wykorzystując relatywistyczny wzór na efekt Dopplera (podany w rozdziale Teoria względności), określmy:

a. Jaka jest prędkość ucieczki tej galaktyki?

b. Jaka jest odległość tej galaktyki od Ziemi?

Strategia rozwiązania

Musimy wykorzystać wzór na relatywistyczny efekt Dopplera w celu obliczenia prędkości na podstawie wielkości przesunięcia ku czerwieni, a następnie użyć prawa Hubble’a do obliczenia odległości od galaktyki.

Rozwiązanie

a. Relatywistyczny efekt Dopplera można opisać wzorem

$$z = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} - 1,$$

gdzie $\beta = v\,/\,c$. Po przekształceniu tego wzoru do postaci na β i podstawieniu za z otrzymujemy $\beta = 0{,}93$. Oznacza to, że prędkość ucieczki galaktyki wynosi $2{,}8 \cdot 10^8 \text{ m}\,/\,\text{s}$.

b. Jeśli znamy prędkość ucieczki galaktyki, to na podstawie prawa Hubble’a obliczamy jej odległość od Ziemi

$$d = \frac{v}{H_0} = \frac{2{,}8 \cdot 10^8 \text{ m}\,/\,\text{s}}{73{,}8 \cdot 10^3 \text{ m}\,/\,(\text{s}\,\text{Mpc})} = 3{,}8 \cdot 10^3 \text{ Mpc}\,.$$

Znaczenie

Odległe galaktyki wydają się bardzo szybko oddalać od Ziemi. Przesunięcie ku czerwieni światła docierającego do nas z takich galaktyk może posłużyć do obliczenia prędkości ucieczki, która osiąga nawet ponad $90\,\%$ wartości prędkości światła. Pamiętajmy, że nie jest to prędkość ruchu samej galaktyki względem Ziemi, ale prędkość rozszerzania się przestrzeni.

11.8 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Długość fali świetlnej docierającej z oddalającej się galaktyki jest przesunięta ku czerwieni. Co dzieje się z długością światła docierającego do nas ze zbliżającej się galaktyki?

Aby dowiedzieć się więcej o ekspansji Wszechświata, obejrzyj ten filmik (https://openstaxcollege.org/l/21expansion) .

Struktura i dynamika ekspansji Wszechświata

Uważa się, że w odpowiednio dużej skali Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Jest izotropowy, bo wygląda tak samo, gdy patrzymy w dowolnym kierunku. Jest też jednorodny, bo w każdym miejscu jest taki sam. Mówimy, że jednorodny i izotropowy Wszechświat jest gładki. Założenie o gładkości Wszechświata jest poparte licznymi obserwacjami, takimi jak prowadzone w ramach projektu **APM Galaxy Survey** w latach 80. i 90. XX wieku, podczas których w trakcie pomiarów fotometrii astronomicznej wykonano ok. 20 milionów zdjęć kosmosu z Ziemi (Rysunek 11.20); czy przez satelity COBE (1989–1993) oraz WMAP (2001–2010) wystrzelone w misjach kosmologicznych do pomiaru tzw. promieniowania reliktowego, o którym powiemy w następnym podrozdziale. Model budowy Wszechświata gładkiego (jednorodnego i izotropowego) teoretycy zakładali jednak dużo wcześniej, zanim pojawiły się wyniki dokładnych obserwacji potwierdzających tę hipotezę. Założenie o jednorodności i izotropowości Wszechświata nazywane jest w nauce **zasadą kosmologiczną** (ang. **cosmological principle**).



Rysunek 11.20 Dane zebrane w ramach projektu **Automated Plate Measurement** (APM) **Galaxy Survey**. Na zdjęciu widać ponad 2 miliony galaktyk znajdujących się w obszarze kąta 100° względem południowego bieguna Drogi Mlecznej.

Otwartą kwestią pozostaje los i kierunek rozwoju rozszerzającego się gładkiego Wszechświata. W świetle ogólnej teorii względności stan Wszechświata charakteryzuje się za pomocą metryki czasoprzestrzeni o ogólnym równaniu

$$ds^2 = c^2 \, dt^2 - a(t)^2 \, d\Sigma^2, \tag{11.13}$$

gdzie c to prędkość światła, a to czynnik skali (jest funkcją czasu), natomiast $d\Sigma$ to element długości w trójwymiarowej przestrzeni. W układzie współrzędnych sferycznych (r, θ, ϕ) element długości możemy wyrazić jako

$$d\Sigma^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 \left[d\theta^2 + (\sin\theta)^2 \, d\phi^2 \right], \tag{11.14}$$

gdzie k jest stałą o wymiarze odwrotności pola powierzchni, definiującą krzywiznę przestrzeni. Stała k niesie informację na temat rodzaju krzywizny Wszechświata:

- $k = 0$ (Wszechświat płaski, krzywizna typu płaszczyzny),
- $k > 0$ (Wszechświat zamknięty, krzywizna typu sfery),
- $k < 0$ (Wszechświat otwarty, krzywizna typu hiperboli).

Z kolei czynnik skalowania a określa dynamikę ekspansji:

- $a = 1$ (Wszechświat statyczny),
- $da / dt > 0$ (Wszechświat rozszerzający się),
- $da / dt < 0$ (Wszechświat kurczący się).

Zarówno czynnik skali a, jak i krzywiznę k wyznacza się na podstawie równań ogólnej teorii względności Einsteina. Jeśli założymy model Wszechświata jako gazu galaktyk wypełniających czasoprzestrzeń, o gęstości ρ i ciśnieniu p, oraz przyjmiemy dla uproszczenia $k = 0$ (płaski Wszechświat), to czynnik skali a określimy za pomocą równania różniczkowego

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = -\frac{4\pi G}{3} \cdot (\rho + 3p) \cdot a, \tag{11.15}$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Dla zwyczajnej, znanej nam materii przyjmujemy, że wartość $\rho + 3p$ jest dodatnia. Jeśli współczynnik skali jest także dodatni ($a > 0$), to z równania wynika, że jego zmiana w czasie maleje, a ekspansja Wszechświata hamuje w czasie (Wszechświat rozszerza się coraz wolniej). Jeśli przy $a > 0$ wyrażenie po prawej stronie jest ujemne (w jakiś sposób ciśnienie Wszechświata jest ujemne), to wartość czynnika skali przyspiesza w czasie i Wszechświat ekspanduje coraz szybciej. W świetle aktualnych badań kosmologicznych (np. na podstawie obserwacji supernowych) Wszechświat wydaje się stale rozszerzać, i to rozszerzać coraz szybciej. Uważa się, że wpływ na obecne tempo rozszerzania się ma gwałtowna ekspansja w bardzo wczesnym stadium rozwoju (ok. 300 000 lat po Wielkim Wybuchu). Nazywa się ją inflacją. Zagadką pozostaje przyczyna ujemnego ciśnienia materii. Uważa się, że wytwarza je nieznana nam forma materii i energii (o ciemnej materii i ciemnej energii wspomnimy w następnym podrozdziale). Równanie metryczne w zmiennych sferycznych, obowiązujące dla kulistych (sferycznych) rozkładów mas, podane powyżej, nazywa się metryką Friedmana-Lemaître'a-Robertsona-Walkera (FLRW) i jest jednym z najważniejszych równań kosmologii.

11.7 | Ewolucja wczesnego Wszechświata

Cel dydaktyczny

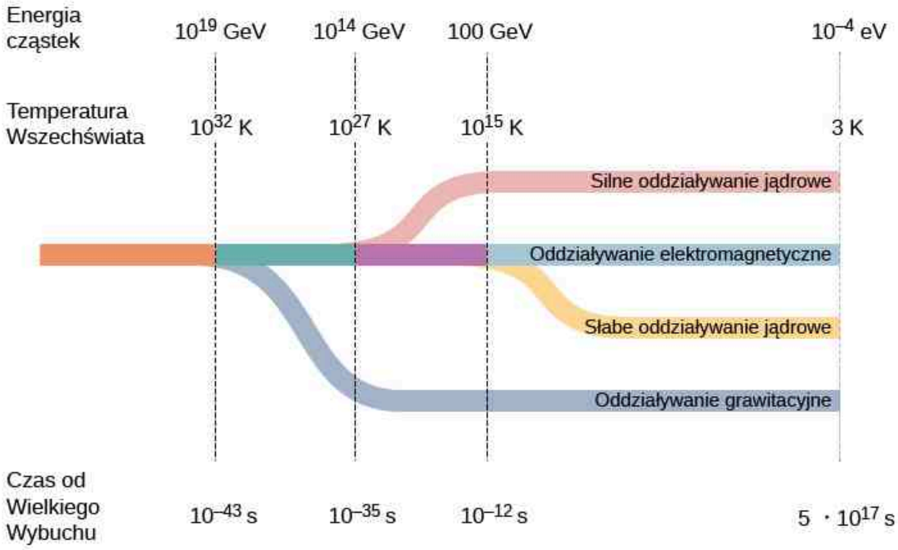
W tym podrozdziale nauczysz się:

- opisywać ewolucję wczesnego Wszechświata w kontekście czterech oddziaływań podstawowych;
- używać koncepcji soczewkowania grawitacyjnego do wyjaśniania różnych zjawisk astrofizycznych;
- uzasadniać Wielki Wybuch na podstawie istnienia mikrofalowego promieniowania tła;
- podawać różnice między ciemną materią a ciemną energią.

W poprzednim podrozdziale omawialiśmy strukturę i ewolucję Wszechświata. Powiedzieliśmy zwłaszcza, że Wszechświat wydaje się nieustannie rozszerzać, i to rozszerzać coraz szybciej (ekspansja Wszechświata przyspiesza). Teraz jednak zadamy sobie pytanie: Jak wyglądał Wszechświat na samym początku, tuż po powstaniu, i jak ewoluował? W tym podrozdziale przedstawimy aktualny stan wiedzy nt. wczesnego Wszechświata i jego ewolucji aż do dzisiejszej postaci.

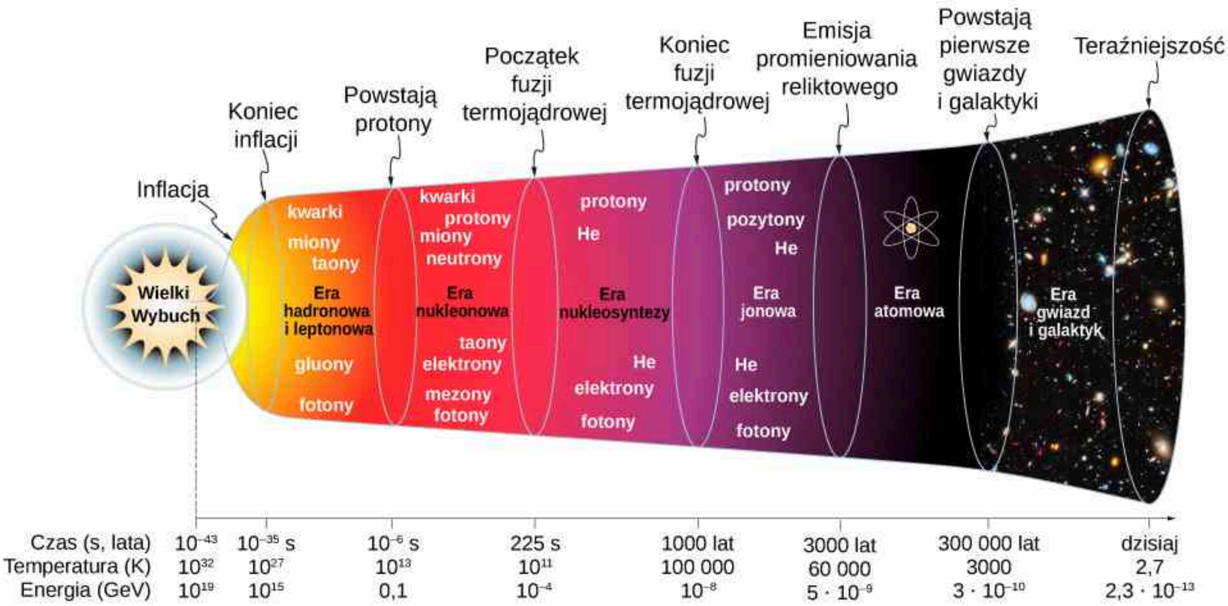
Wczesny Wszechświat

Kosmolodzy uważają, że cała materia, jaka powstała na skutek Wielkiego Wybuchu, była w początkowym okresie (przed okresem inflacji) ściśnięta do obszaru znacznie mniejszego od atomu. Uważają oni, że Wszechświat był ekstremalnie gęsty i gorący, a wszystkie oddziaływania między cząstkami zachodziły pod wpływem jednej siły. Innymi słowy, cztery oddziaływania podstawowe, jakie dziś znamy (elektromagnetyczne, jądrowe silne i słabe, a nawet grawitacyjne), były zunifikowane do jednego. Ta unifikacja istniała przez bardzo krótki czas, zwany czasem Plancka (Rysunek 11.21). W jaki sposób i dlaczego ta jedność oddziaływań rozpadła się na dalszych etapach ewolucji Wszechświata, jest wciąż nierozwiązaną zagadką fizyki.



Rysunek 11.21 Separacja czterech oddziaływań podstawowych we wczesnym Wszechświecie. Czas 10^{-43} s nazywamy czasem Plancka.

Modele naukowe wczesnego Wszechświata są wciąż bardzo spekulatywne i nie ma jednej powszechnie akceptowanej teorii. Na Rysunku 11.22 przedstawiamy jeden z możliwych i najbardziej prawdopodobnych scenariuszy zdarzeń od Wielkiego Wybuchu.



Rysunek 11.22 Przybliżony schemat ewolucji Wszechświata od Wielkiego Wybuchu do dzisiaj.

1. Wielki Wybuch ($t < 10^{-43}$ s): Załamują się wszystkie obowiązujące dzisiaj prawa fizyki. Tuż po Wielkim Wybuchu temperatura Wszechświata jest mniej więcej równa: $T = 10^{32}$ K.
2. Faza inflacji kosmologicznej ($t = 10^{-43}$ s do $t = 10^{-35}$ s): Wszechświat rozszerza się eksponencjalnie, grawitacja oddziela się od pozostałych oddziaływań. Wszechświat ochładza się do temperatury: $T = 10^{27}$ K.
3. Era hadronowa i leptonowa ($t = 10^{-35}$ s do $t = 10^{-6}$ s): Gdy Wszechświat kontynuuje ekspansję, oddziaływanie silne oddziela się od elektrosłabego – powstają hadrony, a następnie oddziaływanie elektrosłabe rozpada się na oddziaływanie słabe i oddziaływanie elektromagnetyczne – powstają leptony. Wszechświat jest gorącą zupą kwarków, leptonów, fotonów i innych cząstek, bez żadnej struktury.
4. Era nukleonowa ($t = 10^{-6}$ s do $t = 225$ s): Wszechświat składa się już z leptonów i hadronów (takich jak protony, neutrony i mezony), które pozostają w równowadze termicznej. Produkcja i anihilacja par cząstka-antycząstka zachodzą jednakowo łatwo, zatem także i fotony są w równowadze termicznej

$$\gamma + \gamma \leftrightarrow e^- + e^+$$
$$\gamma + \gamma \leftrightarrow p + \overline{p}$$
$$\gamma + \gamma \leftrightarrow n + \overline{n}.$$

Liczby protonów i neutronów są praktycznie równe ze względu na reakcje z udziałem neutrin

$$\nu_e + n \leftrightarrow e^- + p$$
$$\overline{\nu}_e + p \leftrightarrow e^+ + n.$$

Temperatura spada w dalszym ciągu i przy wartości 10^{11} K jest o wiele za niska, by dalsza produkcja par nukleon–antynukleon była możliwa. Liczba protonów i neutronów zaczyna przeważać nad liczbą ich antycząstek, więc reakcje anihilacji proton–antyproton ($p\overline{p}$) oraz neutron–antyneutron ($n\overline{n}$) ustają. Zaczynają powstawać pary proton–neutron związane w jądrach deuteru (deuterony).

5. Era nukleosyntezy ($t = 225\,\mathrm{s}$ do $t = 1000\,\mathrm{lat}$): W miarę dalszej ekspansji Wszechświata deuterony oddziałują z protonami i neutronami, co prowadzi do tworzenia się większych jąder. Proces się powtarza i powstają coraz cięższe jądra. Pod koniec tej ery ok. $1/4$ całej masy Wszechświata stanowiły jądra helu. (To tłumaczy, dlaczego w dzisiejszym Wszechświecie helu jest wciąż tak dużo). Energia fotonów zaczyna być niewystarczająca do produkcji par elektron–pozyton, więc elektrony i pozytony zaczynają ulegać anihilacji na wielką skalę i Wszechświat wypełnia morze fotonów.
6. Era jonowa ($t = 1000\,\mathrm{lat}$ do $t = 3000\,\mathrm{lat}$): Temperatura jest tak niska, że jonizacja powstałych atomów nie zachodzi. Wszechświat wypełniają elektrony, pozytony, protony, jądra lekkich atomów i fotony.
7. Era atomowa ($t = 3000\,\mathrm{lat}$ do $t = 300\,000\,\mathrm{lat}$): Wszechświat schładza się poniżej 10^5 K, powstają atomy. Fotony nie oddziałują już z obojętnymi i stabilnymi atomami, więc oddzielają się od materii atomowej. Uwolnione fotony propagują się we Wszechświecie w postaci **mikrofalowego promieniowania tła** (ang. **cosmic microwave background radiation, CMBR**), które omówimy później.
8. Era gwiazd i galaktyk ($t = 300\,000\,\mathrm{lat}$ do dzisiaj): Atomy i cząsteczki są przyciągane przez siły grawitacji i tworzą duże skupiska (obłoki pyłu, planety itd.). Atomy i cząsteczki wewnątrz gwiazd ulegają reakcjom syntezy jądrowej.

Obejrzyj ten filmik (https://openstaxcollege.org/l/21bigbang) , aby dowiedzieć się więcej o Wielkim Wybuchu.

Żeby w sposób ilościowy opisać cechy fizyczne wczesnego Wszechświata, przywołajmy znany związek energii termicznej (E) układu cząstek oddziałujących w temperaturze (T) równowagi cieplnej tego układu

$$E = k_B T, \tag{11.16}$$

gdzie k_B jest stałą Boltzmanna. W ekstremalnie gorącym Wszechświecie w początkowym stadium jego rozwoju energie termiczne były niewyobrażalnie wysokie.

Przykład 11.9

Obliczanie energii Wielkiego Wybuchu

Jaką energię termiczną miały cząstki zaraz po Wielkim Wybuchu?

Strategia rozwiązania

Energia termiczna pojedynczej cząstki wchodzącej w skład układu oddziałujących cząstek zależy tylko od temperatury równowagowej tego układu (Równanie 11.1). Przybliżoną temperaturę Wszechświata tuż po Wielkim Wybuchu odczytamy z wcześniejszego diagramu czasowego.

Rozwiązanie

Kosmolodzy przypuszczają, że temperatura tuż po Wielkim Wybuchu wynosiła $T = 10^{32}\ \text{K}$. W takim razie energia termiczna cząstek wynosiła

$$k_\text{B} T \approx 10^{-4}\ \text{eV / K} \cdot 10^{32}\ \text{K} = 10^{28}\ \text{eV} = 10^{19}\ \text{GeV}.$$

Znaczenie

Energia, jaka panowała we wczesnym Wszechświecie, jest o wiele rzędów wielkości większa niż obecnie możliwa do uzyskania przez człowieka w największych akceleratorach. Pozwalają one osiągnąć energie wiązek rzędu najwyżej $10^4\ \text{GeV}$.

11.9 **Sprawdź, czy rozumiesz.** Porównaj abundancję (zawartość procentową) helu dzisiaj i 10 000 lat po Wielkim Wybuchu.

Nukleony powstają przy energiach rzędu energii spoczynkowej protonu, czyli ok. $1000\ \text{MeV}$. Takim energiom odpowiada temperatura

$$T = \frac{1000\ \text{MeV}}{8{,}62 \cdot 10^{11}\ \text{MeV / K}} = 1{,}2 \cdot 10^{13}\ \text{K}.$$

Temperatury tego rzędu lub wyższe panowały w pierwszej sekundzie po Wielkim Wybuchu. Podobne oszacowanie możemy wykonać dla formowania atomów. Powstają one przy energii rzędu energii jonizacji atomu wodoru w stanie podstawowym ($13{,}6\ \text{eV}$). Temperatura efektywna przy tej energii wynosi

$$T = \frac{13\ \text{eV}}{8{,}62 \cdot 10^{5}\ \text{eV / K}} = 1{,}6 \cdot 10^{5}\ \text{K}.$$

Tworzenie się atomów zachodziło więc długo po oddzieleniu się czterech oddziaływań podstawowych, łącznie z oddziaływaniem wiążącym protony i neutrony w jądra atomowe (oddziaływanie silne) i oddziaływaniem wiążącym elektrony z jądrami atomowymi (oddziaływanie elektromagnetyczne).

Nukleosynteza lekkich pierwiastków

Względne abundancje lekkich pierwiastków (wodoru, helu, litu i berylu) we Wszechświecie niosą wiele informacji o jego wczesnym okresie. Wyniki pomiarów wskazują, że większość helu ma pochodzenie pierwotne (powstała w wyniku nukleosyntezy zaraz po Wielkim Wybuchu). Okazało się też, że aż $25\ \%$ całej materii we Wszechświecie stanowi hel, a tak wielka ilość nie mogła powstać tylko w wyniku reakcji termojądrowych w gwiazdach.

Jakie pierwiastki powstały tuż po Wielkim Wybuchu? Na pewnym etapie temperatura panująca we Wszechświecie osiągnęła wartość sprzyjającą tworzeniu się jąder atomowych (wiązania nukleonów w jądra atomowe) – ten etap nazywamy **pierwotną nukleosyntezą** (ang. **nucleosynthesis**). Podobne zjawiska zachodzą obecnie we wnętrzach gwiazd, także w naszym Słońcu. Pierwotna nukleosynteza zaczęła zachodzić w kilkaset sekund po Wielkim Wybuchu.

Jak wyglądał proces pierwotnej nukleosyntezy i jakie pierwiastki powstały w jego wyniku? Po pierwsze, protony i neutrony zaczęły się łączyć w deuterony ^2H, czyli jądra deuteru. Następnie deuterony wychwytywały dodatkowy neutron i tworzyły się trytony ^3H – jądra radioaktywnej odmiany wodoru nazywanej trytem. Deuterony wychwytywały także protony, w wyniku czego powstawały jądra izotopu helu-3, ^3He. Gdy jądra ^3H wyłapały proton albo jądra ^3He wychwyciły neutron, powstawały jądra helu o liczbie atomowej 4, ^4He. Na tym etapie nukleosyntezy pierwotnej stosunek protonów do neutronów wynosił ok. $7{:}1$. Procesy tworzenia jąder helu zużyły niemal wszystkie dostępne neutrony. Cały proces produkcji helu zajął tylko ok. 3 minut i niemal natychmiast cała materia we Wszechświecie została związana w jednej czwartej w jądra ^4He oraz częściowo w jądra ^2H, ^3H i ^3He. Powstały także bardzo niewielkie ilości jąder litu ^7Li i berylu ^7Be. W tym czasie ciągle spadała temperatura, aż jej wartość stała się tak niska, że nukleosynteza została przerwana. W obecnym kształcie Wszechświata abundancje lekkich pierwiastków ^2H, ^4He czy ^7Li, powstałych w wyniku pierwotnej nukleosyntezy, w znacznym stopniu zależą od lokalnej gęstości materii.

Wielkości abundancji przewidziane w modelu nukleosyntezy pierwotnej mogą stanowić świetny sprawdzian poprawności teorii Wielkiego Wybuchu i samej nukleosyntezy pierwotnej. Niedawno zakończony **eksperyment WMAP** (ang. **Wilkinson Microwave Anisotropy Probe**) przyniósł wyniki zgodne z przewidywaniami modelu. Zgodność danych eksperymentalnych z przewidywaniami teoretycznymi stanowi przekonujące potwierdzenie słuszności teorii Wielkiego Wybuchu.

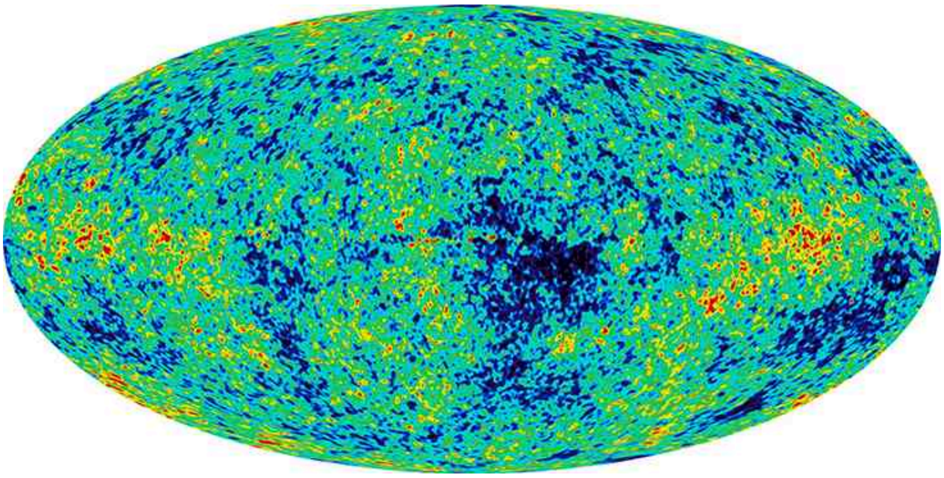
Mikrofalowe promieniowanie tła

Zgodnie z przewidywaniami modeli kosmologicznych Wielki Wybuch powinien pozostawić we Wszechświecie ślad w postaci **mikrofalowego promieniowania tła** (ang. **cosmic microwave background radiation, CMBR** lub po prostu CMB), które powstało na końcu ery atomowej. Promieniowanie tła nazywane jest także **promieniowaniem reliktowym**, jako że stanowi dowód zjawisk zachodzących we wczesnym Wszechświecie. Natężenie tego promieniowania powinno być poprawnie opisane krzywą zdolności emisyjnej ciała doskonale czarnego (Fotony i fale materii). Zależność długości fali w maksimum tego rozkładu od temperatury podaje prawo Wiena

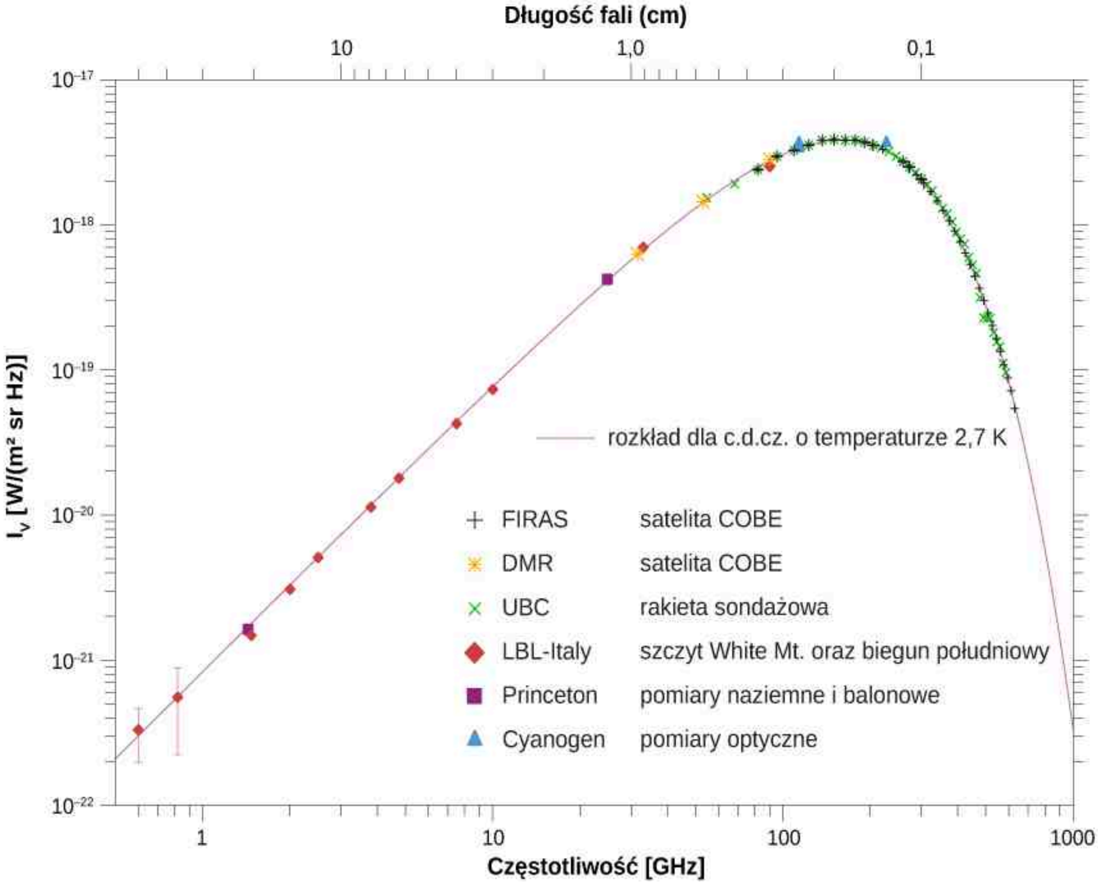
$$\lambda_{\text{max}} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\,\text{m}\,\text{K}}{T}, \tag{11.17}$$

gdzie T jest temperaturą mierzoną w kelwinach. Naukowcy spodziewali się, że postępująca ekspansja Wszechświata spowodowała rozciągnięcie światła (rozciągnięcie długości fali), więc temperatura tego promieniowania powinna być bardzo niska, a energia i długość fali powinny być duże.

W 1965 roku dwaj pracownicy amerykańskiego **Bell Laboratories: Arno Penzias (ur. 1933)** i **Robert Wilson (ur. 1941)**, podczas testowania nowego systemu komunikacji satelitarnej nie mogli pozbyć się szumów w zastosowanych antenach. Nie był to wynik niedoskonałości urządzeń elektronicznych, ale efekt rejestracji promieniowania o długości fali rzędu centymetrów (zakres długości fal typowy dla promieniowania mikrofalowego). Szum dochodził z każdego kierunku przestrzeni, także z wnętrza Ziemi. Później skojarzono go z mikrofalowym promieniowaniem tła. W 1978 roku Wilson i Penzias otrzymali za odkrycie promieniowania reliktowego Nagrodę Nobla. Natężenie mikrofalowego promieniowania tła, zarejestrowane przez satelitę WMAP, przedstawiono na Rysunku 11.23. Dopasowanie do danych krzywej rozkładu Plancka pozwoliło ustalić temperaturę tego promieniowania $T = 2{,}7\,\text{K}$ (Rysunek 11.24).



Rysunek 11.23 Mapa rozkładu natężenia mikrofalowego promieniowania tła zarejestrowanego przez satelitę WMAP. Różnymi kolorami zaznaczono fluktuacje (zmarszczki) w rozkładzie. Drogę Mleczną usunięto z mapy dla większej przejrzystości danych. Kolor czerwony odpowiada nieco wyższym od średniej temperaturom i gęstościom promieniowania, a niebieski oznacza temperatury i gęstości nieco niższe od średniej. Fluktuacje widoczne na mapie nie przeczą zasadzie kosmologicznej mówiącej o jednorodności Wszechświata – największe odstępstwa od średniej (zaznaczone kolorem czerwonym) stanowią jedynie 1 przypadek na milion i są spowodowane niedostatecznie wysoką rozdzielczością pomiaru.



Rysunek 11.24 Rozkład natężenia mikrofalowego promieniowania tła w funkcji częstotliwości i długości fali. Przewidywania modelu (zaznaczone ciągłą linią) zgadzają się doskonale z wynikami pomiarowymi (naniesione punkty). Dane przedstawione w skali logarytmicznej. Źródło: George Smoot/NASA COBE Project

Związanie cząstek w atomy na początku ewolucji Wszechświata sprawiło, że materia mniej chętnie zaczęła oddziaływać ze światłem. Dlatego też fotony, które dziś obserwujemy w promieniowaniu tła, musiały się oddzielić od materii przy temperaturze T odpowiadającej energii ok. $1\,\text{eV}$ (jest to w przybliżeniu energia jonizacji atomu). Tej energii odpowiada temperatura

$$k_B T \sim 1\,\text{eV} \Rightarrow T = \frac{1\,\text{eV}}{8{,}617 \cdot 10^5\,\text{eV} / \text{K}} \sim 10^4\,\text{K}.$$

Według obecnych modeli kosmologicznych, ostatni moment, gdy fotony jeszcze rozpraszały się na cząstkach naładowanych, nastąpił ok. $380\,000\,\text{lat}$ po Wielkim Wybuchu. Wcześniej cała materia we Wszechświecie miała formę plazmy, a fotony były w niej uwięzione.

Materia i antymateria

Z bezpośrednich obserwacji wiemy, że antymaterii jest w dzisiejszym Wszechświecie bardzo mało. Ziemia i nasz Układ Słoneczny składają się niemal wyłącznie z materii, podobnie cały obserwowany Wszechświat wydaje się zdominowany przez materię. Dowodem na to jest fakt, że nie obserwujemy efektów anihilacji cząstek i antycząstek docierających do nas z kosmosu, np. nie widzimy wyraźnie silniejszego sygnału fotonów γ o energii $0{,}511\,\text{MeV}$, pochodzących z anihilacji elektronów i pozytonów. Naturalna produkcja antymaterii w kosmosie zachodzi jedynie na drodze zderzeń cząstek i rozpadów promieniotwórczych β^+, ale prowadzi to do powstania tylko niewielkich ilości antycząstek, które w dodatku szybko ulegają anihilacji, pozostawiając przy życiu jedynie czystą energię.

Pomimo tak przytłaczającej dominacji materii nad antymaterią we Wszechświecie model standardowy cząstek elementarnych i wszystkie pomiary eksperymentalne pokazują jedynie drobną preferencję w produkcji materii. Różnice w oddziaływaniu cząstek materii i antymaterii ze sobą i między sobą są bardzo nieznaczne. Przykładowo w procesie rozpadu obojętnego kaonu powstaje tylko odrobinę więcej materii niż antymaterii. Być może na drodze tego typu reakcji została zaburzona równowaga między materią a antymaterią we wczesnym Wszechświecie. Cała anty-

materia ulegała anihilacji z materią, a jedynie jej nadmiar przetrwał, by uformować gwiazdy i galaktyki. W tym sensie niezliczona mnogość gwiazd we Wszechświecie może być jedynie pozostałością po pierwotnej materii wytworzonej w wyniku Wielkiego Wybuchu. Nie znamy satysfakcjonującej odpowiedzi na pytanie, dlaczego materia dominuje nad antymaterią w dzisiejszym Wszechświecie.

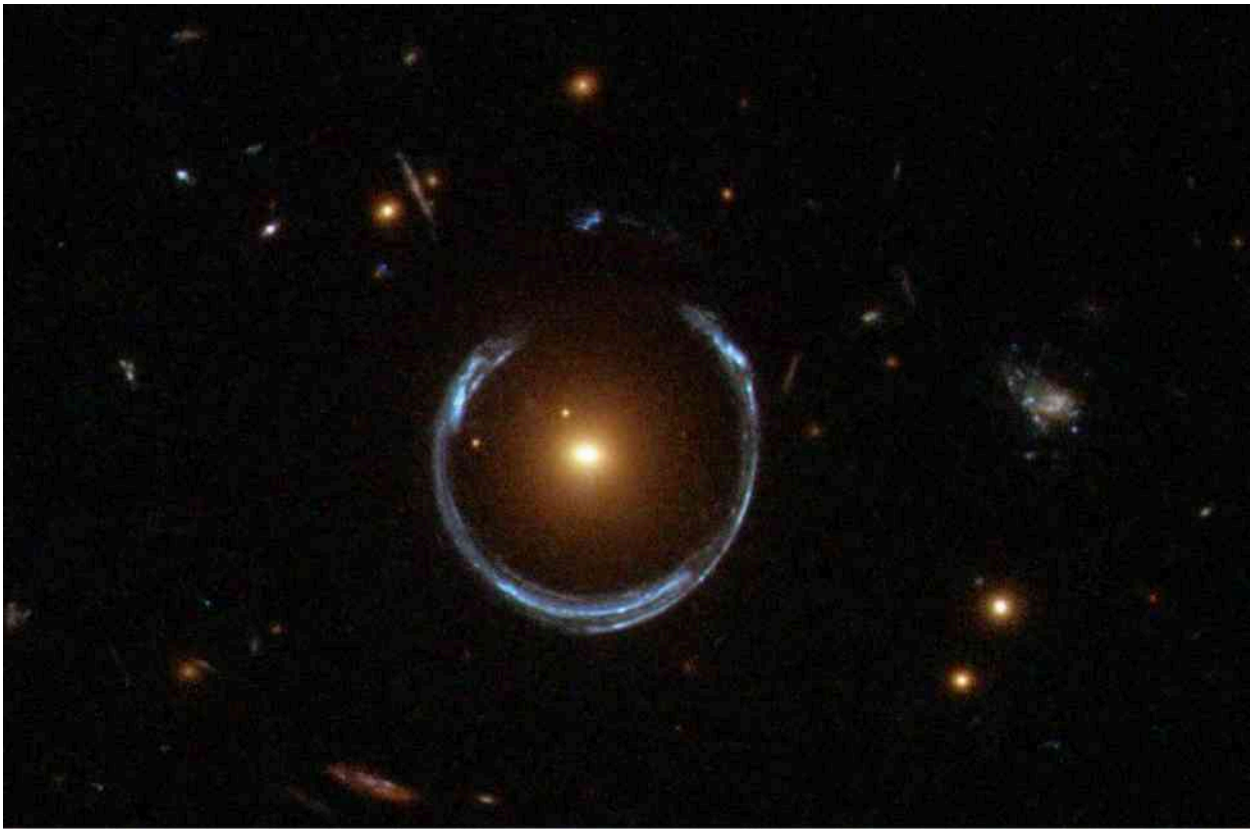
Ciemna materia i ciemna energia

W ciągu ostatnich trzech dekad dzięki nowoczesnym i potężnym technikom badawczym odkryto, że Wszechświat wypełnia **ciemna materia** (ang. **dark matter**). Ten typ materii jest szczególnie interesujący i ważny, bo obecnie naukowcy zupełnie nie wiedzą, co to może być! Niewątpliwie jednak istnieje, bo jej obecność powoduje ugięcie światła docierającego do nas z odległych gwiazd. Jeżeli światło z odległej gwiazdy lub całej galaktyki ulega zagięciu w polu grawitacyjnym pewnego skupiska materii (także ciemnej), które znajduje się na linii pomiędzy nami a gwiazdą, to może powstać obraz tej samej gwiazdy lub galaktyki w dwóch różnych miejscach (Rysunek 11.25). Zakrzywienie światła w polu grawitacyjnym masywnego obiektu w przestrzeni kosmicznej nazywamy **soczewkowaniem grawitacyjnym** (ang. **gravitational lensing**). W niektórych przypadkach światło dociera do nas po różnych torach wokół soczewki (np. dużej galaktyki) i wtedy obserwujemy jasny krąg światła od obserwowanego obiektu (Rysunek 11.26).

O ciemnej materii wiemy aktualnie tylko tyle, że jest zimna (ma niską temperaturę, a więc nie świeci – dlatego jest ciemna), wolno się porusza w przestrzeni kosmicznej i słabo oddziałuje ze znaną nam materią. Potencjalnymi kandydatami na ciemną materię są hipotetyczne cząstki zwane neutralinami (partnerzy bozonów Z, fotonów i bozonów Higgsa w teorii supersymetrii) albo wirujące po malutkich pierścieniach cząstki przenikające do nas z wielowymiarowej przestrzeni, przewidywane w teoriach strun.



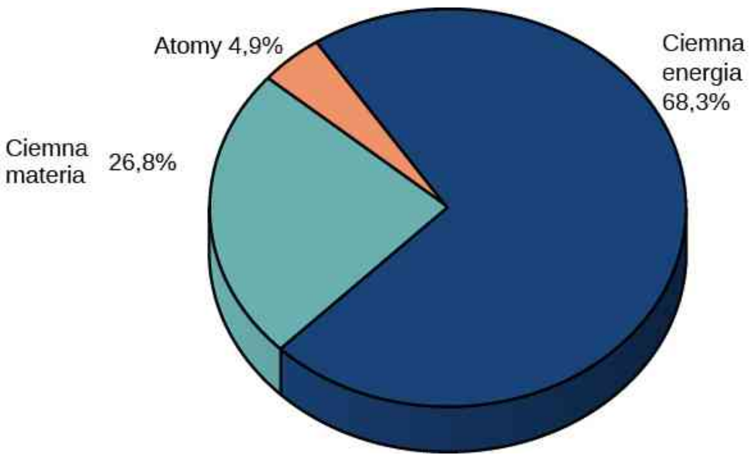
Rysunek 11.25 Koncepcja soczewkowania grawitacyjnego: światło biegnące z odległej gwiazdy ulega zakrzywieniu wokół masywnego obiektu, np. galaktyki. Przy zaistnieniu korzystnych warunków dwa obrazy tej samej gwiazdy można zaobserwować po dwóch stronach soczewki.



Rysunek 11.26 Zdjęcie autentycznego soczewkowania grawitacyjnego. Światło pochodzące z odległej gwiazdy ulega zakrzywieniu wokół galaktyki. W pewnych warunkach widzimy pierścień światła wokół galaktyki zamiast punktowego źródła. Źródło: ESA/Hubble & NASA

Coraz większa precyzja pomiarów astronomicznych doprowadziła do odkrycia nowej formy energii, zwanej **ciemną energią** (ang. **dark energy**). Dzięki niej udaje się wytłumaczyć większe niż oczekiwane wartości przesunięcia ku czerwieni bardzo odległych galaktyk. Bardzo duże wielkości **redshiftu** (czyli przesunięcia ku czerwieni) sugerują, że Wszechświat nie tylko się rozszerza, ale robi to coraz szybciej. O naturze i właściwościach ciemnej materii właściwie nic nie wiemy. Zarówno ciemna materia, jak i ciemna energia stanowią dwie bardzo interesujące i wciąż nierozwiązane zagadki współczesnej fizyki. Na podstawie obserwacji naukowcy szacują, że aż $68{,}3\,\%$ całkowitej energii we Wszechświecie stanowi ciemna energia, $26{,}8\,\%$ przypada na ciemną materię, a jedynie $4{,}9\,\%$ to energia związana ze znanymi nam cząstkami (tzw. materia świecąca, którą widzimy w bezpośrednich obserwacjach – Rysunek 11.27). Wziąwszy pod uwagę tajemniczy charakter ciemnej materii i ciemnej energii, skromne wyznanie Izaaka Newtona sprzed trzech stuleci wydaje się nader aktualne również dzisiaj:

„Nie wiem, jak wyglądam w oczach świata, lecz dla siebie jestem tylko chłopcem bawiącym się na morskim brzegu, pochylającym się i znajdującym piękniejszą muszelkę lub kamień gładszy niż inne, podczas gdy wielki ocean prawdy jest ciągle zakryty przede mną”.



Rysunek 11.27 Szacunkowy rozkład masy i energii we Wszechświecie. Źródło: NASA/WMAP Science Team

PODSUMOWANIE ROZDZIAŁU 11

KLUCZOWE POJĘCIA

akcelerator cząstek (ang. particle accelerator) urządzenie zaprojektowane do przyspieszania cząstek naładowanych; przyspieszanie odbywa się w polu elektrycznym, a do zakrzywiania toru cząstek używa się pola magnetycznego

antycząstka (ang. antiparticle) cząstka subatomowa o tych samych masie i czasie życia, co towarzysząca jej cząstka, ale o ładunku przeciwnego znaku

asymptotyczna swoboda (uwięzienie kwarków) (ang. quark confinement) cecha kwarków powodująca, że nie mogą one istnieć jako samodzielne cząstki, ale zawsze są związane wewnątrz hadronów

bariony (ang. baryons) cząstki złożone z trzech kwarków, są hadronami

bozon (ang. boson) cząstka o spinie całkowitym i parzystej (symetrycznej) funkcji falowej

bozony W i Z (ang. W and Z bosons) cząstki o stosunkowo dużych masach pośredniczące w wymianie oddziaływań słabych między leptonami a kwarkami

chromodynamika kwantowa (QCD) (ang. quantum chromodynamics) teoria oddziaływań silnych między kwarkami

ciemna energia (ang. dark energy) forma energii, której przypisuje się odpowiedzialność za przyspieszanie ekspansji Wszechświata

ciemna materia (ang. dark matter) rodzaj nieznanej materii w kosmosie, która nie oddziałuje ze znanymi nam cząstkami materii; zakrzywienie toru światła docierającego z odległych gwiazd (efekt soczewkowania grawitacyjnego) jest dowodem na jej istnienie

cząstka wirtualna (ang. virtual particle) cząstka, której czas życia jest zbyt krótki, aby możliwa była jej bezpośrednia obserwacja

detektor cząstek (ang. particle detector) detektor zaprojektowany do precyzyjnego pomiaru produktów zderzeń zachodzących w akceleratorach; detektory cząstek są doskonale odizolowane od otoczenia i wielozadaniowe tak, aby rejestrować każdy rodzaj cząstek

diagram Feynmana (ang. Feynman diagrams) graficzny schemat przebiegu reakcji cząstek elementarnych, który na płaszczyźnie (t, x) opisuje kierunek ruchu cząstek i typ oddziaływania między nimi

dziwność (ang. strangeness) właściwość cząstek zawierających kwark dziwny s

elektrodynamika kwantowa (QED) (ang. quantum electrodynamics) teoria oddziaływania ładunków elektrycznych (elektronów) z fotonami

fermion (ang. fermion) cząstka o spinie niecałkowitym (połówkowym) i nieparzystej (antysymetrycznej) funkcji falowej

gluon (ang. gluon) cząstka przenosząca oddziaływanie silne między kwarkami wewnątrz jąder atomowych

hadron (ang. hadron) cząstka zbudowana z kwarków (mezon lub barion)

kolor (ang. color) właściwość cząstek elementarnych, która w oddziaływaniach silnych odgrywa taką samą rolę jak ładunek elektryczny w oddziaływaniach elektromagnetycznych

kosmologia (ang. cosmology) nauka zajmująca się badaniem początku, ewolucji i przyszłości Wszechświata

kwark (ang. quark) fermion, który oddziałuje elektrosłabo i silnie

lepton (ang. lepton) fermion, który oddziałuje elektrosłabo

liczba barionowa (ang. baryon number) liczba barionowa ma wartość $B = +1$ dla wszystkich barionów (cząstek zawierających kwarki), a wartość $B = -1$ dla antybarionów oraz $B = 0$ dla wszystkich innych cząstek, musi być zachowana w procesach zderzeń i rozpadów cząstek

liczba leptonowa (ang. lepton numbers) elektronowa liczba leptonowa L_e, mionowa liczba leptonowa L_μ oraz taonowa liczba leptonowa L_τ muszą być zachowane we wszystkich procesach zachodzących dla cząstek elementarnych

mezon (ang. meson) cząstka zbudowana z dwóch kwarków

mikrofalowe promieniowanie tła (promieniowanie reliktowe) (ang. cosmic microwave background radiation, CMBR) promieniowanie cieplne powstałe we wczesnym Wszechświecie, jest świadectwem Wielkiego Wybuchu

model standardowy (ang. Standard Model) model oddziaływania cząstek elementarnych obejmujący teorię oddziaływań elektrosłabych i chromodynamikę kwantową

oddziaływanie elektrosłabe (ang. electroweak force) unifikacja oddziaływań elektromagnetycznych i słabych oddziaływań jądrowych

oddziaływanie podstawowe (ang. fundamental forces) jedno z czterech niezależnych oddziaływań między cząstkami materii: silne i słabe oddziaływanie jądrowe, oddziaływanie elektromagnetyczne i grawitacyjne

pierwotna nukleosynteza (ang. nucleosynthesis) proces powstawania cięższych jąder atomowych tuż po Wielkim Wybuchu

pozyton (ang. positron) antycząstka elektronu (antyelektron)

prawo Hubble'a (ang. Hubble's law) liniowy związek między prędkością ucieczki a odległością galaktyki

promieniowanie synchrotronowe (ang. synchrotron radiation) promieniowanie o wysokiej energii uzyskiwane w synchrotronach dzięki ruchowi naładowanych cząstek po zakrzywionych torach

przesunięcie ku czerwieni (ang. redshift) powiększenie długości fali świetlnej (poczerwienienie światła) spowodowane kosmologiczną ekspansją Wszechświata

silne oddziaływanie jądrowe (ang. strong nuclear force) oddziaływanie przyciągające o dużej sile, ale na bardzo niewielkich odległościach (rzędu 10^{-15} m), odpowiedzialne za wiązanie kwarków ze sobą oraz protonów i neutronów w jądrze atomowym

stała Hubble'a (ang. Hubble's constant) współczynnik zależności liniowej między prędkością ucieczki a odległością w prawie Hubble'a

symetria funkcji falowej (ang. exchange symmetry) właściwość układu cząstek nierozróżnialnych (identycznych) polegająca na niemożliwości obserwacji zamiany cząstek między sobą

synchrotron (ang. synchrotron) akcelerator kołowy, w którym wykorzystuje się naprzemienne pole elektryczne i pole magnetyczne o rosnącej indukcji w celu przyspieszenia cząstek po torze kołowym do coraz większych energii

słabe oddziaływanie jądrowe (ang. weak nuclear force) stosunkowo słabe oddziaływanie (rzędu 10^{-6} w stosunku do oddziaływań silnych) odpowiedzialne za rozpady cząstek elementarnych i procesy z udziałem neutrin

teoria wszystkiego (ang. theory of everything) teoria oddziaływań cząstek elementarnych unifikująca wszystkie cztery oddziaływania podstawowe

wielka teoria unifikacji (GUT) (ang. grand unified theory) teoria oddziaływań unifikująca oddziaływania elektrosłabe i silne oddziaływania jądrowe

Wielki Wybuch (ang. Big Bang) moment rozpoczęcia szybkiej ekspansji czasoprzestrzeni, który oznacza początek Wszechświata

NAJWAŻNIEJSZE WZORY

Pęd cząstki w polu magnetycznym (np. w cyklotronie)	$p = 0{,}3Br$
Energia w układzie środka masy cząstek w eksperymencie zderzeniowym	$W^2 = 2E_1E_2 + 2 \cdot p_1c \cdot p_2c + \left(m_1c^2\right)^2 + \left(m_2c^2\right)^2$
Przybliżony czas zajścia wymiany bozonu wirtualnego między oddziałującymi cząstkami	$\Delta t = \frac{\hbar}{E}$
Prawo Hubble'a	$v = H_0d$
Kosmologiczna metryka czasoprzestrzeni	$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - a(t)^2\,\mathrm{d}\Sigma^2$

PODSUMOWANIE

11.1 Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

- Cztery oddziaływania podstawowe ułożone od najsilniejszego to: silne oddziaływanie jądrowe, oddziaływanie elektromagnetyczne, słabe oddziaływanie jądrowe i oddziaływanie grawitacyjne. Kwarki oddziałują silnie, ale leptony już nie. I kwarki, i leptony oddziałują elektromagnetycznie, grawitacyjnie i słabo.
- Cząstki elementarne dzielimy na fermiony i bozony. Fermiony mają spin połówkowy i podlegają zakazowi Pauliego. Bozony mają spin całkowity i nie podlegają zasadzie wykluczania. Bozony są nośnikami oddziaływań między cząstkami.
- Kwarki i leptony to dwie rodziny cząstek, składające się z sześciu reprezentantów każda, podzielonych na dwie grupy. Członkowie odpowiednich grup mają szereg wspólnych cech (np. ładunek elektryczny, spin, typ oddziaływania), ale różnią się masą.
- Wszystkie cząstki mają swoje antycząstki, które posiadają te same cechy, ale niosą ładunek przeciwnego znaku.

11.2 Zasady zachowania w fizyce cząstek elementarnych

- Oddziaływania między cząstkami elementarnymi podlegają zasadom zachowania liczb (barionowej, leptonowych i dziwności), określającym, jakie reakcje lub rozpady są możliwe, a jakie zabronione.
- Zasada zachowania liczby barionowej i zasady zachowania trzech liczb leptonowych muszą być spełnione we wszystkich procesach fizycznych. Zachowanie dziwności dotyczy jedynie oddziaływań silnych i elektromagnetycznych. Dziwność nie jest zachowana w oddziaływaniach słabych.

11.3 Kwarki

- W przyrodzie występuje sześć kwarków: górny (u), dolny (d), powabny (c), dziwny (s), wysoki (t) oraz niski (b). Cząstki te są fermionami o spinie połówkowym i ułamkowym ładunku elektrycznym.
- Bariony składają się z trzech kwarków, a mezony z pary kwark–antykwark. Ze względu na oddziaływanie silne, które ma cechę tzw. asymptotycznej swobody, kwarki nie mogą występować jako samodzielne cząstki. Mówimy, że są one uwięzione wewnątrz hadronów.
- Potwierdzenie istnienia kwarków przyniosły eksperymenty z rozpraszaniem na protonach.

11.4 Akceleratory i detektory cząstek

- Do badania cząstek elementarnych i ich wzajemnych oddziaływań służy wiele różnych typów akceleratorów, takich jak liniaki, cyklotrony, synchrotrony i zderzacze.
- Akceleratory zderzeniowe służą do produkcji masywnych cząstek, które szybko rozpadają się na kaskady lżejszych.
- Wielkie detektory cząstek elementarnych służą do dokładnego pomiaru wszystkich aspektów zderzeń wysokoenergetycznych cząstek i fotonów, takich jak tor, pęd i energia. Detektory zbudowane są z wielu segmentów odpowiedzialnych za pomiar danego typu cząstek.
- Cząstki naładowane mierzymy w obszarze pola magnetycznego. Dzięki temu na podstawie ich zakrzywionych torów lotu możemy odtworzyć wektor pędu.
- Do pomiaru energii (i masy) cząstek służą kalorymetry; cząstki są całkowicie absorbowane w materiale kalorymetru.

11.5 Model standardowy

- Model standardowy stanowi opis oddziaływań między cząstkami na drodze silnego oddziaływania jądrowego, oddziaływania elektromagnetycznego i słabego oddziaływania jądrowego.
- Procesy rozpraszania i rozpadów cząstek możemy przedstawiać przy użyciu diagramów Feynmana. Diagram ten przedstawia oddziaływanie między cząstkami na schematycznym wykresie czasu w funkcji położenia.
- Oddziaływanie elektromagnetyczne jest dalekozasięgowe, natomiast oddziaływanie słabe zachodzi tylko na niewielkich odległościach. Wszystkie oddziaływania przenoszone są za pomocą bozonów pośredniczących.
- Teorie unifikacji są próbą zrozumienia Wszechświata i wytłumaczenia wszystkich oddziaływań za pomocą tylko jednej siły.

11.6 Wielki Wybuch

- Wszechświat rozszerza się tak jak pompowany balon – każdy punkt oddala się od innych.
- Odległe galaktyki uciekają od nas z prędkościami proporcjonalnymi do odległości od Ziemi. Tempo ucieczki oblicza się na podstawie obserwacji jako równe $70\,\mathrm{km}\,/\,(\mathrm{s}\,\mathrm{Mpc})$. Im dalej znajduje się dana galaktyka, tym szybciej się od nas oddala. Najdalsze uciekają z prędkością bliską prędkości światła. Prędkości ucieczki mierzymy za pomocą obserwacji wielkości przesunięcia ku czerwieni (**redshift**), wynikającego z relatywistycznego efektu Dopplera.
- Według obecnych modeli kosmologicznych Wszechświat powstał w wyniku Wielkiego Wybuchu ok. 13,7 miliarda lat temu.
- Zgodnie z zasadą kosmologiczną Wszechświat jest jednorodny i izotropowy. Ponadto jego ekspansja ciągle przyspiesza.

11.7 Ewolucja wczesnego Wszechświata

- Wczesny Wszechświat był bardzo gorący i gęsty.
- Wszechświat jest izotropowy, jednorodny i stale się rozszerza.
- Mikrofalowe promieniowanie tła (promieniowanie reliktowe) to dowód na prawdziwość teorii Wielkiego Wybuchu.
- Ogromna większość energii i masy we Wszechświecie jest wciąż nierozpoznana.

PYTANIA

11.1 Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

1. Czym są oddziaływania podstawowe? Opisz je krótko.

2. Podaj różnice między fermionami i bozonami, używając pojęć nierozróżnialności cząstek i symetrii funkcji falowej.

3. Wymień rodziny kwarków i leptonów.

4. Podaj różnice między cząstkami a antycząstkami. Opisz występujące między nimi reakcje.

11.2 Zasady zachowania w fizyce cząstek elementarnych

5. Wymień sześć zasad zachowania w fizyce cząstek elementarnych. Krótko je opisz.

6. Jak określamy, czy dany proces lub rozpad cząstek może zajść?

7. W jakim sensie obserwacja eksperymentalna cząstki, która łamie znane zasady zachowania w fizyce, może być dobra dla naukowców?

11.3 Kwarki

8. Wymień sześć znanych kwarków i podsumuj ich właściwości.

9. Jaka jest ogólna budowa kwarkowa barionów, a jaka mezonów?

10. Jakie są dowody na występowanie kwarków?

11. Dlaczego bariony o tym samym składzie kwarkowym czasami różnią się masą?

11.4 Akceleratory i detektory cząstek

12. Opisz krótko i porównaj cztery typy przyspieszaczy cząstek: akcelerator Van de Graaffa, akcelerator liniowy, cyklotron i synchrotron.

13. Opisz podstawowe elementy typowego akceleratora zderzeniowego i ich funkcje.

14. Jakie detektory wchodzą w skład segmentów detekcyjnych w urządzeniu CMS? Opisz je krótko.

15. Jaką przewagę ma akcelerator zderzeniowy nad akceleratorem liniowym, w którym rozpędzone cząstki zderzają się na końcu z nieruchomą tarczą?

16. Elektron pojawia się w detektorze mionów w eksperymencie CMS. Jak to jest możliwe?

11.5 Model standardowy

17. Czym jest model standardowy cząstek elementarnych? Wyraź swoją odpowiedź przy użyciu pojęć czterech oddziaływań podstawowych.

18. Przedstaw na diagramie Feynmana proces anihilacji elektronu i pozytonu, w wyniku którego powstaje

foton.

19. Jakie są argumenty przemawiające za stworzeniem teorii unifikacji?

20. Gdyby powstała jedna teoria unifikująca wszystkie typy oddziaływań, to czy nadal sensowne i poprawne byłoby stwierdzenie, że ruch orbitalny Księżyca wokół Ziemi określa oddziaływanie grawitacyjne? Wyjaśnij odpowiedź.

21. Czy niedawno odkryty bozon Higgsa może być uważany za podstawowy nośnik oddziaływań słabych? Wyjaśnij swoją odpowiedź.

22. Jednym z najczęstszych kanałów rozpadu cząstki Λ^0 jest reakcja $\Lambda^0 \longrightarrow \pi^- + \mathrm{p}$. Mimo że w ten rozpad zaangażowane są tylko hadrony, to na pewno zachodzi on poprzez oddziaływanie słabe. Dlaczego możemy być pewni, że rozpad ten nie zachodzi pod wpływem oddziaływań silnych?

11.6 Wielki Wybuch

23. Co rozumiemy przez ekspansję Wszechświata? Uzasadnij swoją odpowiedź w oparciu o prawo Hubble'a i zjawisko kosmologicznego przesunięcia ku czerwieni.

24. Opisz model ekspansji przez analogię do pompowania balonu i uzasadnij, dlaczego tylko z pozoru wydaje się nam, że znajdujemy się w centrum Wszechświata?

25. Odległości do bliskich nam galaktyk określane są na podstawie pomiarów jasności gwiazd zmiennych, zwanych cefeidami, których jasności absolutne i odległości są znane. Wyjaśnij, jak mierzone jasności gwiazd mogą się zmieniać w czasie w stosunku do jasności absolutnych.

11.7 Ewolucja wczesnego Wszechświata

26. Co rozumiemy pod określeniem „model kosmologiczny wczesnego Wszechświata"? Opisz krótko najważniejsze założenia modelu w świetle czterech oddziaływań podstawowych.

27. Podaj dwa dowody na słuszność teorii Wielkiego Wybuchu.

28. W jakim sensie jesteśmy „tylko chłopcem bawiącym się na morskim brzegu", jak to ujął Newton? Oprzyj swoją argumentację na koncepcji ciemnej energii i ciemnej materii.

29. Gdyby dokonano odkrycia nieznanego dotąd efektu wpływającego na przesunięcie ku czerwieni – np. spowolnienia światła podróżującego w pustej przestrzeni – to jakie znaczenie dla kosmologii miałoby to odkrycie?

30. Jeden ze starszych modeli Wszechświata zakładał, że jest on nieskończenie wielki. Gdyby tak jednak było, to na linii wzroku wzdłuż każdego możliwego kierunku musielibyśmy trafić na jakąś gwiazdę, a nocne niebo byłoby bardzo jasne. Jak ten paradoks (znany jako paradoks Olbersa) można wytłumaczyć w świetle modeli współczesnej kosmologii?

ZADANIA

11.1 Wstęp do fizyki cząstek elementarnych

31. Jaka energia wyzwala się wskutek anihilacji spoczywającej pary elektron–pozyton? (Masy cząstek znajdziesz w Tabeli 11.1).

32. Jeżeli energia 10^{30} MeV uwalnia się w procesie anihilacji pewnej porcji materii i takiej samej ilości antymaterii, to ile wynoszą masy tych porcji?

33. Kiedy elektron i pozyton pozostają w spoczynku w niewielkiej odległości od siebie, mogą ulec anihilacji wg reakcji: $\mathrm{e}^- + \mathrm{e}^+ \longrightarrow \gamma + \gamma$. Jakie są energie, pędy i częstotliwości każdego z fotonów wytworzonych w reakcji?

34. Ile wynosi całkowita energia kinetyczna unoszona przez cząstki wytworzone w poniższych procesach rozpadu (cząstka ulegająca rozpadowi jest w spoczynku)?
a. $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$;
b. $K^0 \longrightarrow \pi^+ + \pi^-$;
c. $\Sigma^+ \longrightarrow n + \pi^+$;
d. $\Sigma^0 \longrightarrow \Lambda^0 + \gamma$.

11.2 Zasady zachowania w fizyce cząstek elementarnych

35. Który z poniższych rozpadów nie jest możliwy ze względu na niespełnienie zasady zachowania liczby leptonowej?
a. $\mathrm{n} \longrightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^-$;
b. $\mu^+ \longrightarrow \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$;
c. $\pi^+ \longrightarrow \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e} + \overline{\nu_\mu}$;
d. $\mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$;
e. $\pi^- \longrightarrow \mathrm{e}^- + \overline{\nu_\mathrm{e}}$;
f. $\mu^- \longrightarrow \mathrm{e}^- + \overline{\nu_\mathrm{e}} + \nu_\mu$;
g. $\Lambda^0 \longrightarrow \pi^- + \mathrm{p}$;
h. $K^+ \longrightarrow \mu^+ + \nu_\mu$.

36. Które z poniższych reakcji nie są możliwe ze względu na łamanie zasady zachowania dziwności?

a. $p + n \longrightarrow p + p + \pi^-$;
b. $p + n \longrightarrow p + p + K^-$;
c. $K^- + p \longrightarrow K^- + \Sigma^+$;
d. $\pi^- + p \longrightarrow K^+ + \Sigma^-$;
e. $K^- + p \longrightarrow \Xi^0 + K^+ + \pi^-$;
f. $K^- + p \longrightarrow \Xi^0 + \pi^- + \pi^-$;
g. $\pi^+ + p \longrightarrow \Sigma^+ + K^+$;
h. $\pi^- + n \longrightarrow K^- + \Lambda^0$.

37. Spróbuj napisać po jednym przykładowym (i poprawnym ze względu na zachowanie liczb) procesie rozpadu następujących antycząstek:
a. $\overline{n}$;
b. $\overline{\Lambda^0}$;
c. $\overline{\Omega^+}$;
d. $\overline{K^-}$;
e. $\overline{\Sigma}$.

38. Wszystkie poniższe reakcje zachodzące pod wpływem oddziaływań silnych są zabronione. Określ, które zasady zachowania są niespełnione w przypadku każdej z nich.
a. $p + \overline{p} \longrightarrow p + n + \overline{p}$;
b. $p + n \longrightarrow p + \overline{p} + n + \pi^+$;
c. $\pi^- + p \longrightarrow \Sigma^+ + K^-$;
d. $K^- + p \longrightarrow \Lambda^0 + n$.

11.3 Kwarki

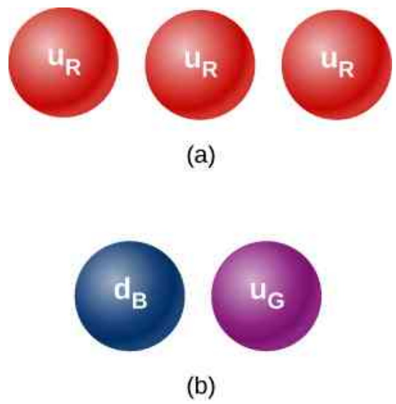
39. Na podstawie modelu kwarkowego budowy protonu wykaż, że ładunek protonu wynosi $+1$.

40. Na podstawie budowy kwarkowej neutronu pokaż, że jego ładunek wynosi 0.

41. Udowodnij, że właściwości wynikające z budowy kwarkowej kaonu dodatniego, podane w Tabeli 11.5, są zgodne ze znanymi dla tego mezonu cechami, jakimi są ładunek, spin i dziwność.

42. Mezony powstały z następujących kombinacji kwarków (indeks dolny oznacza kolor R, G, B, a AR oznacza kolor antyczerwony): $(d_R, \overline{d}_{AR})$, $(s_G, \overline{u}_{AG})$, $(s_R, \overline{s}_{AR})$.
a. Określ ładunek i dziwność każdej kombinacji;
b. Podaj przykład mezonów dla każdej z par kwark–antykwark zaproponowanych powyżej.

43. Dlaczego żadna z kombinacji kwarków poniżej nie może utworzyć hadronu?



44. Pewien wynik eksperymentalny potwierdza istnienie cząstki o ładunku $+2/3e$ – wyizolowanego kwarka. Jaki to może być kwark? Dlaczego to odkrycie mogłoby być ważne?

45. Wyraź rozpady β: $n \longrightarrow p + e^- + \overline{\nu}$ (rozpad beta minus) oraz $n \longrightarrow n + e^+ + \nu$ (rozpad beta plus) jako rozpady beta odpowiednich kwarków. Sprawdź, czy w rozpadach beta kwarków zachowane są ładunek, liczby leptonowe i liczba barionowa.

11.4 Akceleratory i detektory cząstek

46. Tor naładowanej cząstki jest zakrzywiany w magnesie wytwarzającym pole o indukcji $2\,\mathrm{T}$ do kształtu kołowego o promieniu $75\,\mathrm{cm}$. Ile wynosi pęd cząstki?

47. Wiązka protonów porusza się po okręgu o promieniu $50\,\mathrm{cm}$ w polu magnesu o indukcji $1{,}5\,\mathrm{T}$. Ile wynosi całkowita energia protonów?

48. Wyprowadź wzór $p = 0{,}3Br$ na podstawie wiedzy o przyspieszeniu dośrodkowym (Ruch w dwóch i trzech wymiarach (https://cnx.org/content/m63778/latest/)) i pędzie relatywistycznym (Teoria względności).

49. Załóż, że energia wiązki w symetrycznym zderzaczu elektronów i pozytonów wynosi $4{,}73\,\mathrm{GeV}$. Jaką energię W i masę spoczynkową M mają cząstki powstające wskutek anihilacji pozytonów i elektronów w zderzaczu? Jaki mezon można byłoby otrzymać?

50. Przy maksymalnej energii wiązki w synchrotronie **Tevatron** w Laboratorium im. Enrico Fermiego położonym niedaleko Chicago protony poruszają się z prędkością bliską prędkości światła, ponieważ ich energia jest ok. 1000 razy większa od energii spoczynkowej.
a. Ile czasu zajmuje protonom pełne okrążenie w synchrotronie, którego średnica wynosi $2\,\mathrm{km}$?
b. Ile razy w ciągu sekundy protony przelatują przez miejsce ustawienia detektora (czyli jaka jest częstotliwość protonów w Tevatronie)?

51. Przyjmij, że bozon W^- zarejestrowany w detektorze żyje przez $5 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{s}$. Jaką drogę pokona w detektorze, jeśli porusza się z prędkością $0{,}9c$? (Zauważ, że podany czas jest dłuższy niż tablicowy czas życia bozonu

W^-, co może być spowodowane statystycznym charakterem rozpadu albo być wynikiem dylatacji czasu).

52. Ślad o jakiej długości pozostawia w komorze pęcherzykowej mezon π^+ poruszający się z prędkością $0{,}1c$, jeśli od momentu powstania w komorze żyje przez $2{,}6 \cdot 10^{-8}$ s? (Piony szybsze lub żyjące dłużej mogą opuścić detektor, zanim się rozpadną i zostaną zarejestrowane).

53. Akcelerator SLAC o długości $3{,}2\,\mathrm{km}$ wytwarza wiązkę elektronów o energii $50\,\mathrm{GeV}$. Jeśli na całej długości tego akceleratora liniowego znajduje się $15\,000$ sekcji przyspieszających, to jakie średnie napięcie musi panować między sąsiednimi sekcjami, aby elektrony mogły uzyskać docelową energię?

11.5 Model standardowy

54. Korzystając z zasady nieoznaczoności Heisenberga, określ zasięg oddziaływań słabych zachodzących z wymianą bozonu Z.

55. Użyj zasady nieoznaczoności Heisenberga do oszacowania zasięgu oddziaływania, w którym pośredniczy grawiton.

56. a. W następującym rozpadzie uczestniczy oddziaływanie słabe: $\mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{n} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$. Narysuj diagram Feynmana dla tego rozpadu;
b. Następujące rozpraszanie leptonów zachodzi pod wpływem oddziaływania słabego: $\nu_\mathrm{e} + \mathrm{e}^- \longrightarrow \nu_\mathrm{e} + \mathrm{e}^-$. Narysuj diagram Feynmana dla tego procesu rozpraszania.

57. Założywszy zachowanie pędu, oblicz, jaka jest energia każdego fotonu γ wytworzonego w procesie rozpadu obojętnego pionu, który początkowo spoczywa. Reakcja tego rozpadu jest następująca: $\pi^0 \longrightarrow \gamma + \gamma$.

58. Jaką długość fali de Broglie'a ma wiązka elektronów o energii $50\,\mathrm{GeV}$ wytwarzanych w akceleratorze liniowym SLAC? Długość ta daje pojęcie o tym, z jaką dokładnością wiązka może penetrować materię i czy np. może powiedzieć nam coś nt. budowy kwarkowej.

59. Podstawowym kanałem rozpadu pionów naładowanych ujemnie jest reakcja $\pi^- \longrightarrow \mu^- + \overline{\nu}_\mu$.
a. Jaka energia uwalnia się w tym rozpadzie?
b. Na podstawie zasad zachowania pędu i energii oblicz, jaką energię unoszą wszystkie produkty rozpadu przy założeniu, że pion rozpada się w spoczynku. Możesz przyjąć, że antyneutrino mionowe jest bezmasowe i, podobnie jak foton, ma energię $p = E / c$.

60. Wyobraź sobie, że projektujesz eksperyment polegający na rozpadzie protonów. Jesteś w stanie zarejestrować $50\,\%$ wszystkich rozpadów protonu w prowizorycznym detektorze zbudowanym ze zbiornika wypełnionego wodą.
a. Ile kilogramów wody potrzeba, aby zarejestrować jeden rozpad w ciągu miesiąca, przy założeniu, że czas życia protonu równa się 10^{31} lat?
b. Ile to metrów sześciennych wody?
c. Jeżeli jednak czas życia protonu wynosi 10^{33} lat, to jak długo musiałbyś czekać na zarejestrowanie pojedynczego rozpadu, dysponując twoim detektorem?

11.6 Wielki Wybuch

61. Jeżeli prędkość ucieczki odległej galaktyki wynosi $0{,}99c$, to jaka jest odległość tej galaktyki od obserwatora na Ziemi?

62. Odległość pewnej galaktyki od Układu Słonecznego wynosi $10\,\mathrm{Mpc}$.
a. Jaka jest prędkość jej ucieczki?
b. Ile wynosi przesunięcie ku czerwieni światła emitowanego przez tę galaktykę i obserwowanego w Układzie Słonecznym (ile wynosi z)?

63. Jeśli galaktyka znajduje się $153\,\mathrm{Mpc}$ od nas, to jakie są jej spodziewane prędkość i kierunek ucieczki?

64. W jakiej średniej odległości znajdują się galaktyki, które oddalają się od nas z prędkością równą $2\,\%$ prędkości światła?

65. Nasz Układ Słoneczny krąży wokół środka Drogi Mlecznej. Zakładając, że orbita ta jest kołowa i ma promień równy $30\,000$ lat świetlnych, a prędkość na orbicie wynosi $250\,\mathrm{km} / \mathrm{s}$, oblicz, ile trwa jeden pełny obrót Układu Słonecznego wokół środka naszej Galaktyki? Zauważ, że jest to wynik bardzo przybliżony, ale daje dobre pojęcie o tym, jak długo trwa okrążenie Słońca i najbliższych nam gwiazd wokół środka Galaktyki.

66. a. Jaka jest średnia prędkość ucieczki liczona względem Ziemi galaktyk na skraju znanego nam Wszechświata (odległych o blisko 10 miliardów lat świetlnych)?
b. Jakim ułamkiem prędkości światła jest ich prędkość ucieczki? Zauważ, że w przykładach mieliśmy już do czynienia z galaktykami o prędkościach ucieczki rzędu $0{,}9c$.

67. a. Określ przybliżony wiek Wszechświata na podstawie wartości stałej Hubble'a $H_0 = 20\,\mathrm{km} / \mathrm{s} \cdot 10^6\,\mathrm{ly}$. W tym celu oblicz, ile czasu zajmie pokonanie drogi równej $0{,}307\,\mathrm{Mpc}$ z prędkością $20\,\mathrm{km} / \mathrm{s}$;
b. Jeśli w czasie ewolucji Wszechświata występowało przyspieszenie ekspansji, to czy prawdziwy aktualny wiek Wszechświata byłby większy, czy mniejszy od obliczonego? Wyjaśnij odpowiedź.

68. Gwiazdozbiór Andromedy jest najbliższą nam galaktyką, możemy ją z łatwością obserwować na niebie gołym okiem. Oszacuj jasność pozorną Andromedy

względem Słońca, jeśli jej jasność absolutna jest 10^{12} razy większa od jasności absolutnej Słońca, a jej odległość to $0{,}613\,\mathrm{Mpc}$.

69. Udowodnij, że prędkość gwiazdy krążącej po kołowej orbicie wokół środka swojej galaktyki jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka z odległości gwiazdy od środka galaktyki przy założeniu, że cała masa galaktyki skupia się w środku orbity. Możesz posłużyć się wiedzą zdobytą w poprzednich rozdziałach.

ZADANIA DODATKOWE

70. Z eksperymentu wynika, że mion rozpada się na elektron i foton. Jak to jest możliwe?

71. W zapisie każdej z poniższych reakcji brakuje jednej cząstki. Zidentyfikuj ją i uzupełnij równanie reakcji.
a. $\mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}} \longrightarrow \mathrm{n} + ?$;
b. $\mathrm{p} + \mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{p} + \Lambda^0 + ?$;
c. $\pi^- + \mathrm{p} \longrightarrow \Sigma^- + ?$;
d. $K^- + \mathrm{n} \longrightarrow \Lambda^0 + ?$;
e. $\tau^+ \longrightarrow \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e} + ?$;
f. $\overline{\nu_\mathrm{e}} + \mathrm{p} \longrightarrow \mathrm{n} + ?$.

72. Ze względu na stratę energii wiązki spowodowaną promieniowaniem synchrotronowym każdemu protonowi krążącemu w akceleratorze LHC w CERN na jeden okres należy dostarczyć $5\,\mathrm{MeV}$ energii, aby podtrzymać jego ruch. Ile okresów potrzeba, aby wytworzyć wiązkę protonów o energii $7\,\mathrm{TeV}$ ($7000\,\mathrm{GeV}$), jeśli początkowa energia wstrzykiwanych protonów to $8\,\mathrm{GeV}$?

73. Proton i antyproton, każdy o energii $7\,\mathrm{TeV}$ (jak w LHC), są zderzane centralnie i ulegają anihilacji. Ile wynosi całkowita energia dostępna w tym eksperymencie zderzeniowym (np. do produkcji nowych cząstek)? Zauważ, że w efekcie otrzymasz energię tylko nieco większą od całkowitej energii kinetycznej protonów, która sama jest już olbrzymia.

74. Elektrony i pozytony są zderzane w akceleratorze SLAC przy energiach kinetycznych wiązki $50\,\mathrm{GeV}$. Jaka jest całkowita energia zderzenia, jeśli weźmiemy pod uwagę energię powstałą w wyniku anihilacji cząstek? Zauważ, że energia z anihilacji par elektron–pozyton jest całkowicie pomijalna, ponieważ przy energii kinetycznej $50\,\mathrm{GeV}$ elektrony są bardzo relatywistyczne, a ich energia spoczynkowa jest bardzo mała w porównaniu z energią kinetyczną.

75. Podczas wybuchu supernowej jądro gwiazdy zapada się i tworzy się gwiazda neutronowa. Na skutek zachowania momentu pędu jądra gwiazda neutronowa zaczyna bardzo szybko wirować. Jeżeli jądro zapada się od rozmiaru $5 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$ do $10\,\mathrm{km}$ (promień) i początkowo wykonywało 1 obrót na $30\,\mathrm{dni}$, to z jaką częstotliwością wiruje powstała gwiazda neutronowa?

76. Na podstawie wyniku poprzedniego zadania oblicz przyrost energii kinetycznej ruchu obrotowego w wyniku wybuchu supernowej. Załóż, że masa jądra gwiazdy wynosi 1,3 masy Słońca. Co jest źródłem tej dodatkowej energii?

77. a. Jakiej wartości stałej Hubble'a odpowiadałby wiek Wszechświata równy 10^{10} lat? Do oszacowania stałej Hubble'a przyjmij, że tempo ekspansji jest stałe, i oblicz prędkość ucieczki dwóch galaktyk, przy której oddalają się one na odległość 1 miliona lat świetlnych (obecna średnia odległość między sąsiednimi galaktykami) w czasie 10^{10} lat;
b. Jaka stała Hubble'a odpowiada wiekowi Wszechświata $2 \cdot 10^{10}$ lat?

ZADANIA TRUDNIEJSZE

78. Elektrony i pozytony są zderzane w akceleratorze kołowym. Wyprowadź równanie na energię zderzenia w układzie środka masy cząstek.

79. Natężenie promieniowania kosmicznego zazwyczaj silnie maleje wraz ze wzrostem energii cząstek docierających do nas z kosmosu, ale do atmosfery okazjonalnie trafiają wysokoenergetyczne cząstki, które po zderzeniu z jądrem atomowym cząsteczek atmosfery wywołują kaskadę nowych cząstek. Załóż, że promieniowanie kosmiczne o wysokiej energii $10^{10}\,\mathrm{GeV}$ wytwarza się w zderzeniu cząstek o średnich masach spoczynkowych $200\,\mathrm{MeV} / c^2$.
a. Ile cząstek jest w stanie wytworzyć jeden kwant promieniowania kosmicznego o tak dużej energii?
b. Jeśli deszcz nowych cząstek pada następnie na obszar o powierzchni $1\,\mathrm{km}^2$, to jaka jest gęstość powierzchniowa cząstek (liczba cząstek na metr kwadratowy)?

80. a. Oblicz wielkość czynnika relatywistycznego Lorentza $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ dla protonów o energii $1\,\mathrm{TeV}$ wytwarzanych w akceleratorze **Tevatron** w Laboratorium im. Enrico Fermiego;

b. Jeśli taki proton rozpadł się na mezon π^+ o tej samej prędkości, to jaki czas życia pionu zarejestrujemy w laboratorium?
c. Jaką drogę w tym czasie pokona pion?

81. W planowanym eksperymencie dotyczącym badania oddziaływań silnych wytwarzana ma być wiązka wtórna złożona z mezonów K, które z energią kinetyczną $500\,\mathrm{MeV}$ miałyby rozpraszać się na tarczy atomowej.
a. Jaką wartość będzie miał czynnik Lorentza $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ dla tych kaonów?
b. Jaki średni czas życia miałyby cząstki?
c. Jaką drogę mogłyby pokonać w laboratorium w czasie swojego życia?

82. Neutrina są masowo produkowane w supernowych, takich jak supernowa 1987A – należąca do Obłoku Magellana gwiazda odległa o $120\,000$ lat świetlnych od Ziemi (jak na supernową jest to stosunkowo blisko Drogi Mlecznej). Gdyby neutrina były obdarzone masą, nie mogłyby się poruszać z prędkością światła, jednak jeśli ich masa jest bardzo mała, to ich prędkość może być bliska prędkości światła.
a. Załóż, że neutrina mają masę $7\,\mathrm{eV} \Big/ c^2$ i z supernowej 1987A wylatują z energią kinetyczną $700\,\mathrm{keV}$. Oblicz czynnik relatywistyczny Lorentza $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$ dla tych neutrin;
b. Jeśli w tym samym czasie z supernowej wylatuje foton, to o ile wcześniej niż neutrino dotrze on do Ziemi? Ta różnica w czasie podróży jest bardzo niewielka, jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, że nie jesteśmy w stanie określić, które dokładnie cząstki wyleciały jednocześnie z supernowej w kierunku Ziemi, a wydajność detekcji neutrin jest bardzo niska (ze względu na ich małą masę i przez to słabe oddziaływanie z materiałem czynnym jakiegokolwiek detektora). Zatem fakt, że neutrina docierają do nas w zaledwie kilka godzin od wybuchu supernowej, stanowi górny limit oszacowania masy neutrin.

Wskazówka: Do obliczenia prędkości neutrin ν możesz potrzebować rozwinięcia w szereg Taylora ze względu na dużą wartość γ.

83. Założywszy, że orbita Słońca wokół środka Drogi Mlecznej jest kołowa, oblicz prędkość orbitalną Słońca. Wykorzystaj informacje: masa całej Drogi Mlecznej równa $1{,}5 \cdot 10^{11}$ masy Słońca (czyli $3 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}$) może być skupiona w środku orbity w odległości $30\,000$ lat świetlnych od Słońca.

84. a. Jaką w przybliżeniu siłą człowiek o masie $70\,\mathrm{kg}$ jest przyciągany przez Galaktykę Andromedy, której masa wynosi ok. 10^{13} masy Słońca i którą możemy umieścić w punkcie odległym o $0{,}613\,\mathrm{Mpc}$ (odległość od Ziemi)?
b. Jaki jest stosunek tej siły do masy człowieka (wielkość natężenia pola grawitacyjnego wytwarzanego przez Galaktykę Andromedy na Ziemi)? Zauważ, że Galaktyka Andromedy jest najbliższą nam galaktyką.

85. a. Pozostająca w spoczynku względem obserwatora para cząstka–antycząstka ulega anihilacji i cała jej energia spoczynkowa zamienia się w energię dwóch fotonów γ biegnących w przeciwnych kierunkach. Jakiej charakterystycznej energii fotonów γ należy się spodziewać jako świadectwa anihilacji pary proton-antyproton (fakt, że fotonów o takiej energii prawie się nie rejestruje, oznacza, że udział antymaterii we Wszechświecie jest bardzo niewielki)?
b. Porównaj tę energię z energią fotonów powstałych z anihilacji par elektron–pozyton ($0{,}511\,\mathrm{MeV}$).

86. Maksimum natężenia promieniowania reliktowego przypada na długość fali $1{,}1\,\mathrm{mm}$.
a. Jaką energię w elektronowoltach ma foton o tej długości fali?
b. Szacuje się, że na każdą cząstkę obdarzoną masą przypada w odległym kosmosie ok. 10^{19} fotonów. Oblicz całkowitą energię liczby 10^{19} fotonów;
c. Jeśli przyjmiemy, że każda cząstka masywna ma masę równą mniej więcej połowie masy protonu, to ile wynosi energia spoczynkowa tej cząstki?
d. Czy otrzymane wyniki świadczą o tym, że przestrzeń kosmiczna jest zdominowana przez materię? Wyjaśnij krótko odpowiedź.

87. a. Skorzystaj z zasady nieoznaczoności Heisenberga, aby obliczyć nieoznaczoność energii odpowiadającą przedziałowi czasu $10^{-43}\,\mathrm{s}$;
b. Porównaj wynik z energią $10^{19}\,\mathrm{GeV}$, przy której zachodzi unifikacja oddziaływań, i omów, dlaczego występuje podobieństwo.

DODATEK A | JEDNOSTKI

Wielkość fizyczna	**Symbol**	**Jednostka**	**Wymiar jednostki (za pomocą jednostek podstawowych)**
Przyspieszenie	$\vec{a}$	m / s^2	m / s^2
Liczność materii	n	**mol**	mol
Kąt	θ, ϕ, φ	radian (rad)	
Przyspieszenie kątowe	$\vec{\varepsilon}$	rad / s^2	s^{-2}
Częstość kołowa	ω	rad / s	s^{-1}
Moment pędu	$\vec{L}$	$kg \cdot m^2 / s$	$kg \cdot m^2 / s$
Prędkość kątowa	$\vec{\omega}$	rad / s	s^{-1}
Pole powierzchni	A, S	m^2	m^2
Liczba atomowa	Z		
Pojemność elektryczna	C, c	farad (F)	$A^2 \cdot s^4 / (kg \cdot m^2)$
Ładunek elektryczny	q, Q, e	kulomb (C)	$A \cdot s$
Gęstość ładunku:			
liniowa	λ	C / m	$A \cdot s / m$
powierzchniowa	σ	C / m^2	$A \cdot s / m^2$
objętościowa	ρ	C / m^3	$A \cdot s / m^3$
Przewodność elektryczna właściwa	σ	$\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$	$A^2 \cdot s^3 / (kg \cdot m^3)$
Natężenie prądu	I, i	**amper**	A
Gęstość prądu	$\vec{J}$	A / m^2	A / m^2
Gęstość	ρ	kg / m^3	kg / m^3
Względna przenikalność elektryczna	ε_r		
Moment dipolowy	$\vec{p}$	$C \cdot m$	$A \cdot s \cdot m$
Natężenie pola elektrycznego	$\vec{E}$	N / C	$kg \cdot m / (A \cdot s^3)$
Strumień elektryczny	Φ_E	$N \cdot m^2 / C$	$kg \cdot m^3 / (A \cdot s^3)$
Siła elektromotoryczna	ε	wolt (V)	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^3)$
Energia	E, E_k, E_p, U	dżul (J)	$kg \cdot m^2 / s^2$
Entropia	S	J / K	$kg \cdot m^2 / (s^2 \cdot K)$
Siła	$\vec{F}$	niuton (N)	$kg \cdot m / s^2$

Tabela A1 Jednostki stosowane w fizyce (jednostki podstawowe wyróżniono tłustym drukiem)

Wielkość fizyczna	Symbol	Jednostka	Wymiar jednostki (za pomocą jednostek podstawowych)
Częstotliwość	f, ν	herc (Hz)	s^{-1}
Ciepło	Q	dżul (J)	$kg \cdot m^2 / s^2$
Indukcyjność	L	henr (H)	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^2)$
Długość:	l, L	**metr**	m
Przemieszczenie	$\Delta x, \Delta \vec{r}$		
odległość	d, h		
położenie	$x, y, z, \vec{r}$		
Moment magnetyczny	$\vec{\mu}$	J / T	$A \cdot m^2$
Indukcja magnetyczna	$\vec{B}$	tesla ($T = Wb / m^2$)	$kg / (A \cdot s^2)$
Strumień indukcji mangnetycznej	Φ_B	weber (Wb)	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^2)$
Masa	m, M	**kilogram**	kg
Molowe ciepło właściwe	C	$J / (mol \cdot K)$	$kg \cdot m^2 / (s^2 \cdot mol \cdot K)$
Moment bezwładności	I	$kg \cdot m^2$	$kg \cdot m^2$
Pęd	$\vec{p}$	$kg \cdot m / s$	$kg \cdot m / s$
Okres	T	s	s
Przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$N / A^2 = H / m$	$kg \cdot m / (A^2 \cdot s^2)$
Przenikalność elektryczna próżni	ε_0	$C^2 / (N \cdot m^2) = F / m$	$A^2 \cdot s^4 / (kg \cdot m^3)$
Potencjał	V	wolt ($V = J / C$)	$kg \cdot m^2 / (A \cdot s^3)$
Moc	P	wat ($W = J / s$)	$kg \cdot m^2 / s^3$
Ciśnienie	p	paskal ($Pa = N / m^2$)	$kg / (m \cdot s^2)$
Opór	R	om ($\Omega = V / A$)	$kg \cdot m^2 / (A^2 \cdot s^3)$
ciepło właściwe	c	$J / (kg \cdot K)$	$m^2 / (s^2 \cdot K)$
Szybkość	v	m / s	m / s
Temperatura	T	**kelwin**	K
Czas	t	**sekunda**	s
Moment siły	$\vec{M}$	$N \cdot m$	$kg \cdot m^2 / s^2$
Prędkość	$\vec{v}$	m / s	m / s
Objętość	V	m^3	m^3
Długość fali	λ	m	m
Praca	W	dżul ($J = N \cdot m$)	$kg \cdot m^2 / s^2$

Tabela A1 Jednostki stosowane w fizyce (jednostki podstawowe wyróżniono tłustym drukiem)

DODATEK B | PRZELICZANIE JEDNOSTEK

	m	cm	km
1 metr	1	10^2	10^{-3}
1 centymetr	10^{-2}	1	10^{-5}
1 kilometr	10^3	10^5	1
1 cal	$2{,}540 \cdot 10^{-2}$	2,540	$2{,}540 \cdot 10^{-5}$
1 stopa	0,3048	30,48	$3{,}048 \cdot 10^{-4}$
1 mila	1609	$1{,}609 \cdot 10^5$	1,609
1 angstrem	10^{-10}	10^{-8}	10^{-13}
1 fermi	10^{-15}	10^{-13}	10^{-18}
1 rok świetlny	$9{,}460 \cdot 10^{17}$	$9{,}460 \cdot 10^{12}$	$9{,}460 \cdot 10^{15}$
	cal	stopa	mi
1 metr	39,37	3,281	$6{,}214 \cdot 10^{-4}$
1 centymetr	0,3937	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	$6{,}214 \cdot 10^{-6}$
1 kilometr	$3{,}937 \cdot 10^4$	$3{,}281 \cdot 10^3$	0,6214
1 cal	1	$8{,}333 \cdot 10^{-2}$	$1{,}578 \cdot 10^{-5}$
1 stopa	12	1	$1{,}894 \cdot 10^{-4}$
1 mila	$6{,}336 \cdot 10^4$	5280	1

Tabela B1 Długość

Powierzchnia

$1\ \text{cm}^2 = 0{,}155\ \text{cala}^2$

$1\ \text{m}^2 = 10^4\ \text{cm}^2 = 10{,}76\ \text{stopy}^2$

$1\ \text{cal}^2 = 6{,}452\ \text{cm}^2$

$1\ \text{stopa}^2 = 144\ \text{cale}^2 = 0{,}0929\ \text{m}^2$

Objętość

$1\ \text{litr} = 1000\ \text{cm}^3 = 10^{-3}\ \text{m}^3 = 0{,}03531\ \text{stopy}^3 = 61{,}02\ \text{cala}^3$

$1\ \text{stopa}^3 = 0{,}02832\ \text{m}^3 = 28{,}32\ \text{litr} = 7{,}477\ \text{galon USA}$

$1\ \text{galon USA} = 3{,}788\ \text{litr}$

	s	min	h	dzień	rok
1 sekunda	1	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	$2{,}778 \cdot 10^{-4}$	$1{,}157 \cdot 10^{-5}$	$3{,}169 \cdot 10^{-8}$
1 minuta	60	1	$1{,}667 \cdot 10^{-2}$	$6{,}944 \cdot 10^{-4}$	$1{,}901 \cdot 10^{-6}$
1 godzina	3600	60	1	$4{,}167 \cdot 10^{-2}$	$1{,}141 \cdot 10^{-4}$
1 dzień	$8{,}640 \cdot 10^4$	1440	24	1	$2{,}738 \cdot 10^{-3}$
1 rok	$3{,}156 \cdot 10^7$	$5{,}259 \cdot 10^5$	$8{,}766 \cdot 10^3$	365,25	1

Tabela B2 Czas

	m/s	cm/s	stopa/s	mi/h
1 m/s	1	10^2	3,281	2,237
1 cm/s	10^{-2}	1	$3{,}281 \cdot 10^{-2}$	$2{,}237 \cdot 10^{-2}$
1 stopa/s	0,3048	30,48	1	0,6818
1 mi/h	0,4470	44,70	1,467	1

Tabela B3 Prędkość

Przyspieszenie

$1\ \text{m/s}^2 = 100\ \text{cm/s}^2 = 3{,}281\ \text{stopy/s}^2$
$1\ \text{cm/s}^2 = 0{,}01\ \text{m/s}^2 = 0{,}03281\ \text{stopy/s}^2$
$1\ \text{stopa/s}^2 = 0{,}3048\ \text{m/s}^2 = 30{,}48\ \text{cm/s}^2$
$1\ \text{mila}/\ (\text{h} \cdot \text{s}) = 1{,}467\ \text{stopy}/\text{s}^2$

	kg	g	slug	u (atomowa jednostka masy)
1 kilogram	1	10^3	$6{,}852 \cdot 10^{-2}$	$6{,}024 \cdot 10^{26}$
1 gram	10^{-3}	1	$6{,}852 \cdot 10^{-5}$	$6{,}024 \cdot 10^{23}$
1 slug	14,59	$1{,}459 \cdot 10^4$	1	$8{,}789 \cdot 10^{27}$
1 u	$1{,}661 \cdot 10^{-27}$	$1{,}661 \cdot 10^{-24}$	$1{,}138 \cdot 10^{-28}$	1
1 tona	1000			

Tabela B4 Masa

	N	dyna	lb (funt- siła)
1 N	1	10^5	0,2248
1 dyna	10^{-5}	1	$2{,}248 \cdot 10^{-6}$
1 lb	4,448	$4{,}448 \cdot 10^5$	1

Tabela B5 Siła

	Pa	dyna/cm^2	atm	cmHg	lb/cal^2
1 Pa	1	10	$9{,}869 \cdot 10^{-6}$	$7{,}501 \cdot 10^{-4}$	$1{,}450 \cdot 10^{-4}$
1 dyna/cm^2	10^{-1}	1	$9{,}869 \cdot 10^{-7}$	$7{,}501 \cdot 10^{-5}$	$1{,}450 \cdot 10^{-5}$
1 atm	$1{,}013 \cdot 10^5$	$1{,}013 \cdot 10^6$	1	76	14,70
1 cmHg*	$1{,}333 \cdot 10^3$	$1{,}333 \cdot 10^4$	$1{,}316 \cdot 10^{-2}$	1	0,1934
1 lb/cal^2	$6{,}895 \cdot 10^3$	$6{,}895 \cdot 10^4$	$6{,}805 \cdot 10^{-2}$	5,171	1
1 bar	10^5				
1 torr				1 (mmHg)	

***Przyspieszenie ziemskie wynosi** $9{,}80665\ \text{m}/\text{s}^2$**, a temperatura wynosi** $0\,^\circ\text{C}$

Tabela B6 Ciśnienie

	J	erg	ft.lb (stopofunt- siła)
1 J	1	10^7	0,7376
1 erg	10^{-7}	1	$7{,}376 \cdot 10^{-8}$
1 ft.lb	1,356	$1{,}356 \cdot 10^7$	1
1 eV	$1{,}602 \cdot 10^{-19}$	$1{,}602 \cdot 10^{-12}$	$1{,}182 \cdot 10^{-19}$
1 cal	4,186	$4{,}186 \cdot 10^7$	3,088
1 BTU	$1{,}055 \cdot 10^3$	$1{,}055 \cdot 10^{10}$	$7{,}779 \cdot 10^2$
1 kWh	$3{,}600 \cdot 10^6$		
	eV	cal (kaloria)	Btu (angielska jednostka ciepła)
1 dżul	$6{,}242 \cdot 10^{18}$	0,2389	$9{,}481 \cdot 10^{-4}$
1 erg	$6{,}242 \cdot 10^{11}$	$2{,}389 \cdot 10^{-8}$	$9{,}481 \cdot 10^{-11}$
1 ft.lb	$8{,}464 \cdot 10^{18}$	0,3239	$1{,}285 \cdot 10^{-3}$
1 eV	1	$3{,}827 \cdot 10^{-20}$	$1{,}519 \cdot 10^{-22}$
1 cal	$2{,}613 \cdot 10^{19}$	1	$3{,}968 \cdot 10^{-3}$
1 Btu	$6{,}585 \cdot 10^{21}$	$2{,}520 \cdot 10^2$	1

Tabela B7 Praca, energia, ciepło

Moc

$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}$

Angielski koń parowy hp (ang. horse power); stopofunt- siła na sekundę ft·lbf/s (ang. foot pound-force per second)

$1\ \mathrm{hp} = 746\ \mathrm{W} = 550\ \mathrm{ft \cdot lb/s}$

Angielska jednostka ciepła na godzinę Btu/h (ang. British thermal unit per hour)

$1\ \mathrm{Btu/h} = 0{,}293\ \mathrm{W}$

Kąt

$1\ \mathrm{rad} = 57,30^\circ = 180^\circ / \pi$

$1^\circ = 0{,}01745\ \mathrm{rad} = \pi / 180\ \mathrm{rad}$

$1\ \text{obrót} = 360^\circ = 2\pi\ \mathrm{rad}$

$1\ \text{obrót}/\mathrm{min} = 0{,}1047\ \mathrm{rad/s}$

DODATEK C | NAJWAŻNIEJSZE STAŁE FIZYCZNE

Wielkość	Symbol	Wartość
atomowa jednostka masy	u	$1{,}660\,538\,782(83) \cdot 10^{-27}$ kg $931{,}494\,028(23)$ MeV / c^2
liczba Avogadra	N_A	$6{,}022\,141\,79(30) \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$
magneton Bohra	$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$	$9{,}274\,009\,15(23) \cdot 10^{-24}$ J / T
promień Bohra	$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2 k_e}$	$5{,}291\,772\,085\,9(36) \cdot 10^{-11}$ m
stała Boltzmanna	$k_B = \frac{R}{N_A}$	$1{,}380\,650\,4(24) \cdot 10^{-23}$ J / K
komptonowska długość fali	$\lambda_C = \frac{h}{m_e c}$	$2{,}426\,310\,217\,5(33) \cdot 10^{-12}$ m
stała elektrostatyczna	$k_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$	$8{,}987\,551\,788... \cdot 10^{9}\,\mathrm{N \cdot m^2 / C^2}$ (dokładna wartość)
masa deuteronu	m_d	$3{,}343\,583\,20(17) \cdot 10^{-27}$ kg $2{,}013\,553\,212\,724(78)$ u $1875{,}612\,859$ MeV / c^2
masa elektronu	m_e	$9{,}109\,382\,15(45) \cdot 10^{-31}$ kg $5{,}485\,799\,094\,3(23) \cdot 10^{-4}$ u $0{,}510\,998\,910(13)$ MeV / c^2
elektronowolt	eV	$1{,}602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19}$ J
ładunek elementarny	e	$1{,}602\,176\,487(40) \cdot 10^{-19}$ C
stała gazowa	R	$8{,}314\,472(15)$ J / (mol · K)
stała grawitacji	G	$6{,}674\,28(67) \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 / kg^2}$
masa neutronu	m_n	$1{,}674\,927\,211(84) \cdot 10^{-27}$ kg $1{,}008\,664\,915\,97(43)$ u $939{,}565\,346(23)$ MeV / c^2
magneton jądrowy	$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p}$	$5{,}050\,783\,24(13) \cdot 10^{-27}$ J / T
przenikalność magnetyczna próżni	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m / A (dokładna wartość)

Tabela C1 Najważniejsze stałe fizyczne *Uwaga:* Podane wartości stałych zostały zarekomendowane w 2006 r. przez Konwent Danych dla Nauki i Technologii CODATA, na podstawie dopasowania wartości uzyskanych na drodze eksperymentalnej za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Wartości podane w nawiasach są niepewnościami dwóch ostatnich cyfr.

Wielkość	Symbol	Wartość
przenikalność elektryczna próżni	$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$	$8{,}854\,187\,817\ldots \cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2 / \left(N \cdot m^2\right)}$ (dokładna wartość)
stała Plancka	h	$6{,}626\,068\,96(33) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
zredukowana stała Plancka / stała Diraca	$\hbar = \frac{h}{2\pi}$	$1{,}054\,571\,628(53) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$
masa protonu	m_p	$1{,}672\,621\,637(83) \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}$ $1{,}007\,276\,466\,77(10)\ \mathrm{u}$ $938{,}272\,013(23)\ \mathrm{MeV} \big/ c^2$
stała Rydberga	R_H	$1{,}097\,373\,156\,852\,7(73) \cdot 10^7\ \mathrm{m^{-1}}$
prędkość światła w próżni	c	$2{,}997\,924\,58 \cdot 10^8\ \mathrm{m / s}$ (dokładna wartość)

Tabela C1 Najważniejsze stałe fizyczne *Uwaga:* Podane wartości stałych zostały zarekomendowane w 2006 r. przez Konwent Danych dla Nauki i Technologii CODATA, na podstawie dopasowania wartości uzyskanych na drodze eksperymentalnej za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Wartości podane w nawiasach są niepewnościami dwóch ostatnich cyfr.

Przydatne wartości iloczynów stałych:

$hc = 12\,400\,\mathrm{eV \cdot \mathring{A}} = 1240\,\mathrm{eV \cdot nm} = 1240\,\mathrm{MeV \cdot fm}$

$\hbar c = 1973\,\mathrm{eV \cdot \mathring{A}} = 197{,}3\,\mathrm{eV \cdot nm} = 197{,}3\,\mathrm{MeV \cdot fm}$

$k_\mathrm{e} e^2 = 14{,}4\,\mathrm{eV \cdot \mathring{A}} = 1{,}44\,\mathrm{eV \cdot nm} = 1{,}44\,\mathrm{MeV \cdot fm}$

$k_\mathrm{B} T = 0{,}025\,85\,\mathrm{eV}$, przy temperaturze $T = 300\,\mathrm{K} = 26{,}85\,°\mathrm{C}$

DODATEK D | DANE ASTRONOMICZNE

Obiekt niebieski	Odległość od Słońca (w milionach km)	Okres obiegu po orbicie	Okres obrotu na równiku	Mimośród orbity
Słońce	–	–	27 dni	–
Merkury	57,9	88 dni	59 dni	0,206
Wenus	108,2	224,7 dni	243 dni	0,007
Ziemia	149,6	365,26 dni	23 h 56 min 4 s	0,017
Mars	227,9	687 dni	24 h 37 min 23 s	0,093
Jowisz	778,4	11,9 lat	9 h 50 min 30 s	0,048
Saturn	1426,7	29,56 lat	10 h 14 min	0,054
Uran	2871,0	84,0 lat	17 h 14 min	0,047
Neptun	4498,3	164,8 lat	16 h	0,009
Księżyc ziemski	149,6 (0,386 od Ziemi)	27,3 dni	27,3 dni	0,055
Obiekt niebieski	Średnica na równiku (km)	Masa (Masa Ziemi = 1)	Gęstość (g/cm^3)	
Słońce	1 392 000	333 000,00	1,4	
Merkury	4879	0,06	5,4	
Wenus	12 104	0,82	5,2	
Ziemia	12 756	1,00	5,5	
Mars	6794	0,11	3,9	
Jowisz	142 984	317,83	1,3	
Saturn	120 536	95,16	0,7	
Uran	51 118	14,54	1,3	
Neptun	49 528	17,15	1,6	
Księżyc ziemski	3476	0,01	3,3	

Tabela D1 Dane astronomiczne

Inne dane:

Masa Ziemi: $5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
Masa Księżyca: $7{,}36 \cdot 10^{22}$ kg
Masa Słońca: $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg

DODATEK E | WZORY MATEMATYCZNE

Równanie kwadratowe

Jeżeli $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$, wtedy $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Geometria

Trójkąt o podstawie b i wysokości h:
Powierzchnia $= \frac{1}{2}bh$
Koło o promieniu r:
Obwód $= 2\pi r$
Pole powierzchni $= \pi r^2$
Kula o promieniu r:
Pole powierzchni $= 4\pi r^2$
Objętość $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Walec o promieniu r i wysokości h:
Pole powierzchni bocznej $= 2\pi rh$
Objętość $= \pi r^2 h$

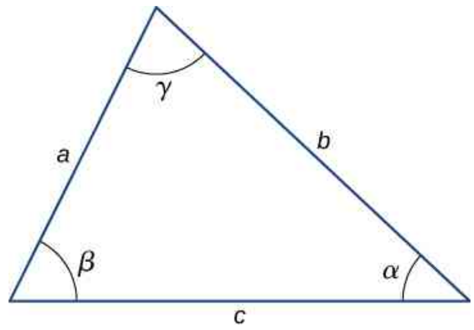
Trygonometria

Tożsamości trygonometryczne

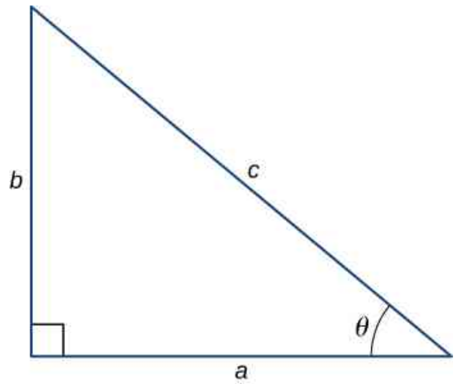
1. $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$
2. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$
3. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\theta}$
4. $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$
5. $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$
6. $\operatorname{tg}(90° - \theta) = \operatorname{ctg}\theta$
7. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
8. $\sec^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta = 1$
9. $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
10. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta)$
11. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta)$
12. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}(\alpha)\operatorname{tg}(\beta)}$
13. $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
14. $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$
15. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$
16. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Trójkąty

1. Twierdzenie sinusów: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
2. Twierdzenie cosinusów: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$



3. Twierdzenie Pitagorasa: $c^2 = a^2 + b^2$



Rozwinięcie funkcji w szeregi potęgowe

1. Wzór dwumianowy:
$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2!}a^2b^{n-2} + \frac{n}{1!}ab^{n-1} + b^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
2. $(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} \pm \ldots = \sum_{k=0}^{n}(\pm 1)^k\binom{n}{k}x^k$, dla $|x| < 1$
3. $(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} \mp \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(\mp 1)^k\binom{k+n-1}{k}x^k$, dla $|x| < 1$
4. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
5. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}$
6. $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$, dla $|x| < \frac{\pi}{2}$
7. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$
8. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k}$, dla $|x| < 1$

Pochodne

1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[af(x)] = a\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)+g(x)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)$
3. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(x)\,g(x)\right]=f(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)+g(x)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$
4. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
5. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^m=mx^{m-1}$
6. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x=\cos x$
7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x=-\sin x$
8. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos^2 x}$
9. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{\sin^2 x}$
10. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec x=\operatorname{tg}(x)\sec(x)$
11. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{cosec}x=-\operatorname{ctg}(x)\operatorname{cosec}(x)$
12. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x=e^x$
13. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x=\frac{1}{x}$
14. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
15. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
16. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arctg}x=\frac{1}{1+x^2}$

Całki

1. $\int af(x)\,\mathrm{d}x=a\int f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int\left[f(x)+g(x)\right]\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x+\int g(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int x^m\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\frac{x^{m+1}}{m+1}, & \text{dla } m\neq 1\\ \ln|x|, & \text{dla } m=1\end{cases}$
4. $\int\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x$
5. $\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x$
6. $\int\operatorname{tg}x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|$
7. $\int\sin^2(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a}$
8. $\int\cos^2(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{\sin(2ax)}{4a}$
9. $\int\sin(ax)\cos(ax)\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos(2ax)}{4a}$

10. $\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}$

11. $\int xe^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2}\,(ax-1)$

12. $\int \ln{(ax)}\,\mathrm{d}x = x\ln{(ax)} - x$

13. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$

14. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\,\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|$

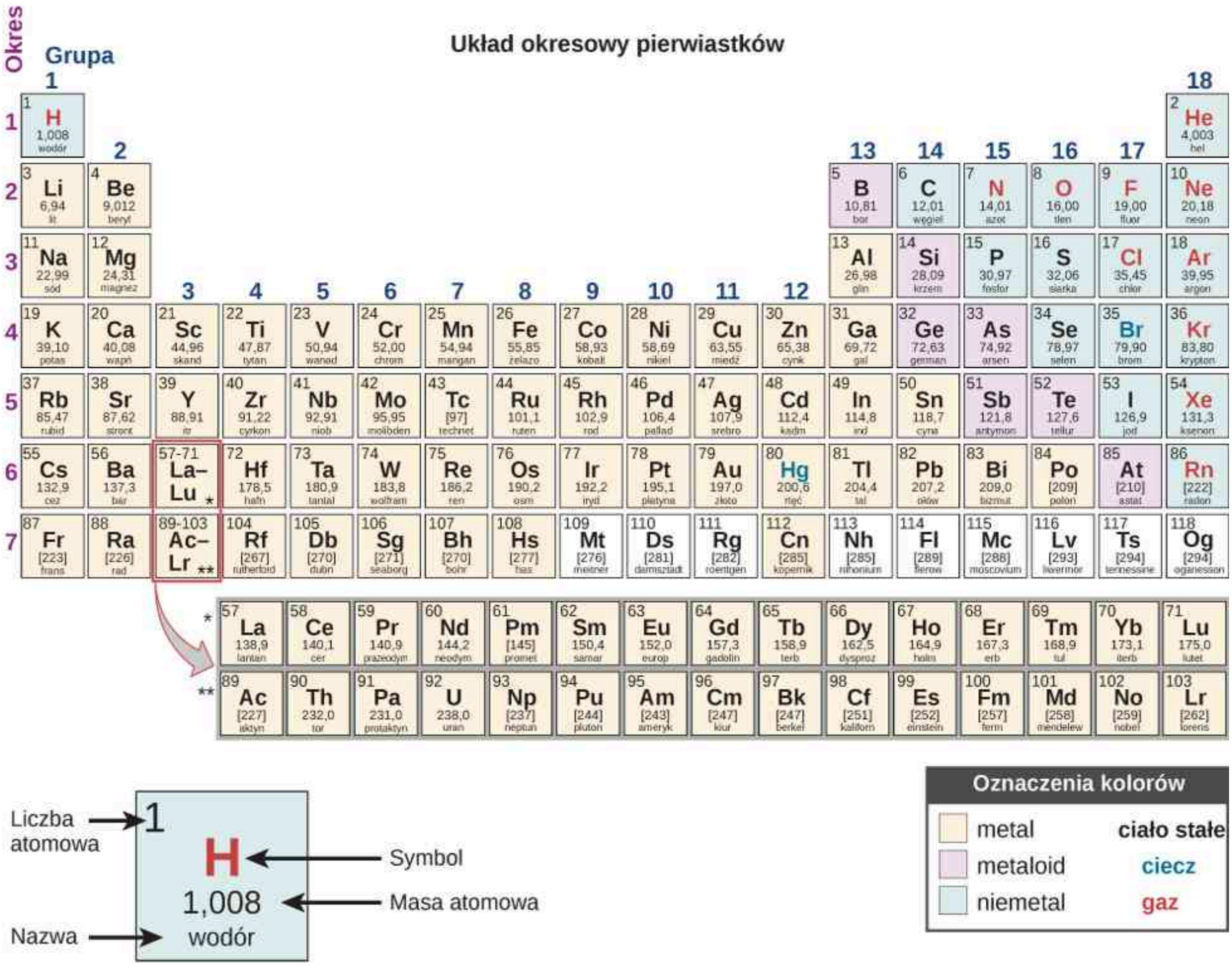
15. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \mathrm{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right) = \ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+1}\right|$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

17. $\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\,\mathrm{arcsinh}\left(\frac{x}{a}\right)$

18. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\,\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$

DODATEK F | UKŁAD OKRESOWY PIERWIASTKÓW



DODATEK G | ALFABET GRECKI

Nazwa	Wielka litera	Mała litera	Nazwa	Wielka litera	Mała litera
alfa	Α	α	ni	Ν	ν
beta	Β	β	ksi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	omikron	Ο	ο
delta	Δ	δ	pi	Π	π
epsilon	Ε	ε	ro	Ρ	ρ
dzeta	Ζ	ζ	sigma	Σ	σ
eta	Η	η	tau	Τ	τ
theta	Θ	θ	ipsylon	Υ	υ
jota	Ι	ι	fi	Φ	ϕ
kappa	Κ	κ	chi	Χ	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mi	Μ	μ	omega	Ω	ω

Tabela G1 Alfabet grecki

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

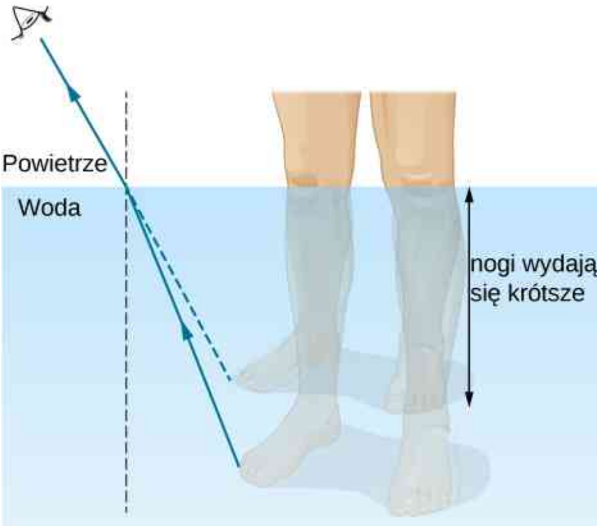
ROZDZIAŁ 1

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

1.1. $2,1\%$ (dokładność do dwóch cyfr znaczących).
1.2. $15,1°$.
1.3. Z powietrza do wody, ponieważ wtedy nie jest spełniony warunek, że współczynnik załamania drugiego ośrodka jest mniejszy od pierwszego.
1.4. $9,3\,\text{cm}$.
1.5. AA' stałby się dłuższy, $A'B'$ odchyliłby się bardziej względem powierzchni, a promień załamany odchyliłby się od normalnej.
1.6. Również 90% .
1.7. Nastąpi tylko załamanie, nie będzie odbicia.

PYTANIA

1. Światło może być traktowane jako promień, gdy obiekty są duże w porównaniu z długością fali, natomiast jako fala, gdy obiekty są porównywalne lub małe względem długości fali.
3. Ta obserwacja dowodzi wprost, że prędkość światła jest większa od prędkości dźwięku. Jeżeli znamy odległość od miejsca, w którym nastąpił błysk, oraz prędkość dźwięku, możemy na tej podstawie obliczyć prędkość światła. W praktyce ze względu na bardzo dużą wartość prędkości światła dane potrzebne do jej wyliczenia musiałyby być znane z dużą dokładnością.
5. Puder składa się z wielu małych cząstek o losowo zorientowanych powierzchniach. Powoduje to rozproszenie, zmniejszając połysk.
7. Do normalnej, gdy n wzrasta (z powietrza do wody, z wody do szkła); od normalnej, gdy n maleje (ze szkła do powietrza).
9. Promień biegnący od nóg ulega załamaniu na granicy wody. Obserwator znajdujący się w powietrzu widzi pozorne miejsce źródła, jakby promień całą drogę przebył po linii prostej. Zobacz rysunek poniżej.



11. Kamień szlachetny staje się niewidoczny, gdy jego współczynnik załamania jest taki sam lub zbliżony do współczynnika załamania wody, która go otacza. Ponieważ diament ma wyjątkowo dużą wartość współczynnika załamania, będzie wciąż rozbłyskiwać w wyniku całkowitego wewnętrznego odbicia, zatem będzie widoczny.
13. Można zmierzyć kąt graniczny, obserwując, przy jakim kącie padania następuje całkowite wewnętrzne odbicie. Następnie wyznaczoną wartość kąta można wstawić do Równania 1.5 i obliczyć współczynnik załamania.
15. Promienie światła, które załamują się w diamencie i wychodzą z niego, podlegają całkowitemu wewnętrznemu odbiciu, ale też zjawisku dyspersji z powodu zależności współczynnika załamania od długości fali. Rezultatem są barwne rozbłyski.
17. Tak.
19. Nie, ponieważ fale dźwiękowe rozchodzące się w powietrzu nie są falami poprzecznymi.
21. Energia jest pochłaniana przez polaryzatory.
23. Przy zachodzie słońca promienie dochodzą do naszego oka przez grubszą warstwę atmosfery (dłuższa droga). Światło niebieskie (krótsze fale) jest na tej drodze silniej rozpraszane, a zatem w świetle docierającym do obserwatora dominuje barwa czerwona (dłuższe fale).
25. Kierunek polaryzacji okularów został obrócony o $90°$.

ZADANIA

27. $2{,}997\,05 \cdot 10^8\,\text{m/s}$, $1{,}97 \cdot 10^8\,\text{m/s}$.
29. Lód w temperaturze $0\,°\text{C}$.
31. $1{,}03\,\text{ns}$.
33. $337\,\text{m}$.

35. dowód.
37. dowód.
39. Odbicia $70°$, załamania $45°$.
41. $42°$.
43. $1{,}53$.
45. a. $2{,}9\,\text{m}$; b. $1{,}4\,\text{m}$.
47. a. $24{,}42°$; b. $31{,}33°$.
49. $79{,}11°$.
51. a. $1{,}43$ – fluoryt; b. $44{,}2°$.
53. a. $48{,}2°$; b. $27{,}3°$.
55. Dla czerwonego $46{,}5°$, dla fioletowego $46°$.
57. a. $0{,}04°$; b. $1{,}3\,\text{m}$.
59. $72{,}8°$.
61. $\theta_{\text{c}} = 53{,}5°$, $\theta_{\text{f}} = 55{,}2°$.
63. $0{,}5$.
65. $0{,}125$, czyli $1/8$.
67. $84{,}3°$.
69. $0{,}25 I_0$.
71. a. $0{,}5$; b. $0{,}25$; c. $0{,}187$.
73. $67{,}54°$.
75. $53{,}1°$.

ZADANIA DODATKOWE

77. $114\,\text{rad}/\text{s}$.
79. $3{,}72\,\text{nm}$.
81. $41{,}2°$.
83. a. $1{,}92$. Klejnot nie jest diamentem – to cyrkonia; b. $55{,}2°$.
85. a. $0{,}898$; b. Współczynnik załamania nie może być mniejszy od 1, bo oznaczałoby to, że prędkość światła jest większa od c; c. Kąt załamania jest zbyt duży w stosunku do kąta padania.
87. $0{,}707 B_1$.
89. a. $1{,}69 \cdot 10^{-2}\,°\text{C}/\text{s}$; b. Tak.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

91. Pierwsze zadanie: $88{,}6°$. Drugie zadanie zależy od stopnia złożoności przyjętego przez czytelnika.
93. Dowód; $1{,}33$.
95. a. $0{,}75$; b. $0{,}563$; c. $1{,}33$.

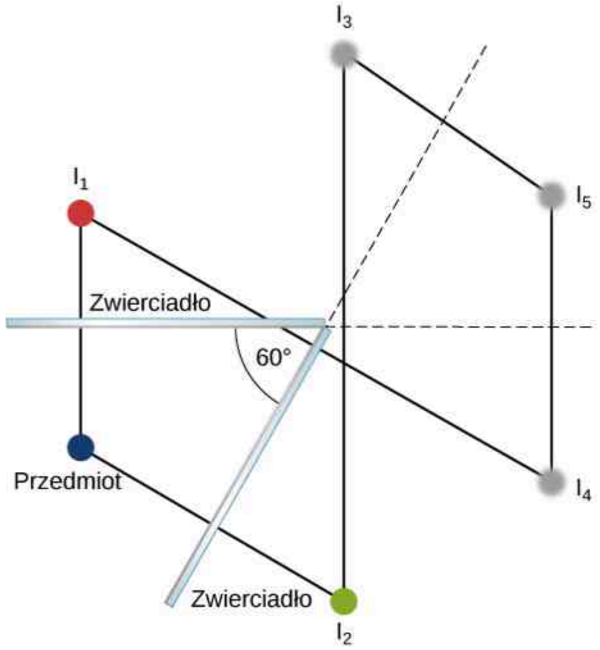
ROZDZIAŁ 2

PYTANIA

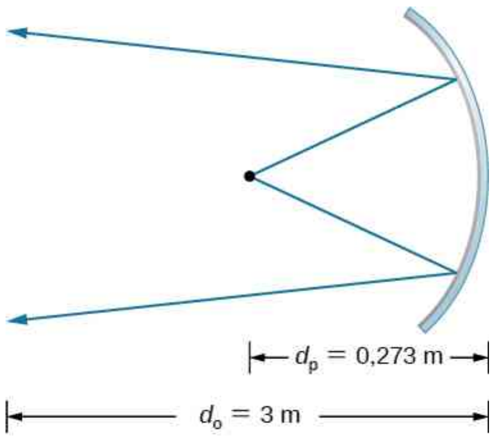
1. Obraz pozorny nie może być wyświetlony na ekranie. Nie możesz ocenić, czy obraz jest rzeczywisty, czy pozorny na podstawie tego, co widzisz.
3. Tak, można sfotografować obraz pozorny. Przykładowo, jeśli fotografujesz swoje odbicie w zwierciadle płaskim, otrzymujesz zdjęcie obrazu pozornego. Aparat skupia światło, które wchodzi do obiektywu w celu utworzenia obrazu, niezależnie od tego, czy światło pochodzi od rzeczywistego przedmiotu, czy odbija się od zwierciadła (obraz pozorny).
5. Nie, możesz zobaczyć obraz rzeczywisty w taki sam sposób jak obraz pozorny. Siatkówka oka pełni skutecznie funkcję ekranu.
7. Wysokość lustra powinna być równa połowie twojego wzrostu, a jego górna krawędź powinna być na wysokości twoich oczu. Rozmiar nie zależy od twojej odległości od lustra.
9. Kiedy przedmiot znajduje się w nieskończoności, zob. równanie zwierciadła.
11. Tak, ujemne powiększenie oznacza tylko, że obraz jest odwrócony, a nie, że jest większy niż przedmiot. Na przykład, jeśli odległość przedmiotu od zwierciadła wklęsłego jest większa niż ogniskowa, a mniejsza niż dwukrotność ogniskowej, wtedy powstaje obraz odwrócony i powiększony.
13. Odpowiedzi są różne.
15. Ogniskowa obiektywu (pojedynczej soczewki) jest stała, więc odległość obrazu może zmieniać się tylko w zależności od odległości przedmiotu.
17. Tak, ogniskowa się zmieni. Z równania soczewki wynika, że ogniskowa zależy od współczynnika załamania światła w ośrodku otaczającym soczewkę. Ponieważ współczynnik załamania dla wody jest inny niż dla powietrza, ogniskowa soczewki zmieni się, gdy zanurzymy ją w wodzie.
20. Osoba po wymianie soczewki oka będzie potrzebowała okularów do czytania, ponieważ jej mięśnie nie mogą już rozciągać sztucznej soczewki, tak jak robiły to z naturalną. W rezultacie nowa soczewka nie skupia obrazu bliskich przedmiotów. Jeśli osoba była krótkowzroczna, jej nowa soczewka musi mieć mniejszą moc skupiającą niż usunięta soczewka.
22. Ponieważ mikroskopy tworzą obraz makroskopowy. Dlatego do analizy obrazu można zastosować optykę geometryczną.
24. Gdy okular odsuniemy od obiektywu, tak by obraz utworzony przez obiektyw powstał w odległości nieco większej niż

ogniskowa okularu.

ZADANIA

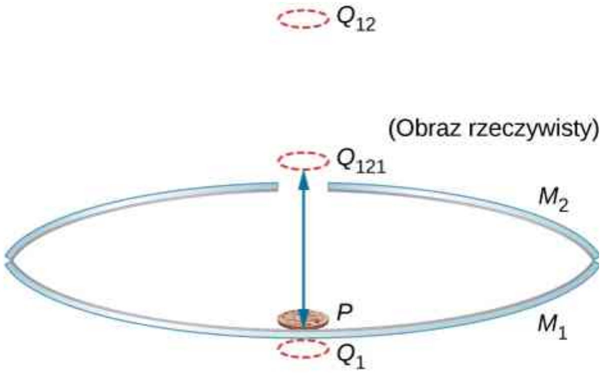


26.
28. Włókno żarówki znajduje się w ognisku dużego zwierciadła i w środku krzywizny małego zwierciadła.
30. $f = R / 2 \Rightarrow R = +1{,}6\,\mathrm{m}$.
32. $d_\mathrm{p} = 27{,}3\ \mathrm{cm}$.
34. 1: Zagadnienie dotyczy powstawania obrazu w zwierciadle. Powstaje obraz w lustrze; 2: Wykonaj rysunek. Zilustruj sytuację; 3: Do rozwiązania tego zadania zastosuj równanie cienkiej soczewki; 4: Znajdź f ; 5: Dane: $p = 1{,}5$, $d_\mathrm{p} = 0{,}12\,\mathrm{m}$; 6: Konstrukcja biegu promieni nie jest konieczna; 7: Użyj $p = -d_\mathrm{o} \,/\, d_\mathrm{p}$, $d_\mathrm{o} = -0{,}18\,\mathrm{m}$. Stąd: $f = 0{,}36\,\mathrm{m}$; 8: Powstaje obraz pozorny, ponieważ odległość obrazu jest ujemna. Ogniskowa jest dodatnia, a więc zwierciadło jest wklęsłe.
36. a. Dla zwierciadła wypukłego $d_\mathrm{o} < 0 \Rightarrow p > 0$, $p = +0{,}111$; b. $d_\mathrm{o} = -0{,}334\ \mathrm{cm}$ (za rogówką); c. $f = -0{,}376\ \mathrm{cm}$, tak więc $R = -0{,}752\ \mathrm{cm}$.
38. $p = h_\mathrm{o} \,/\, h_\mathrm{p} = -d_\mathrm{o} \,/\, d_\mathrm{p} = -\left(-d_\mathrm{p} \,/\, d_\mathrm{p}\right) = d_\mathrm{p} \,/\, d_\mathrm{p} = 1 \Rightarrow h_\mathrm{o} = h_\mathrm{p}$.

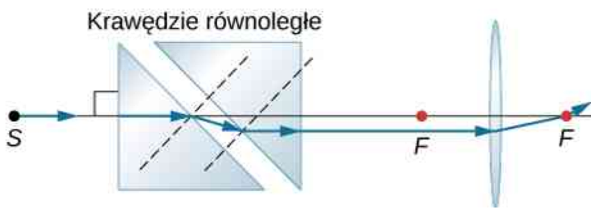


40. $p = -11$, $A' = 0{,}11\,\mathrm{m}^2$, $I = 6{,}82\,\mathrm{kW} \,/\, \mathrm{m}^2$.
42. $x_{2m} = -x_{2m-1}$ $(m = 1, 2, 3, \dots)$, $x_{2m+1} = b - x_{2m}$ $(m = 0, 1, 2, \dots)$ dla $x_0 = a$.
44. $d_\mathrm{o} = -55\ \mathrm{cm}$, $p = +1{,}8$.
46. $d_\mathrm{o} = -41\ \mathrm{cm}$, $p = +1{,}4$.
48. (Dowód)
50. a. $1 / d_\mathrm{o} + 1 \,/\, d_\mathrm{p} = 1 / f \Rightarrow d_\mathrm{o} = 3{,}43\,\mathrm{m}$; b. $p = -33{,}33$, zatem $2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} \cdot 33{,}33 = 80\ \mathrm{cm}$ – wysokość obrazu oraz $3{,}6 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} \cdot 33{,}33 = 120\ \mathrm{cm}$ – szerokość obrazu.
52. a. $1 \,/\, d_\mathrm{p} + 1 \,/\, d_\mathrm{o} = 1 \,/\, f$, $d_\mathrm{o} = 5{,}08\,\mathrm{cm}$; b. $p = -1{,}695 \cdot 10^{-2}$, zatem maksymalna wysokość wynosi $0{,}036\,\mathrm{cm} \,/\, \left(1{,}695 \cdot 10^{-2}\right) = 2{,}12\,\mathrm{m} \Rightarrow 100\%$; c. Ustawienie jest dość sensowne, ponieważ w odległości $3\,\mathrm{m}$ cała osoba zmieści się w kadrze.
54. a. $1 \,/\, d_\mathrm{p} + 1 \,/\, d_\mathrm{o} = 1 \,/\, f \Rightarrow d_\mathrm{p} = 2{,}55\,\mathrm{m}$; b. $h_\mathrm{o} \,/\, h_\mathrm{p} = -d_\mathrm{o} \,/\, d_\mathrm{p} \Rightarrow h_\mathrm{p} = 1\,\mathrm{m}$.

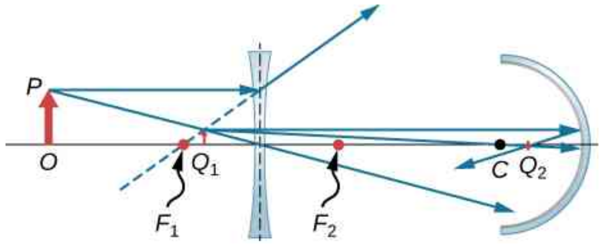
56. a. Korzystamy z $1 / d_p + 1 / d_o = 1 / f$, $d_o = -56{,}67\,\text{cm}$. Następnie wyznaczamy powiększenie $p = 6{,}67$; b. $d_o = -190\,\text{cm}$ i $p = +20$; c. Powiększenie p wzrasta gwałtownie, gdy zwiększamy odległość przedmiotu od szkła powiększającego.
58. $1 / d_p + 1 / d_o = 1 / f$, $d_o = 1 / \left[(1 / f) - (1 / d_p)\right]$, $d_o / d_p = 6{,}667 \cdot 10^{-13} = -h_o / h_p$, $h_o = -0{,}933\,\text{mm}$.
60. $d_o = -6{,}7\,\text{cm}$, $h_o = 4\,\text{cm}$.
62. $83\,\text{cm}$ za soczewką skupiającą, $p = -2{,}3$, $h_o = 6{,}9\,\text{cm}$.
64. $Z = 52\,\text{D}$.
66. $h_o / h_p = -d_o / d_p \Rightarrow h_o = -h_p \cdot d_o / d_p = -3{,}5\,\text{mm} \cdot 2\,\text{cm} / 30\,\text{cm} = -0{,}233\,\text{mm}$.
70. Zdolność skupiająca przed operacją wynosiła $51\,\text{D}$, zatem $Z = 1 / d_p + 1 / d_o \Rightarrow d_p = 1\,\text{m}$.
77. $p_k = 6$.
79. $p_k = 25\,\text{cm} / L \cdot \left[1 + (L - l) / f\right]$, $L - l = d_p$, $d_p = 13\,\text{cm}$.
81. $p_k = 2{,}5$.
83. $p_k = -2{,}1$.
85. $p_k = 25\,\text{cm} / f$, $p_{k\,max} = 5$.
87. $p_{k\,max}^{młoda} = 1 + 18\,\text{cm} / f \Rightarrow f = 18\,\text{cm} / \left(p_{k\,max}^{młoda} - 1\right)$, $p_{k\,max}^{starsza} = 9{,}8$.
89. a. $1 / d_p + 1 / d_o = 1 / f \Rightarrow d_o = 4{,}65\,\text{cm} \Rightarrow p = -30$; b. $p_{cał} = -240$.
91. a. $1 / d_p^{ob} + 1 / d_o^{ob} = 1 / f^{\,ob} \Rightarrow d_o^{ob} = 18{,}3\,\text{cm}$ za obiektywem; b. $p^{ob} = -60$; c. $d_p^{ok} = 1{,}7\,\text{cm}$, $d_o^{ok} = -11{,}3\,\text{cm}$ przed okularem; d. $p_k^{ok} = 13{,}5$; e. $p_{cał} = -810$.
93. $p_k = -40$.
95. $f^{\,ob} = R / 2$, $p_k = -1{,}67$.
97. $p_k = -f^{\,ob} / f^{\,ok}$, $f^{\,ok} = +10\,\text{cm}$.
99. Odpowiedzi są różne.
101. $12\,\text{cm}$ na lewo od zwierciadła, $p = 3 / 5$.
103. $27\,\text{cm}$ przed zwierciadłem, $p = 0{,}6$, $h_o = 1{,}76\,\text{cm}$, obraz prosty.
105. Poniższy rysunek przedstawia trzy kolejne obrazy zaczynające się od obrazu Q_1 w zwierciadle M_1, którego obrazem w zwierciadle M_2 jest Q_{12}, którego obrazem w zwierciadle M_1 jest rzeczywisty obraz Q_{121} .



107. $5{,}4\,\text{cm}$ od osi.
109. Niech wierzchołek wklęsłego zwierciadła będzie początkiem układu współrzędnych. Obraz 1 znajduje się na $-10 / 3\,\text{cm}$ $(-3{,}3\,\text{cm})$, a obraz 2 na $-40 / 11\,\text{cm}$ $(-3{,}6\,\text{cm})$. Obrazy te są przedmiotami dla kolejnych obrazów znajdujących się na $-310 / 83\,\text{cm}$ $(-3{,}7\,\text{cm})$, $-9340 / 2501\,\text{cm}$ $(-3{,}7\,\text{cm})$, $-140\,720 / 37\,681\,\text{cm}$ $(-3{,}7\,\text{cm})$. Wszystkie pozostałe obrazy znajdują się w przybliżeniu na $-3{,}7\,\text{cm}$.



111.



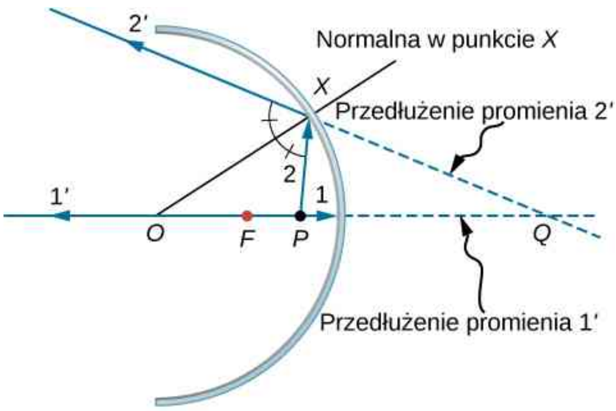
113.

115. $-5D$.

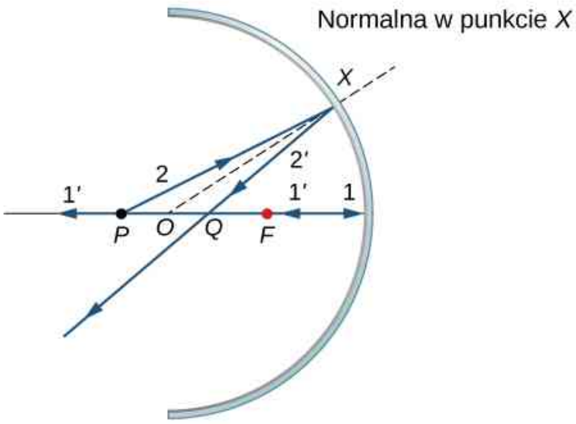
117. 11.

ZADANIA DODATKOWE

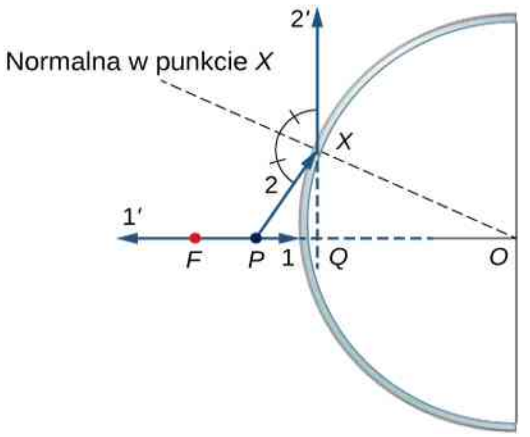
119. a.



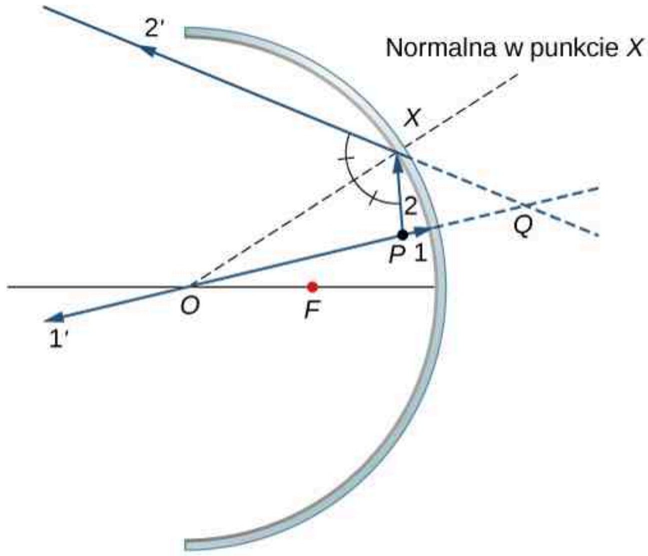
b.

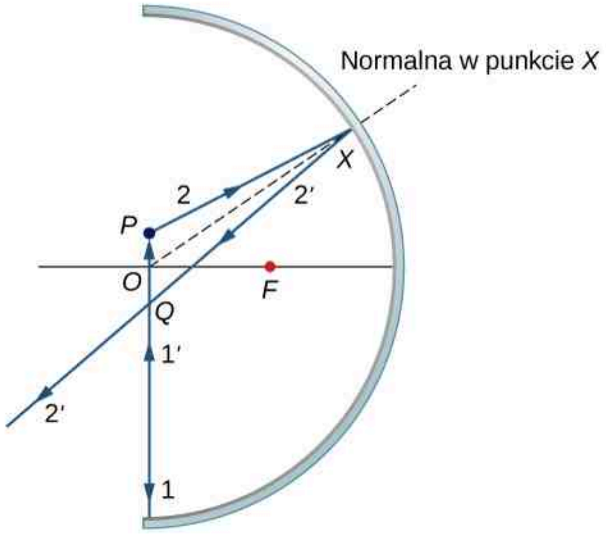


c.

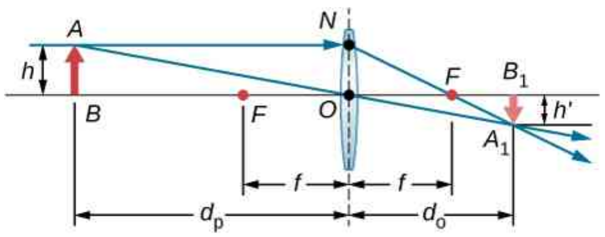


d. Podobnie jak w przypadku poprzedniego rysunku, ale punkt P znajduje się dalej niż ogniskowa; e. Powtórz (a)–(d) dla punktowego przedmiotu znajdującego się poza osią optyczną. Dla punktowego przedmiotu umieszczonego poza osią optyczną naprzeciwko wklęsłego zwierciadła – odpowiednio (a) i (b); przypadek zwierciadła wypukłego pozostawiono jako ćwiczenie.





121. $d_o = -10 / 3$ cm , $h_o = 2$ cm , nieodwrócony.
123. (Dowód)



125. Trójkąty BAO i B_1A_1O są trójkątami podobnymi. Wobec tego $A_1B_1 / (AB) = d_o / d_p$. Trójkąty NOF i B_1A_1F są trójkątami podobnymi. Zatem $NO / f = A_1B_1 / (d_o - f)$. Dla $NO = AB$ otrzymujemy $AB / f = A_1B_1 / (d_o - f)$, czyli $AB / (A_1B_1) = f / (d_o - f)$. Odwrócenie tego równania daje wyrażenie $A_1B_1 / (AB) = (d_o - f) / f$. Przyrównawszy te dwa wyrażenia, otrzymujemy $d_o / d_p = (d_o - f) / f$. Podzieliwszy obustronnie przez d_o , otrzymujemy $1 / d_p = 1 / f - 1 / d_o$, czyli $1 / d_p + 1 / d_o = 1 / f$.
127. 70 cm .
129. Płaskie zwierciadło ma ognisko w nieskończoności, a więc $d_o = -d_p$. Całkowita odległość pozorna od mężczyzny do obrazu w lustrze będzie sumą odległości mężczyzny od lustra i odległości obrazu: $d_p + (-d_o) = 2d_p$. Jeśli ta odległość ma

być mniejsza niż 20 cm , to mężczyzna powinien stanąć w odległości $d_p = 10\,\text{cm}$.
131. Chcemy, aby $d_p = 25\,\text{cm} - 2{,}2\,\text{cm} = 0{,}228\,\text{m}$. Jeśli x jest odległością punktu bliży, to $d_o = -(x - 0{,}022\,\text{m})$. Wówczas $Z = 1 \big/ d_p + 1 / d_o = 1 / 0{,}228\,\text{m} + 1 / (x - 0{,}022\,\text{m})$. Po podstawieniu $Z = 0{,}75\,\text{D}$ otrzymujemy $x = 0{,}253\,\text{m}$, a więc punkt bliży znajduje się w odległości 25,3 cm .
133. Zakładając, że soczewka znajduje się w odległości 2 cm od oka chłopca, odległość obrazu wynosi $d_o = -(500\,\text{cm} - 2\,\text{cm}) = -498\,\text{cm}$. Dla wszystkich skończonych odległości przedmiotu wymagana zdolność skupiająca wynosi $Z = 1 / d_o = -0{,}2\,\text{D}$. Zatem soczewka o zdolności skupiającej $-4\,\text{D}$ aż nadto wystarczy, aby skorygować krótkowzroczność u tego chłopca.
135. $87\,\mu\text{m}$.
137. Zastosuj zależność $p_{\text{cał}} = -d_o^{\text{ob}} \left(f^{\text{ok}} + 25\,\text{cm}\right) \big/ \left(f^{\text{ob}} f^{\text{ok}}\right)$. Odległość obrazu dla obiektywu wynosi $d_o^{\text{ob}} = -p_{\text{cał}} f^{\text{ob}} f^{\text{ok}} \big/ \left(f^{\text{ok}} + 25\,\text{cm}\right)$. Podstawiwszy $f^{\text{ob}} = 3\,\text{cm}$, $f^{\text{ok}} = 10\,\text{cm}$ oraz $p_{\text{cał}} = -10$, otrzymujemy $d_o^{\text{ob}} = 8{,}6\,\text{cm}$. Chcemy, aby obiektyw utworzył obraz w ognisku okularu, ponieważ wtedy oko zobaczy łatwy do obserwacji obraz w nieskończoności. Zatem, odległość d pomiędzy soczewkami powinna wynosić $d = f^{\text{ok}} + d_o^{\text{ob}} = 10\,\text{cm} + 8{,}6\,\text{cm} \approx 19\,\text{cm}$.
139. a. Ogniskowa soczewek korekcyjnych wynosi $f_k = -80\,\text{cm}$; b. $-1{,}25\,\text{D}$.
141. $2 \cdot 10^{16}\,\text{km}$.
143. $10^5\,\text{m}$.

ROZDZIAŁ 3

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

3.1. Wartości tych kątów wynoszą odpowiednio: $3{,}63°$ i $7{,}27°$.
3.2. a. 853 nm , 1097 nm ; b. 731 nm , 975 nm .
3.3. a. Za mały; b. O $8 \cdot 10^{-5}$.

PYTANIA

1. Nie. Dwa niezależne źródła światła nie mogą być źródłem fal koherentnych.
3. Ponieważ żadna z lamp sodowych nie jest źródłem fal koherentnych. Światło z dwóch niezależnie pracujących laserów tego typu również nie jest światłem koherentnym, dlatego także i w tym przypadku nie otrzymamy obrazu interferencyjnego.
5. Dla światła monochromatycznego jasne prążki pojawiają się dla wartości kątów spełniających równanie $d \sin\theta = m\lambda$. W przypadku, gdy doświadczenie przeprowadzimy, używając światła białego, dla każdej fali o różnej długości jasne prążki pojawią się pod innym kątem. W konsekwencji otrzymamy kolorowe prążki posiadające wszystkie kolory ze spektrum światła białego, czyli takie, jakie widzimy w tęczy.
7. Różnica dróg optycznych decyduje o tym, czy fale, które się spotkają, różnią się w fazie, i jest bezpośrednią przyczyną tego, czy fale interferują konstruktywnie, czy też destruktywnie. Przy odbiciu może wystąpić przesunięcie fazy o 180°, co wpływa na wynik interferencji. Załamaniu fali przy przejściu z jednego ośrodka do drugiego towarzyszy zmiana długości fali, zatem fala może opuścić ten ośrodek w innej fazie niż inny promień, który przebył tę samą drogę, ale w innym ośrodku (o odmiennym współczynniku załamania).
9. Zmiana fazy nastąpi przy odbiciu od górnej powierzchni szkiełka nakrywkowego oraz górnej powierzchni szkiełka podstawowego.
11. Jeśli powierzchnia szynki jest wilgotna, to oznacza, że znajduje się na niej cienka warstwa wody, w której zachodzi zjawisko interferencji w cienkich warstwach. Ponieważ grubość tej warstwy nie jest taka sama w różnych częściach plasterka, to dla różnych długości fali (plasterek szynki oświetlamy światłem białym) będzie następowała konstruktywna interferencja, stąd pojawienie się różnych kolorów w świetle odbitym.
13. Zwykle dla różnych długości fal nie jest jednocześnie spełniony warunek na całkowicie destruktywną interferencję $d = (\lambda / n) / 4$ dla tej samej grubości d . Dla światła padającego pod kątem θ do normalnej powierzchni droga optyczna, jaką ma do pokonania promień wewnątrz warstwy, powiększa się o czynnik $1 / \cos\theta$, czyli nowy warunek na destruktywną interferencję ma postać: $d / \cos\theta = (\lambda / n) / 4$.
15. W jednym ramieniu trzeba umieścić szklany pojemnik, który wypełniamy badanym gazem. Patrz: Przykład 3.6.

ZADANIA

17. $0{,}997°$.
19. $0{,}29\,\mu\text{m}$.
21. $5{,}77 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = 577\,\text{nm}$.
23. 62,5 , ale wiemy, że m musi być liczbą całkowitą, zatem $m = 62$.
25. $1{,}44\,\mu\text{m}$.
27. a. 20,3° ; b. 4,98° ; c. 5,76 , zatem największy rząd maksimum to $m = 5$.
29. a. 2,37 cm ; b. 1,78 cm .
31. 560 nm .
33. 1,2 mm .
35. a. 0,4° , 0,53° ; b. $4{,}6 \cdot 10^{-3}\,\text{m}$.
37. 1:9.
39. 532 nm (kolor zielony).

41. $8{,}39 \cdot 10^{-8}\,\text{m} = 83{,}9\,\text{nm}$.
43. $620\,\text{nm}$ (kolor pomarańczowy).
45. $380\,\text{nm}$.
47. a. Zakładając, że współczynnik załamania powierzchni samolotu n jest większy niż $1{,}2$, mamy dwa przypadki zmiany fazy fal, co daje grubość warstwy równą $0{,}833\,\text{cm}$; b. Powłoka o takiej grubości spowoduje, że samolot będzie miał za dużą masę; c. Błędne jest założenie, że samolot można pokryć warstwą o dowolnej grubości.
49. $4{,}55 \cdot 10^{-4}\,\text{m}$.
51. $2{,}53 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$.

ZADANIA DODATKOWE

53. $0{,}29°$, $0{,}86°$.
55. a. $4{,}26\,\text{cm}$; b. $2{,}84\,\text{cm}$.
57. 6 .
59. $0{,}2\,\text{m}$.
61. $0{,}0839\,\text{mm}$.
63. a. $9{,}8\text{ cm}$, $10{,}4\text{ cm}$, $11{,}7\text{ cm}$, $15{,}7\text{ cm}$; b. $3{,}9\text{ cm}$.
65. $0{,}0575°$.
67. 700 nm .
69. 189 nm .
71. a. Zielony (504 nm); b. Purpurowy (biały minus zielony).
73. $1{,}29$.
75. $52{,}7\,\mu\text{m}$, $53\,\mu\text{m}$.
77. 160 nm .
79. 413 nm i 689 nm .
81. $73{,}9\,\mu\text{m}$.
83. 47 .
85. $8{,}5\,\mu\text{m}$.
87. $0{,}013\,°\text{C}$.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

89. Ciemne i jasne prążki zamienią się miejscami.
91. Długość drogi optycznej musi być mniejsza od $1\,/\,4$ długości fali dla wszystkich długości fali światła widzialnego. Grubość warstwy benzyny jest równa połowie długości drogi optycznej, zatem musi być mniejsza niż $1\,/\,8$ długości najkrótszej fali z widma światła białego w benzynie. Jeśli uznamy, że $380\,\text{nm}$ to najkrótsza długość fali widocznej w powietrzu, to największa grubość warstwy benzyny wynosi $33{,}9\,\text{nm}$.
93. $4{,}42 \cdot 10^{-5}\,\text{m}$.
95. Dla jednej zmiany fazy: $950\,\text{nm}$ (promieniowanie podczerwone); dla trzech zmian fazy: $317\,\text{nm}$ (ultrafiolet); zatem plama benzyny będzie ciemna, bo wzmocnione światło odbite nie należy do zakresu widzialnego.

ROZDZIAŁ 4

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

4.1. $17{,}8°$, $37{,}7°$, $66{,}4°$; nie.
4.2. $74{,}3°$, $0{,}0083 I_0$.
4.3. Z $d \sin\theta = m\lambda$ obliczamy, że maksimum interferencji dla $m = 20$ występuje przy $2{,}87°$. Z Równania 4.1 wynika, iż jest to również kąt drugiego minimum dyfrakcyjnego. (Uwaga: oba równania wykorzystują indeks m, ale odnoszą się do odrębnych zjawisk).
4.4. $3{,}332 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$ lub 300 linii na milimetr.
4.5. $8{,}4 \cdot 10^{-4}\,\text{rad}$, 3000 razy szersza niż rozdzielczość teleskopu Hubble’a.
4.6. $38{,}4°$ i $68{,}8°$; kąt θ między $0°$ a $90°$, istnieją jedynie rzędy 1 , 2 i 3 .

PYTANIA

1. Obraz dyfrakcyjny stanie się szerszy.
3. *Walkie-talkie* wykorzystują fale radiowe, których długości są porównywalne z wielkością wzgórza, a zatem mogą się wokół niego uginać. Długości fal wysyłanych przez latarkę mieszczą się w zakresie światła widzialnego i w tej skali (skali rozmiarów wzgórza) poruszają się jako promienie biegnące prostoliniowo.
5. Obraz dyfrakcyjny staje się dwuwymiarowy, przy czym jasne prążki coraz bardziej przeobrażają się w punkty, biegnąc w kierunku prostopadłym, a słabsze maksima występują w kierunkach pośrednich.
7. Parametr $\beta = \phi\,/\,2$ jest kątem łuku pokazanego na wykresie wskazowym na Rysunku 4.7 . Różnica faz dla pierwszej i ostatniej fali wtórnej, wysyłanych ze skrajnych punktów mierzonych w poprzek jednej szczeliny, wynosi 2β i jest związana z krzywizną łuku, którą określa wskaz wypadkowy, a ten z kolei daje informację o natężeniu światła.
9. Dla niebieskiego. Krótsza długość fali niebieskiego światła obniża wartość kąta dla dyfrakcyjnej granicy rozdzielczości.
11. Nie, te odległości są trzy rzędy wielkości mniejsze niż długość fali światła widzialnego, tak więc światło widzialne jest słabą sondą dla atomów.
13. Długość fali UV jest znacznie większa niż odległości (atomów, płaszczyzn sieciowych) w kryształach, tak że zjawisko

dyfrakcji nie zachodzi. Przedstawia to równanie Bragga. Otrzymuje się wartość sin θ większą niż jedność, przez co równanie nie ma rozwiązania.
15. Podczas wyświetlania przy użyciu krótszej o 10% długości fali obraz będzie się pojawiał w nieco innym miejscu i/lub rozmiarze, z kolei podczas wyświetlania przy użyciu długości fali krótszej dokładnie o połowę interferencja wyższego rzędu przywraca oryginalny obraz, choć w innym kolorze.

ZADANIA

17. a. $33{,}4°$; b. Nie.
19. a. $1{,}35 \cdot 10^{-6}$ m; b. $69{,}9°$.
21. 750 nm.
23. 2,4 mm, 4,7 mm.
25. a. 1λ; b. 50λ; c. 1000λ.
27. 1,92 m.
29. $45{,}1°$.
31. $I / I_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-5}$.
33. $0{,}63I_0$, $0{,}11I_0$, $0{,}0067I_0$, $0{,}0062I_0$, $0{,}000\,88I_0$.
35. 0,2.
37. 3.
39. 9.
41. $5{,}97°$.
43. $8{,}99 \cdot 10^3$.
45. 707 nm.
47. a. $11{,}8°$, $12{,}5°$, $14{,}1°$, $19{,}2°$; b. $24{,}2°$, $25{,}7°$, $29{,}1°$, $41°$; c. Zmniejszenie liczby linii na centymetr o czynnik x oznacza, że kąt dla maksimum x-tego rzędu jest taki sam jak pierwotny kąt dla maksimum pierwszego rzędu.
49. a. Przyjmując $\lambda = 700$ nm, $\theta = 5°$; b. Przyjmując $\lambda = 460$ nm, $\theta = 3{,}3°$.
51. a. 26 300 linii / cm; b. Tak; c. Nie.
53. $1{,}13 \cdot 10^{-2}$ m.
55. 107 m.
57. a. $7{,}72 \cdot 10^{-4}$ rad; b. 23,2 m; c. 590 km.
59. a. $2{,}24 \cdot 10^{-4}$ rad; b. 5,81 km; c. 0,179 mm; d. Można rozróżnić szczegóły odległe od siebie o 0,2 mm.
61. 2,9 µm.
63. 6 cm.
65. 7,71 km.
67. 1 m.
69. 1,2 cm lub bliżej.
71. Nie.
73. 0,12 nm.
75. $4{,}51°$.
77. $13{,}2°$.

ZADANIA DODATKOWE

79. a. 2,2 mm; b. $0{,}172°$. Pokrywają się drugi rząd dla żółtego i trzeci rząd dla fioletowego.
81. 2,2 km.
83. 1,3 cm.
85. a. 0,28 mm; b. 0,28 m; c. 280 m; d. 113 km.
87. 33 m.
89. a. Pionowo; b. $\pm 20°$, $\pm 44°$; c. 0, $\pm 31°$, $\pm 60°$; d. 89 cm; e. 71 cm.
91. 0,98 cm.
93. $I / I_0 = 0{,}041$.
95. 340 nm.
97. a. 0,082 rad, 0,087 rad; b. 480 rad, 660 rad.
99. Dwa rzędy.
101. Tak; nie dotyczy.
103. 600 nm.
105. a. $0{,}000\,034°$; b. $51°$.
107. 0,63 m.
109. 1.
111. $0{,}17\,\mathrm{mW} / \mathrm{cm}^2$ tylko dla $m = 1$; brak wyższych rzędów.
113. $28{,}7°$.
115. a. 42,3 nm; b. Ta długość fali nie znajduje się w zakresie światła widzialnego; c. Liczba szczelin w tej siatce dyfrakcyjnej jest zbyt duża. Proces trawienia w układach scalonych można przeprowadzić do rozdzielczości 50 nm, więc rozstawy szczelin równe 400 nm są na granicy tego, co można dzisiaj uzyskać. Dany rozstaw linii jest za mały, aby uzyskać dyfrakcję światła widzialnego.
117. a. 549 km; b. Jest to niezmiernie duży teleskop jak dla amatora; c. Nieuzasadnione jest przyjęcie granicy dyfrakcji dla teleskopów optycznych pracujących w kosmosie, gdyż na Ziemi na rozdzielczość wpływają dodatkowo efekty

atmosferyczne.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

119. a. $I = 0{,}005 I_0$, $I = 0{,}003\,35 I_0$; b. $I = 0{,}005 I_0$, $I = 0{,}003\,35 I_0$.
121. 12 800 .
123. $1{,}58 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}$.

ROZDZIAŁ 5

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

5.1. Szczególna teoria względności odnosi się jedynie do układów poruszających się ze stałą prędkością, natomiast ogólna teoria względności bierze pod uwagę także układy przyspieszające.
5.2. $\gamma = 1 \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2} = 1 \Big/ \sqrt{1 - (0{,}65c)^2 / c^2} = 1{,}32$.
5.3. a. $\Delta t = \Delta\tau \Big/ \sqrt{1 - (v / c)^2} = 2{,}1 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s} \Big/ \sqrt{1 - \left[\left(1{,}9 \cdot 10^8\,\mathrm{m / s}\right) / \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m / s}\right)\right]^2} = 2{,}71 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$;
b. Tylko prędkość względna obu statków jest istotna, ponieważ w kosmosie nie istnieje ruch bezwzględny. Sygnał jest emitowany z ustalonego położenia w układzie odniesienia statku A, a więc czas własny emisji sygnału wynosi $\tau = 1\,\mathrm{s}$. Czas emisji sygnału w układzie odniesienia statku B wynosi wtedy $\Delta t = \Delta\tau \Big/ \sqrt{1 - (v / c)^2} = 1\,\mathrm{s} \Big/ \sqrt{1 - \left[\left(4 \cdot 10^7\,\mathrm{m / s}\right) / \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m / s}\right)\right]^2} = 1{,}01\,\mathrm{s}$.
5.4. $L = L_0\sqrt{1 - v^2 / c^2} = 2{,}5\,\mathrm{km} \cdot \sqrt{1 - (0{,}75c)^2 / c^2} = 1{,}65\,\mathrm{km}$.
5.5. Zacznijmy od definicji zmiany czasu własnego: $\mathrm{d}\tau = \sqrt{-(\mathrm{d}s)^2 / c^2} - \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right) / c^2}$, gdzie $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z, c\,\mathrm{d}t)$ są mierzone w inercjalnym układzie odniesienia obserwatora, który niekoniecznie widzi cząstkę jako spoczywającą. A zatem otrzymujemy: $\mathrm{d}\tau = \sqrt{-(\mathrm{d}s)^2 / c^2} - \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right) / c^2} = \mathrm{d}t\sqrt{1 - \left[(\mathrm{d}x / \mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}y / \mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}z / \mathrm{d}t)^2\right] / c^2}$, czyli $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\sqrt{1 - v^2 / c^2}$, z czego wynika, że $\mathrm{d}t = \gamma\,\mathrm{d}\tau$.
5.6. Chociaż przemieszczenia prostopadłe do kierunku ruchu względnego są takie same w obu układach odniesienia, to czas trwania pomiędzy dwoma zdarzeniami jest różny, a różnice między $\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}t'$ prowadzą do różnych prędkości oglądanych z dwóch układów odniesienia.
5.7. Możemy podstawić dane bezpośrednio do wzoru na relatywistyczną częstotliwość Dopplera: $f_{\mathrm{obs}} = f_{\acute{z}\mathrm{r}}\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} = 1{,}5\,\mathrm{GHz} \cdot \sqrt{\frac{1 - 0{,}35c/c}{1 + 0{,}35c/c}} = 1{,}04\,\mathrm{GHz}$.
5.8. $p = \gamma m u = m u \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2}$, a więc otrzymujemy $p = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}985 \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m / s} \Big/ \sqrt{1 - (0{,}985c)^2 / c^2} = 1{,}56 \cdot 10^{-21}\,\mathrm{kg\,m / s}$.
5.9. $E_{\mathrm{k\,rel}} = (\gamma - 1) m c^2 = \left(1 \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2} - 1\right) m c^2$, zatem otrzymujemy $E_{\mathrm{k\,rel}} = \left(1 \Big/ \sqrt{1 - (0{,}992c)^2 / c^2} - 1\right) \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m / s}\right)^2 = 5{,}67 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{J}$.

PYTANIA

1. Drugi postulat, dotyczący prędkości światła. Fizyka klasyczna założyła już niezmienność zasad mechaniki we wszystkich układach odniesienia, ale prędkość impulsu świetlnego była różna w zależności od ruchu względnego układów odniesienia.
3. Tak, zakładając, że samolot porusza się ze stałą prędkością względem Ziemi. W tym przypadku ciało, na które w samolocie nie działa żadna siła zewnętrzna, nie porusza się względem samolotu, a także nie zmienia się jego prędkość względem Ziemi. Zarówno układ odniesienia związany z samolotem, jak i ten związany z Ziemią są układami inercjalnymi.
5. Obserwator poruszający się razem ze zdarzeniem obserwuje czas własny zdarzenia, który jest najkrótszym możliwym interwałem czasu w tym przypadku.
7. Długość ciała jest największa dla obserwatora, który porusza się razem z tym ciałem, a zatem mierzy długość własną zdarzenia.
9. a. Nie, nie w układzie odniesienia astronauty; b. Astronauta widzi ziemskie zegary, jakby znajdowały się w układzie spoczynkowym, który porusza się względem niego, a zatem obserwuje zwolnienie czasu; c. Nie, nie w układzie odniesienia astronauty; d. Tak, zmierzona przez niego odległość między gwiazdami jest krótsza; e. Obaj obserwatorzy zgadzają się co do prędkości względnej.
11. W tym przypadku nie obserwujemy zmiany w długości czy częstotliwości fali. Relatywistyczny efekt Dopplera zależy jedynie od prędkości względnej między źródłem i obserwatorem, a nie od jakiejkolwiek innej prędkości względnej.
13. Przesunięcie takie wskazuje na oddalanie się gwiazd od Ziemi, a co za tym idzie na rozszerzanie się Wszechświata. Co więcej – ruch ten jest przyspieszony, a prędkość przyjmuje większe wartości dla bardziej odległych gwiazd.
15. Tak, może się tak zdarzyć, jeżeli siła zewnętrzna jest równoważona przez inne siły zewnętrzne, tak że zewnętrzna siła wypadkowa jest równa zero.
17. Ze względu na straty energii termicznej, które odpowiadają energii kinetycznej losowego ruchu cząstek materiału, masa

wody ulega zmniejszeniu o bardzo małą wartość, jak opisywane jest to przez wzór wyrażający zależność między masą a energią.
19. Tak, w teorii efekt powinien być analogiczny dla dowolnej zmiany energii, jednak w przypadku konwencjonalnej elektrowni zmiany będą niemierzalnie małe.
21. Według szczególnej teorii względności nie. Żadne ciało o niezerowej masie nie może osiągnąć prędkości światła.

ZADANIA

23. a. $1{,}0328$; b. $1{,}15$.
25. $5{,}96 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$.
27. $0{,}8c$.
29. $0{,}14c$.
31. $48{,}6\,\mathrm{m}$.
33. Wykorzystując wartości podane w Przykładzie 5.3: a. $1{,}39\,\mathrm{km}$; b. $0{,}433\,\mathrm{km}$; c. $0{,}433\,\mathrm{km}$.
35. a. $10c$; b. Dana prędkość kanistra wynosi więcej niż prędkość światła; c. Nieracjonalne jest przyjęcie, że kanister będzie się poruszał w kierunku Ziemi z prędkością $1{,}2c$.
37. Kąt α zbliża się do $45°$, a osie t' i x' obracają się w kierunku brzegu stożka świetlnego.
39. $15\,\mathrm{m/s}$.
41. $32\,\mathrm{m/s}$.
43. a. Druga bila zbliża się z prędkością $-v$ i zatrzymuje się, gdy pierwsza kontynuuje ruch z prędkością $-v$; b. To zgadza się z zasadą zachowania pędu.
45. a. $t'_1 = 0\,\mathrm{s}$, $t'_2 = \tau$, $x'_1 = 0\,\mathrm{m}$, $x'_2 = 0\,\mathrm{m}$; b. $t'_1 = 0\,\mathrm{s}$, $t'_2 = \tau \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$, $x'_1 = 0\,\mathrm{m}$, $x'_2 = -v\tau \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$.
47. $0{,}615c$.
49. $0{,}696c$.
51. Dowód ze wzoru na składanie prędkości lub postulatu teorii względności o stałej prędkości światła.
53. $4{,}09 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{kg\,m/s}$.
55. a. $3{,}000\,000\,015 \cdot 10^{13}\,\mathrm{kg\,m/s}$; b. $1{,}000\,000\,005$.
57. $2{,}988 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s}$.
59. $0{,}512\,\mathrm{MeV}$.
61. $2{,}3 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{kg}$, z zaokrągleniem do dwóch cyfr znaczących.
63. a. $1{,}11 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$; b. $5{,}56 \cdot 10^{-5}$.
65. a. $7{,}1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$; b. $7{,}1 \cdot 10^{-3} = 7{,}1 \cdot 10^{-3}$; c. $\Delta m / m$ jest większy dla wodoru.
67. a. 208; b. $0{,}999\,988c$; sześć cyfr znaczących potrzebnych do znalezienia różnicy od c.
69. a. $6{,}92 \cdot 10^{5}\,\mathrm{J}$; b. $1{,}54$.
71. a. $0{,}914c$; b. Masa spoczynkowa elektronu wynosi $0{,}511\,\mathrm{MeV}$, a więc energia kinetyczna jest w przybliżeniu równa 150% energii spoczynkowej. Elektron powinien poruszać się z prędkością bliską prędkości światła.

ZADANIA DODATKOWE

73. a. $0{,}866c$; b. $0{,}995c$.
75. a. $4{,}303$ roku, z zaokrągleniem do trzech cyfr znaczących; b. $0{,}1434$ roku; c. $1 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$.
77. a. 4; b. $v = 0{,}867c$.
79. a. Statek kosmiczny A wysyła puls astronauty za pomocą sygnału radiowego do punktu B, gdzie znana jest prędkość względna obu statków i dzięki wzorowi na dylatację czasu możliwe jest obliczenie czasu własnego oryginalnego pomiaru; b. $66\,\mathrm{uderze\acute{n}/min} \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2} = 57{,}1\,\mathrm{uderzenia/min}$.
81. a. Pierwszy foton: $(0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m}, 0\,\mathrm{m})$ dla $t = t'$, drugi foton: $t' = -\left(vx/c^2\right) \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} = -\left(c/2 \cdot 1\,\mathrm{m}/c^2\right) \Big/ \sqrt{0{,}75} = -0{,}577\,\mathrm{m}/c = 1{,}93 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{s}$, $x' = x \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} = 1\,\mathrm{m} / \sqrt{0{,}75} = 1{,}15\,\mathrm{m}$; b. Jednoczesne dla A, niejednoczesne dla B.
83.
$t' = \left(t - vx/c^2\right) \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} = \left(4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s} - 0{,}6c \cdot 150 \cdot 10^3\,\mathrm{m}/c^2\right) \Big/ \sqrt{1 - (0{,}6)^2} = 1{,}88 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}$,
$x' = (x - vt) \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$, a zatem otrzymujemy
$x' = \left(150 \cdot 10^3\,\mathrm{m} - 0{,}6 \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}\right) \Big/ \sqrt{1 - (0{,}6)^2} = -1{,}01 \cdot 10^5\,\mathrm{m} = -101\,\mathrm{km}$,
$y' = y = 15\,\mathrm{km}$, $z' = z = 1\,\mathrm{km}$.
85. $\Delta t = \left(\Delta t' + v\Delta x'/c^2\right) \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} \Rightarrow 0\,\mathrm{s} = \left(\Delta t' + v \cdot 500\,\mathrm{m}/c^2\right) \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2}$; ponieważ $v \ll c$, możemy pominąć wyrażenie v^2/c^2 i obliczyć $\Delta t' = -50\,\mathrm{m/s} \cdot 500\,\mathrm{m} \Big/ \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2 = -2{,}78 \cdot 10^{-13}\,\mathrm{s}$. Różnica czasu jest bardzo mała, ale nie jest równa zero.
87.

$\Delta t' = \left(\Delta t - v\Delta x / c^2\right) \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2} \Rightarrow 0\,\mathrm{s} = \left[0{,}3\,\mathrm{s} - v \cdot 2 \cdot 10^9\,\mathrm{m} \Big/ \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2\right] \Big/ \sqrt{1 - v^2 / c^2}$,
stąd $v = 0{,}3\,\mathrm{s} \cdot \left(3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\right)^2 \big/ 2 \cdot 10^9\,\mathrm{m} = 1{,}35 \cdot 10^7\,\mathrm{m/s}$.

89. Zauważ, że wszystkie rozwiązania tego zadania będą podane z dokładnością do pięciu cyfr znaczących. a. $0{,}999\,47c$; b. $1{,}2064 \cdot 10^{11}$ lat; c. $1{,}2058 \cdot 10^{11}$ lat.
91. a. $-0{,}4c$; b. $-0{,}909c$.
93. a. $1{,}65\,\mathrm{km/s}$; b. Tak, jeśli prędkość światła byłaby tak mała, prędkości, które osiągamy na co dzień, byłyby większe niż 1% prędkości światła i dużo częściej moglibyśmy obserwować efekty relatywistyczne.
95. $775\,\mathrm{MHz}$.
97. a. $1{,}12 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{m/s}$; b. Tak nieduża prędkość pokazuje nam, jak mała musi być masa protonu (nawet najmniejszy pyłek jest od niego dużo masywniejszy).
99. a. $F = \mathrm{d}p / \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(mu \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2}\right) \Big/ \mathrm{d}t$, czyli $F = \mathrm{d}u \big/ \mathrm{d}t \cdot m \Big/ \sqrt{1 - u^2 / c^2} - 1/2 \cdot mu^2 \Big/ \left(1 - u^2 / c^2\right)^{3/2} \cdot 2 \cdot \mathrm{d}u / \mathrm{d}t$, stąd otrzymujemy $F = m \Big/ \left(1 - u^2 / c^2\right)^{3/2} \cdot \mathrm{d}u / \mathrm{d}t$; b. $F = m \Big/ \left(1 - u^2 / c^2\right)^{3/2} \cdot \mathrm{d}u / \mathrm{d}t = 1\,\mathrm{kg} \Big/ \left(1 - (1/2)^2\right)^{3/2} \cdot 1\,\mathrm{m/s^2} = 1{,}53\,\mathrm{N}$.
101. $90\,\mathrm{MeV}$.
103. a. Dowód z definicji; energia zależy głównie od pędu, a nie masy; b. Tak.
105. $1{,}07 \cdot 10^3$.
107. a. $6{,}56 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{kg}$; b. $m = 2001 \cdot \left(1\,\mathrm{m}^3 / 10001\right) \cdot 750\,\mathrm{kg} \big/ \mathrm{m}^3 = 150\,\mathrm{kg}$, a więc $\Delta m / m = 4{,}37 \cdot 10^{-10}$.
109. a. $0{,}314c$; b. $0{,}999\,95c$ z dokładnością do pięciu cyfr, aby pokazać różnicę.
111. a. $1\,\mathrm{kg}$; b. Taki ubytek masy byłby mierzalny, ale trudny do zaobserwowania gołym okiem, jako że wynosi on jedynie $0{,}01\%$ masy całkowitej.
113. a. $6{,}6 \cdot 10^{11}\,\mathrm{kg/s}$; b. $4{,}67 \cdot 10^{10}$ lat; c. $4{,}27 \cdot 10^9\,\mathrm{kg}$; d. $0{,}32\%$.

ROZDZIAŁ 6

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

6.1. Palnik Bunsena.
6.2. Długość fali odpowiadająca maksimum mocy promieniowania zmniejsza się wraz ze wzrostem temperatury.
6.3. $T_\alpha / T_\beta = 1 / \sqrt{3} \cong 0{,}58$, więc gwiazda β jest gorętsza.
6.4. $3{,}3 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.
6.5. Wnioski byłyby podobne, gdyż $\Delta E / E \approx 10^{-21}$.
6.6. $-0{,}91\,\mathrm{V}$, $1040\,\mathrm{nm}$.
6.7. $h = 6{,}4 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\,s} = 4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{eV\,s}$, $-3{,}5\%$.
6.8. $71\,\mathrm{pm} + 0{,}5\lambda_C = 72{,}215\,\mathrm{pm}$, $(\Delta\lambda)_{min} = 0\,\mathrm{m}$ dla kąta $0°$.
6.9. $121{,}5\,\mathrm{nm}$ i $91{,}1\,\mathrm{nm}$. Nie, ta seria znajduje się w zakresie ultrafioletowym.
6.10. $v_2 = 1{,}1 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s} \cong 0{,}0036c$, $L_2 = 2\hbar$, $E_{k2} = 3{,}4\,\mathrm{eV}$.
6.11. $1{,}7\,\mathrm{pm}$.
6.12. $\lambda = 2\pi n a_0 = 2 \cdot 3{,}324\,\mathrm{Å} = 6{,}648\,\mathrm{Å}$.
6.13. $\lambda = 1{,}417\,\mathrm{pm}$, $E_k = 261{,}56\,\mathrm{keV}$.
6.14. $0{,}052°$.
6.15. Podwoiłoby ją.

PYTANIA

1. Żółta gwiazda.
3. Kolor zmienia się od czerwonego do fioletowego przez wszystkie kolory tęczy.
5. Nie będzie między nimi różnic.
7. Ludzkie oko nie odbiera fal elektromagnetycznych w zakresie podczerwonym.
9. Nie.
11. Wyznaczając punkt przecięcia prostej z osią wartości napięcia (praca wyjścia) i nachylenie wykresu (stała Plancka).
14. Cząstkowej.
16. Odpowiedzi mogą być różne.
18. Nie; Tak.
20. Nie.
22. Pod kątem prostym.
25. Są w stanie podstawowym.
28. Zwiększy się.
30. Dla większych n .
31. Tak, nadmiar powyżej $13{,}6\,\mathrm{eV}$ stanie się energią kinetyczną wolnego elektronu.
33. Nie.
35. Promieniowanie rentgenowskie, ze względu na najlepszą zdolność rozdzielczą.

37. Fala de Broglie’a protonu.
39. Ponieważ obiekty makroskopowe mają niemierzalnie małą długość fali de Broglie’a.
40. Aby uniknąć zderzeń elektronów z cząsteczkami powietrza.
46. Nie.

ZADANIA

49. a. $0{,}81\,\mathrm{eV}$; b. $2{,}1 \cdot 10^{23}$; c. $2\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}$.
51. a. $7245\,\mathrm{K}$; b. $3{,}62\,\mathrm{\mu m}$.
53. Około $3\,\mathrm{K}$.
55. $4{,}835 \cdot 10^{18}\,\mathrm{Hz}$, $0{,}62\,\mathrm{\AA}$.
57. $263\,\mathrm{nm}$; Nie.
59. $3{,}69\,\mathrm{eV}$.
61. $4{,}09\,\mathrm{eV}$.
63. $5{,}54\,\mathrm{eV}$.
65. a. $1{,}89\,\mathrm{eV}$; b. $459\,\mathrm{THz}$; c. $1{,}21\,\mathrm{V}$.
67. $264\,\mathrm{nm}$, UV.
69. $1{,}95 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$.
71. $1{,}66 \cdot 10^{-32}\,\mathrm{kg\,m}/\mathrm{s}$.
73. $56{,}21\,\mathrm{eV}$.
75. $6{,}63 \cdot 10^{-23}\,\mathrm{kg\,m}/\mathrm{s}$, $124\,\mathrm{keV}$.
77. $82{,}9\,\mathrm{fm}$, $15\,\mathrm{MeV}$.
81. $\Delta\lambda_{30} / \Delta\lambda_{45} = 45{,}74\%$.
83. $121{,}5\,\mathrm{nm}$.
85. a. $0{,}661\,\mathrm{eV}$; b. $-10{,}2\,\mathrm{eV}$; c. $1{,}511\,\mathrm{eV}$.
87. $3038\,\mathrm{THz}$.
89. $97{,}33\,\mathrm{nm}$.
91. a. h / π; b. $3{,}4\,\mathrm{eV}$; c. $-6{,}8\,\mathrm{eV}$; d. $-3{,}4\,\mathrm{eV}$.
93. $n = 4$.
95. $365\,\mathrm{nm}$, UV.
97. Nie.
98. 7.
100. $145{,}5\,\mathrm{pm}$.
102. a. $20\,\mathrm{fm}$; b. $9\,\mathrm{fm}$.
104. a. $2{,}103\,\mathrm{eV}$; b. $0{,}846\,\mathrm{nm}$.
106. $80{,}9\,\mathrm{pm}$.
108. $2{,}21 \cdot 10^{-20}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$.
110. $9{,}929 \cdot 10^{32}$.
112. $\gamma = 1060$, $0{,}001\,24\,\mathrm{fm}$.
114. $24{,}11\,\mathrm{V}$.
115. a. $P = 2I / c = 8{,}67 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{N} / \mathrm{m}^2$; b. $a = PA / m = 8{,}67 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} / \mathrm{s}^2$; c. $74{,}91\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$.
117. $x = 4{,}965$.

ZADANIA DODATKOWE

119. $7{,}124 \cdot 10^{16}\,\mathrm{W} / \mathrm{m}^3$.
121. $1{,}034\,\mathrm{eV}$.
123. $5{,}93 \cdot 10^{18}$.
125. $387{,}8\,\mathrm{nm}$.
127. a. $4{,}02 \cdot 10^{15}$; b. $0{,}533\,\mathrm{mW}$.
130. a. $0{,}132\,\mathrm{pm}$; b. $9{,}39\,\mathrm{MeV}$; c. $0{,}047\,\mathrm{MeV}$.
132. a. $2\,\mathrm{kJ}$; b. $1{,}33 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m}/\mathrm{s}$; c. $1{,}33 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{N}$; d. Tak.
134. a. $0{,}003\,\mathrm{nm}$; b. $105{,}56^\circ$.
136. $n = 3$.
138. a. $a_0 / 2$; b. $-54{,}4\,\mathrm{eV} / n^2$; c. $a_0 / 3$, $-122{,}4\,\mathrm{eV} / n^2$.
140. a. 36; b. $18{,}2\,\mathrm{nm}$; c. UV.
142. $396\,\mathrm{nm}$, $5{,}23\,\mathrm{neV}$.
144. $7{,}3\,\mathrm{keV}$.
146. $728\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$, $1{,}5\,\mathrm{\mu V}$.
148. $\lambda = hc / \sqrt{E_\mathrm{k}(2E_0 + E_\mathrm{k})} = 3{,}705\,\mathrm{nm}$, $E_\mathrm{k} = 100\,\mathrm{keV}$.
150. $\Delta\lambda_\mathrm{C}^\mathrm{e} / \Delta\lambda_\mathrm{C}^\mathrm{p} = m_\mathrm{p} / m_\mathrm{e} = 1836$.
152. (Dowód)
154. $5{,}1 \cdot 10^{17}\,\mathrm{Hz}$.

ROZDZIAŁ 7

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

7.1. $(3+4i)(3-4i)=9-16i^2=25$.
7.2. $A=\sqrt{2\,/\,L}$.
7.3. $(1\,/\,2-1\,/\,\pi)\,/\,2=9\%$.
7.4. $4{,}1\cdot10^{-8}\,\text{eV}$, $1{,}1\cdot10^{-5}\,\text{nm}$.
7.5. Mamy zadany Hamiltonian oscylatora harmonicznego $\widehat{H}=\frac{-\hbar}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\frac{m\omega^2}{2}$. Równanie na stany własne operatora $\widehat{H}$ zapisujemy jako $\widehat{H}\psi_n(x)=E_n\psi_n(x)$. Tutaj E_n to dozwolone energie oscylatora harmonicznego (wartości własne operatora $\widehat{H}$). Udaje się pokazać, że $E_n=\hbar\omega(n+1\,/\,2)$, gdzie $n=0,1,2,\ldots$. Natomiast funkcje własne operatora $\widehat{H}$ zapisujemy jako $\psi_n(x)$ i są one wyrażone wzorem $\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$, gdzie wielomiany Hermite'a są zadane jako $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}$. Wartość średnią obserwabli położenia $\langle x\rangle$ zapisujemy $\langle x\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\psi_n^*(x)\hat{x}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|\psi_n(x)|^2\,\mathrm{d}x$. Zauważamy, że dla $n=0$ wielomian Hermite'a daje się zapisać jako $H_0(x)=(-1)^0 e^{x^2}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}e^{-x^2}=e^{x^2}e^{-x^2}=1$. Zatem dla $n=0$ mamy funkcję Gaussa będącą rozwiązaniem kwantowego oscylatora harmonicznego. Natomiast dla $n=1$ mamy $H_1(x)=(-1)e^{x^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x^2}=2x$ i dla $n=2$ otrzymujemy wielomian $H_2(x)=4x^2-2$. Dla parzystch n $(n=0,2,4,\ldots)$ wielomian $H_n(x)=H_n(-x)$ jest funkcją parzystą, a zatem kwadrat modułu funkcji falowej jest również funkcją parzystą. Wówczas wyrażenie $\langle x\rangle=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\left[\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\right]^2\mathrm{d}x=0$, gdyż $\left[\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\right]^2$ to funkcja parzysta, a iloczyn funkcji parzystej i nieparzystej (u nas jest nią x) w zadanych granicach całkowania względem x od $-\infty$ do $+\infty$ wynosi 0. Zauważamy, że dla $n=1,3,5,\ldots$ (nieparzystych wartości n) średnia wartość $\langle x\rangle$ jest także zerowa. Wynika to z faktu, że kwadrat modułu funkcji nieparzystej $\left[\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}e^{-m\omega x^2/(2\hbar)}H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)\right]^2$ jest funkcją parzystą (kwadrat każdego wielomianiu Hermite'a jest funkcją parzystą, co łatwo pokazać) i z tego, że iloczyn tej funkcji parzystej przez funkcję nieparzystą x jest funkcją antysymetryczną. Zatem dla danego poziomu energetycznego n w kwantowym oscylatorze harmonicznym zawsze wielkość średnia położenia wynosi $\langle x\rangle=0$.
7.6. Żadna. Pierwsza funkcja jest nieciągła; druga przyjmuje podwójne wartości, a trzecia jest rozbieżna, a przez to niemożliwa do znormalizowania.
7.7. a. $9{,}1\%$; b. 25%.
7.8. a. $295\,\text{N}\,/\,\text{m}$; b. $0{,}277\,\text{eV}$.
7.9. $\langle x\rangle=0$.
7.10. $L_\text{p}\,/\,L_\text{e}=\sqrt{m_\text{e}\,/\,m_\text{p}}=2{,}3\%$.

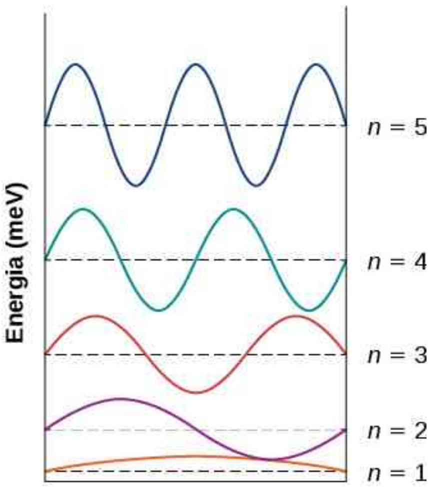
PYTANIA

1. $1\,/\,\sqrt{L}$, gdzie L – długość; $1\,/\,L$, gdzie L – długość.
3. Funkcja falowa nie odpowiada żadnej mierzalnej wielkości fizycznej. Jest to narzędzie do przewidywania wartości wielkości fizycznych.
5. Jest to średnia wartość wielkości fizycznej jaką uzyskuje się przy dużej (wielokrotnej) liczbie obserwacji układu fizycznego opisywanego daną funkcją falową.
7. Tak, jeżeli jej położenie jest całkowicie nieznane. Tak, jeżeli jej pęd jest całkowicie nieznany.
9. Nie – zgodnie z zasadą nieoznaczoności, jeżeli niepewność położenia cząstki jest mała, to niepewność wyznaczenia jej pędu będzie duża. Podobnie, jeżeli niepewność położenia cząstki jest duża, wówczas minimalna niepewność określenia jej pędu będzie mała.
11. Nie, oznacza to, że przewidywania dotyczące cząstki (wyrażone przez prawdopodobieństwo) są niezależne od czasu.
13. Tak może, ponieważ prawdopodobieństwo istnienia cząstki w wąskim (nieskończenie małym) przedziale nieciągłości jest nieskończenie małe.
15. Nie. W przypadku cząstki w pudełku odległość między kolejnymi poziomami energetycznymi rośnie wraz z liczbą kwantową n. Najmniejsza mierzalna energia odpowiada przejściu ze stanu $n=2$ do $n=1$ i jest trzykrotnością energii stanu podstawowego. Największa mierzalna energia odpowiada przejściu ze stanu $n\longrightarrow\infty$ do $n=1$ i jest równa nieskończoności (zauważ, że nawet cząstki o niezwykle dużych energiach są zamknięte w nieskończonej studni potencjału – nie mogą jej opuścić).
17. Nie. Ta energia odpowiada $n=0{,}25$, a n jest liczbą całkowitą.
19. Ponieważ najmniejszą możliwą liczbą kwantową n dla oscylatora harmonicznego jest 0 co odpowiada niezerowej energii stanu podstawowego. Nie narusza to zasady koreskpondencji, ponieważ mechanika kwantowa i mechanika klasyczna

zgadzają się jedynie w przypadku dużych n.
21. Taki pomiar jest możliwy z zachowaniem obostrzeń zasady nieoznaczoności. Jeżeli cząstka oscylująca jest zlokalizowana tzn jej położenie jest dokładniej znane to wówczas jej pęd jest mniej znany.
23. Dwukrotne zwiększenie szerokości bariery.
25. Nie, siła działająca na cząstkę przy ścianach nieskończonej studni potencjału jest nieskończona.

ZADANIA

27. $|\psi(x)|^2 \sin^2(\omega t)$.
29. (a) i (e), mogą być znormalizowane.
31. a. $A = \sqrt{2\alpha / \pi}$; b. Prawdopodobieństwo wynosi 29,3%; c. $\langle x \rangle = 0$; d. $\langle p \rangle = 0$; e. $\langle E_k \rangle = \alpha^2 \hbar^2 / (2m)$.
33. a. $\Delta p \geq 2{,}11 \cdot 10^{-34}$ Ns; b. $\Delta v \geq 6{,}31 \cdot 10^{-8}$ m; c. $\Delta v / \sqrt{k_B T / m_\alpha} = 5{,}94 \cdot 10^{-11}$.
35. $\Delta\tau \geq 1{,}6 \cdot 10^{-25}$ s.
37. a. $\Delta\nu \geq 1{,}59$ MHz; b. $\Delta\omega / \omega_0 = 3{,}135 \cdot 10^{-9}$.
39. Rozwiązując równanie różniczkowe, otrzymujemy $k^2 = \omega^2 / c^2$.
41. Różniczkując po funkcji sinus, uzyskujemy cosinus po prawej stronie równania, a więc równość nie jest spełniona. Podobna sytuacja występuje dla drugiej funkcji falowej.
43. $E = \hbar^2 k^2 / (2m)$.
45. $\hbar^2 k^2$. Cząstka ma określony pęd, a przez to określony jest też kwadrat pędu.
47. 9,4eV, 64%.
49. 0,38 nm.
51. 1,82 MeV.
53. 24,7 nm.
55. 6,03 Å.
57. a.



;
b. $\lambda_{5\longrightarrow 3} = 12{,}9$ nm, $\lambda_{3\longrightarrow 1} = 25{,}8$ nm, $\lambda_{4\longrightarrow 3} = 29{,}4$ nm.
59. Równanie 7.75.
61. $6{,}62 \cdot 10^{14}$ Hz.
63. $n \approx 2{,}037 \cdot 10^{30}$.
65. $\langle x \rangle = 0{,}5m\omega^2 \langle x \rangle = \hbar\omega / 4$, $\langle E_k \rangle = \langle E \rangle - \langle E_p \rangle = \hbar\omega / 4$.
67. Dowód.
69. Funkcja zespolona $Ae^{i\phi}$ spełnia niezależne od czasu równanie Schrödingera. Operatory energii kinetycznej i energii całkowitej są liniowe, a więc dowolna kombinacja liniowa takich równań falowych jest również poprawnym rozwiązaniem równania Schrödingera. A zatem wnioskujemy, że (a) w Równaniu 7.88 spełnia ona Równanie 7.81 i (b) w Równaniu 7.89 spełnia Równanie 7.83.
71. a. 4,21%; b. 0,84%; c. 0,06%.
73. a. 0,13%; b. bliskie 0%.
75. 0,38 nm.

ZADANIA DODATKOWE

77. Dowód.
79. a. 4%; b. 1,4%; c. 4%; d. 1,4%.
81. a. $t = mL^2 / h = 2{,}15 \cdot 10^{26}$ lat; b. $E_1 = 1{,}46 \cdot 10^{-66}$ J, $E_k = 0{,}4$ J.
83. Dowód.
85. 1,2N / m.
87. 0.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

89. $19{,}2\,\mu m$, $11{,}5\,\mu m$.
91. $3{,}92\,\%$.
93. Dowód.

ROZDZIAŁ 8

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

8.1. Nie. Liczba kwantowa $m_l = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$. Zatem, wartość L_z jest zawsze mniejsza niż L, ponieważ $l < \sqrt{l(l+1)}$.
8.2. $s = 3\,/\,2$.
8.3. Wzrasta czterokrotnie.

PYTANIA

1. n (główna liczba kwantowa) → całkowita energia; l (orbitalna liczba kwantowa) → bezwzględna wartość orbitalnego momentu pędu; m_l (magnetyczna liczba kwantowa) → z-owa składowa orbitalnego momentu pędu.
3. Model Bohra opisuje elektron jako cząstkę poruszającą się wokół protonu po ściśle określonych orbitach. Model Schrödingera opisuje elektron poprzez funkcję falową, która określa prawdopodobieństwo znalezienia się elektronu w określonym miejscu przestrzeni. Całkowita energia elektronu w stanie podstawowym (i wszystkich stanach wzbudzonych) jest taka sama dla obu modeli. Jednakże wartość orbitalnego momentu pędu dla stanu podstawowego jest różna w obydwu modelach. W modelu Bohra moment pędu, opisany wzorem $L = nh$, dla stanu podstawowego wynosi $L = h$, natomiast w modelu Schrödingera dla stanu podstawowego $L = 0$.
5. a. b. c. Zostaje zmieniona całkowita energia (na skutek rozszczepienia Zeemana). Zostaje wykonana praca nad atomem wodoru, która powoduje obrót atomu, a więc z-owa składowa pędu i kąt biegunowy zmieniają się, podczas gdy moment pędu zachowuje swoją wartość.
7. Nawet w stanie podstawowym ($l = 0$) atom wodoru ma właściwości magnetyczne z powodu spinu (własnego momentu pędu) elektronu, a moment magnetyczny jest proporcjonalny do jego spinu.
9. Dla wszystkich elektronów $s = 1\,/\,2$, a $m_s = \pm 1\,/\,2$. Jak się przekonamy, nie wszystkie cząstki mają taką samą spinową liczbę kwantową. Na przykład foton posiada spin 1 ($s = 1$), a bozon Higgsa – 0 ($s = 0$).
11. Elektron ma dodatkowy moment magnetyczny związany ze spinem. Sprzężenie spin-orbita występuje, gdy spinowy moment magnetyczny oddziałuje z orbitalnym momentem magnetycznym elektronu.
13. Pierwiastki, które należą do tej samej kolumny układu okresowego pierwiastków, mają tak samo wypełnioną zewnętrzną powłokę, a zatem identyczną liczbę elektronów walencyjnych. Na przykład:
Li: $1s^2 2s^1$ (jeden elektron walencyjny na powłoce $n = 2$), Na: $1s^2 2s 2p^6 3s^1$ (jeden elektron walencyjny na powłoce $n = 2$). Zarówno Li, jak i Na należą do pierwszej grupy układu okresowego (leżą w pierwszej kolumnie).
15. Widma atomowe i cząsteczkowe są określane jako „dyskretne”, ponieważ pozwalają zaobserwować tylko niektóre linie widmowe. W przeciwieństwie do nich widmo światła białego (składającego się z fotonów o wielu częstotliwościach) jest ciągłe, ponieważ obserwuje się ciągły, „tęczowy” rozkład kolorów.
17. Światło ultrafioletowe składa się z fotonów o względnie wysokich częstotliwościach (niewielkich długościach fal). Zatem energia zaabsorbowanego fotonu i związana z tym energia przejścia (ΔE) w atomie są stosunkowo duże. Dla porównania światło widzialne składa się z fotonów o względnie niższej częstotliwości. W związku z tym zmiana energii w atomie podczas rekombinacji i energia emitowanego fotonu są relatywnie małe.
19. Dla układów makroskopowych liczby kwantowe są bardzo duże, więc różnica energii (ΔE) pomiędzy sąsiednimi poziomami energetycznymi (sąsiednimi orbitami) jest bardzo mała. Stąd energia uwalniana przy przejściach pomiędzy tymi bliskimi poziomami energii jest zbyt mała, aby mogła zostać wykryta.
21. Wytwarzanie światła laserowego opiera się na procesie emisji wymuszonej. W tym procesie elektrony w układzie muszą być wcześniej wzbudzone do stanu metastabilnego o wyższej energii, a następujące przejście światła przez układ powoduje emisję wymuszoną, a więc dodatkowe światło.
23. Odtwarzacz Blu-Ray korzysta z niebieskiego światła laserowego (o stosunkowo krótkich długościach fal) do sondowania wybrzuszeń i wgłębień na dysku, a odtwarzacz CD używa do tego czerwonego światła laserowego. Mniejszy rozmiar wgłębień na dysku odpowiada za większą gęstość zapisu i możliwość przechowywania informacji.

ZADANIA

25. $(r, \theta, \phi) = \left(\sqrt{6}, 66°, 27°\right)$.
27. Możliwe są wartości: $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$.
30. $F = -kQq\,/\,r^2$.
32. $(1, 1, 1)$.
34. Dla orbitalnej liczby kwantowej l dopuszczalne wartości magnetycznej liczby kwantowej to: $m_l = -l, -l+1, \ldots, 0, \ldots, l-1, l$. Stąd wynika, że całkowita liczba stanów z orbitalnym momentem pędu, opisanym liczbą kwantową l, wynosi $2l + 1$. Później, gdy uwzględnimy spin elektronu, całkowita liczba stanów będzie dwukrotnie większa od tej wartości, ponieważ każdemu stanowi z określonym m_l odpowiadają dwa stany związane z dwoma stanami spinu elektronu, opisane liczbami kwantowymi: $m_s = -1\,/\,2, 1\,/\,2$.
36. $\int_{a_0}^{\infty} P(r)\,\mathrm{d}r \approx 0{,}68$.

38. Dla $n = 2$ liczba stanów o $l = 0$ wynosi 1, a o $l = 1$ jest równa 3. Całkowita liczba stanów wynosi więc 4.
40. Stan $3p$ odpowiada $n = 3$, $l = 2$. Dlatego $\mu = \mu_B \sqrt{6}$.
42. Stosunek ich mas wynosi $1 / 207$, więc stosunek ich momentów magnetycznych wynosi 207. Moment magnetyczny elektronu jest ponad 200 razy większy niż mionu.
44. a. Stan $3d$ odpowiada $n = 3$, $l = 2$, więc $I = 4{,}43 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{A}$; b. Maksymalny moment siły występuje, gdy moment magnetyczny i wektor zewnętrznego pola magnetycznego są prostopadłe ($\sin\theta = 1$). W tym przypadku: $\left|\vec{M}\right| = \mu B = 5{,}7 \cdot 10^{-26}\ \mathrm{Nm}$.
46. Elektron jest w stanie $n = 3$, $l = 1$. Minimalna wielkość momentu siły występuje, gdy moment magnetyczny i wektor zewnętrznego pola magnetycznego są możliwie najbardziej równoległe (antyrównoległe) względem siebie. Dzieje się tak, gdy $m_l = \pm 1$. Wielkość momentu siły wynosi: $\left|\vec{M}\right| = \mu B \sin\theta$, gdzie $\mu = 1{,}31 \cdot 10^{-24}\ \mathrm{J / T}$. Dla $m_l = \pm 1$ otrzymujemy: $\left|\vec{M}\right| = 2{,}34 \cdot 10^{21}\ \mathrm{Nm}$.
48. Nieskończenie mała praca $\mathrm{d}W$ wykonana przez moment siły M podczas obracania momentu magnetycznego o kąt $-\mathrm{d}\theta$ jest równa: $\mathrm{d}W = M \cdot (-\mathrm{d}\theta)$, gdzie $M = \left|\vec{\mu} \times \vec{B}\right|$. Wykonywana praca odbywa się kosztem spadku energii potencjalnej E_p, więc $\mathrm{d}W = -\mathrm{d}E_\mathrm{p}$. Całkowitą zmianę energii otrzymujemy przez zsumowanie jej nieskończenie małych zmian: $E_\mathrm{p} = -\mu B \cos\theta$, $E_\mathrm{p} = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.
50. Dla kierunku spin w górę (w stosunku do dodatniego kierunku osi z): $\theta = \arccos\,(S_z / S) = \arccos\left(\frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arccos\left(1 / \sqrt{3}\right) = 55°$. Dla kierunku spin w dół otrzymujemy: $\theta = \arccos\,(S_z / S) = \arccos\left(\frac{-1/2}{\sqrt{3}/2}\right) = \arccos\left(-1 / \sqrt{3}\right) = 125°$.
52. Magnetyczna spinowa liczba kwantowa jest równa $m_s = \pm 1 / 2$, więc składowa z-owa momentu magnetycznego wynosi $\mu_z = \pm\mu_B$. Energia potencjalna wzajemnego oddziaływania pomiędzy elektronem i zewnętrznym polem magnetycznym wynosi $E_\mathrm{p} = \pm\mu_B B$. Różnica energii pomiędzy tymi stanami jest równa $\Delta E = 2\mu_B B$, tak więc wytwarzana długość fali elektromagnetycznej ma wartość $\lambda = 8{,}38 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} \approx 84\,\mathrm{\mu m}$ (podczerwień).
54. Zostanie zwiększona 2 razy.
56.

a. 32;
b.

l		$2\,(2l + 1)$		
0	s	$2\,(0 + 1)$	=	2
1	p	$2\,(2 + 1)$	=	6
2	d	$2\,(4 + 1)$	=	10
3	f	$2\,(6 + 1)$	=	14
				32

58. a. oraz e. Są dozwolone, a pozostałe nie; b. $l = 3$ jest niedozwolone dla $n = 1$, gdyż $l \le (n - 1)$; c. Nie może być trzech elektronów na podpowłoce s, bo $3 > 2\,(2l + 1) = 2$; d. Nie może być siedmiu elektronów na podpowłoce p (maksymalnie 6), gdyż $2\,(2l + 1) = 2\,(2 + 1) = 6$.
60. $[\mathrm{Ar}]4s^2 3d^6$.
62. a. Minimalna wartość l wynosi $l = 2$, gdyż wtedy $2\,(2l + 1) = 10$; b. $3d^9$.
64. $[\mathrm{He}]2s^2 2p^2$.
66. Energia jonizacji jest minimalną energią potrzebną do usunięcia (czyli przeniesienia na nieskończoną odległość) jednego elektronu z atomu (lub jonu). Jeden elektron w jonie He^+ „orbituje” wokół jądra składającego się z dwóch protonów i dwóch neutronów; różnica między nim a atomem wodoru jest taka, że ładunek jądra jonu helu jest dwukrotnie większy ($Z = 2$). Stąd energia stanu podstawowego jest równa: $E = Z^2 E_1 = -54{,}4\,\mathrm{eV}$, gdzie $E_1 = -13{,}6\,\mathrm{eV}$ jest energią stanu podstawowego atomu wodoru. Energia jonizacji w tym przypadku jest równa bezwzględnej wartości energii w stanie podstawowym. Zatem energia jonizacji jonu He^+ wynosi $+54{,}4\,\mathrm{eV}$. Podobnie energia potrzebna do usunięcia elektronu w pierwszym stanie wzbudzonym jonu Li_2^+ do nieskończoności jest równa ujemnej wartości (lub wartości bezwzględnej) pierwszego wzbudzonego stanu energii jonu wodoropodobnego o ładunku jądra $3e$ ($Z = 3$). Wynosi ona: $E = Z^2 E_2 = -3{,}4\,\mathrm{eV}$, gdzie $E_2 = -13{,}6\,\mathrm{eV}$ jest energią pierwszego stanu wzbudzonego atomu wodoru. Stąd energia jonizacji jonu Li_2^+ wynosi $30{,}6\,\mathrm{eV}$.
68. Długość fali lasera jest dana przez: $\lambda = hc / E_\mathrm{f} \cdot hc / (-\Delta E)$, gdzie E_f jest energią fotonu, a ΔE różnicą energii. Przekształcając powyższe równanie, otrzymujemy: $\Delta E = -2{,}795\,\mathrm{eV}$. Znak minus wskazuje, że elektron stracił energię podczas przejścia.
70. $\Delta E_{L \longrightarrow K} \approx (Z - 1)^2 \cdot 10{,}2\,\mathrm{eV} = 3{,}68 \cdot 10^3\,\mathrm{eV}$.
72. Zgodnie z zasadą zachowania energii energia potencjalna elektronu przekształca się całkowicie w energię kinetyczną. Początkowa energia kinetyczna elektronu jest równa zero (elektron był w spoczynku). Zatem energia kinetyczna elektronów tuż przed uderzeniem w tarczę wynosi: $E_\mathrm{k} = e\Delta V$. Jeśli całość energii jest przekształcana na promieniowanie hamowania, to częstotliwość emitowanego promieniowania jest maksymalna, a więc: $\nu_{\max} = e\Delta V / h$. Gdy częstotliwość

emitowanej fali jest maksymalna, to jej długość jest minimalna, więc: $\lambda_{\text{min}} = c / \nu_{\text{max}} = 0{,}1293\,\text{nm}$.
74. Mion jest 200 razy cięższy niż elektron, ale minimalna długość fali nie zależy od masy, więc długość fali się nie zmieni.
76. $4{,}13 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$.
78. $72{,}5\,\text{keV}$.
80. Liczby atomowe dla Cu i Au to odpowiednio $Z = 29$ i $Z = 79$. Częstotliwość promieniowania rentgenowskiego fotonów złota jest większa niż miedzi o czynnik: $(\nu_{\text{Au}} / \nu_{\text{Cu}})^2 = (79 - 1)^2 \big/ (29 - 1)^2 \approx 7{,}8$. Dlatego długość fali promieniowania rentgenowskiego dla złota jest około ośmiu razy krótsza niż dla miedzi.
82. a. Jeśli przyjmiemy, że ciało ma taką samą gęstość jak woda, to zostało użytych $1{,}34 \cdot 10^{23}$ fotonów; b. $2{,}52\,\text{MW}$.

ZADANIA DODATKOWE

84. Najmniejszy kąt odpowiada $l = n - 1$ i $m_l = l = n - 1$. Stąd $\theta = \arccos\left(\sqrt{(n-1)/n}\right)$.
86. a. Zgodnie z Równaniem 8.1, gdy $r = 0$, $E_{\text{p}}(r) \longrightarrow -\infty$, a gdy $r \longrightarrow +\infty$, $E_{\text{p}}(r) = 0$; b. Pierwszy wynik sugeruje, że elektron może mieć nieskończoną ujemną energię potencjalną, gdy znajdzie się w położeniu $r = 0$. Model kwantowy atomu wodoru jednak na to nie pozwala, ponieważ gęstość prawdopodobieństwa przy $r = 0$ wynosi zero.
88. Rozwiązanie z wykorzystaniem sum jest nieco skomplikowane. Jednak odpowiedź można łatwo znaleźć przez zbadanie matematycznego (indukcyjnego) związku pomiędzy główną liczbą kwantową a całkowitą liczbą stanów z wszystkimi dozwolonymi magnetycznymi liczbami kwantowymi. Dla $n = 1$ całkowita liczba stanów wynosi 1; dla $n = 2$ całkowita liczba wynosi 4 (1 dla $l = 0$ i 3 dla $l = 1$); gdy $n = 3$, całkowita liczba wynosi 9 i tak dalej. To sugeruje, że całkowita liczba stanów z różnymi magnetycznymi liczbami kwantowymi dla n-tej powłoki wynosi n^2 . Gdy uwzględnimy spin elektronów, całkowita liczba stanów z różnymi magnetycznymi liczbami kwantowymi m_l wynosi $2n^2$, ponieważ każdemu stanowi z ustaloną magnetyczną liczbą kwantową odpowiadają dwa stany związane z dwiema liczbami kwantowymi: $m_s = -1/2$, $m_s = 1/2$ (nazywane „spin w dół” i „spin w górę”).
90. 50.
92. Maksymalna liczba stanów elektronowych na n-tej powłoce atomu, z różnymi magnetycznymi liczbami kwantowymi m_l , wynosi n^2 . Każdemu stanowi z określonym m_l odpowiadają dwa stany związane z dwoma rzutami spinu elektronu, opisane liczbami kwantowymi $m_s = -1/2$, $m_s = 1/2$. Zatem maksymalna liczba stanów elektronowych na n-tej powłoce wynosi $2n^2$.
94. a., c. oraz e. Są dozwolone, pozostałe nie; b. Nie jest dozwolony, gdyż $l > n$; d. Nie jest dozwolony, ponieważ $7 > 2 \cdot (2l + 1)$.
96. $\nu = 1{,}8 \cdot 10^9\ \text{Hz}$.
98. Liczba atomowa dla Cu i Ag wynosi odpowiednio $Z = 29$ i $Z = 47$. Stosunek częstotliwości fotonów promieniowania rentgenowskiego dla srebra i miedzi wynosi:
$\left(\nu_{\text{Ag}} / \nu_{\text{Cu}}\right)^2 = 2{,}7$. Stąd wynika, że długość fali rentgenowskiej dla srebra jest około trzy razy krótsza niż dla miedzi.
100. a. Otrzymujemy $3{,}24$; b. n nie jest liczbą całkowitą, dlatego podana długość fali nie może być prawidłowa; c. Ponieważ n nie jest liczbą całkowitą, niemożliwe jest założenie, że linia pochodzi z serii Balmera. Jeśli długość fali nie jest właściwa, to również założenie, że gaz jest wodorem, jest nieprawidłowe (w rzeczywistości jest to sód).

ROZDZIAŁ 9

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

9.1. Energia ta związana jest z siłą odpychania między elektronami rdzenia w jonach.
9.2. Moment bezwładności.
9.3. Trudniej.
9.4. Zmniejsza się.
9.5. Prąd przy polaryzacji w kierunku przewodzenia jest znacznie większy. Z dobrym przybliżeniem dioda przewodzi prąd tylko w jednym kierunku.
9.6. Niska temperatura i małe pole magnetyczne.

PYTANIA

1. Wiązanie jonowe jest tworzone na skutek wzajemnego przyciągania się dodatniego i ujemnego jonu. Wiązanie kowalencyjne tworzy się, gdy elektrony są dzielone pomiędzy dwa lub więcej atomów. W wiązaniu van der Waalsa kluczową rolę odgrywa przyciąganie między cząsteczkami spolaryzowanymi elektrycznie.
3. 1. Elektron jest odrywany od jednego atomu. Powstaje jon dodatni. 2. Elektron jest przyłączany do drugiego atomu. Powstaje jon ujemny. 3. Jony dodatni i ujemny przyciągają się aż do osiągnięcia odległości równowagowej.
5. Wiązanie tworzy przestrzenna funkcja, która jest symetryczna ze względu na zamianę dwóch elektronów. W stanie tym gęstość elektronowa jest największa pomiędzy atomami. Całkowita funkcja falowa musi być antysymetryczna (ponieważ elektrony są fermionami). Skoro część przestrzenna jest symetryczna, część spinowa funkcji falowej musi być antysymetryczna. W takim stanie spiny elektronów są antyrównoległe.
7. Energia rotacyjna, energia oscylacyjna, energia elektronowa.
9. W krysztale każdy jon znajduje się w polu wielu innych jonów.
11. 6 ; 6 .
13. $0{,}399\,\text{nm}$.
15. Wzrosłaby o czynnik $\sqrt[3]{8^2} = 4$.
17. Ze wzrostem energii liczba dostępnych stanów rośnie.

19. (1) Rozwiązać równanie Schrödingera dla dozwolonych stanów i ich energii. (2) Określić energie poziomów, gdy atomy znajdują się w dużej odległości od siebie, a następnie określić poziomy energetyczne, gdy odległość między atomami zmniejsza się.
21. W przypadku N atomów oddalonych od siebie istnieje N różnych funkcji falowych, wszystkie o tej samej energii. Gdy atomy zbliżamy do siebie, energie tych N różnych funkcji falowych rozszczepiają się. Z powodu zakazu Pauliego każdy elektron musi być opisany unikalnym zestawem liczb kwantowych, dlatego zbliżenie do siebie N atomów prowadzi do pojawienia się przynajmniej N stanów (o różnych energiach).
23. W półprzewodniku występuje stosunkowo mała przerwa energetyczna między najwyższym, całkowicie zapełnionym pasmem, a następnym niezapełnionym. Zwykle pewna liczba elektronów przekracza przerwę, przyczyniając się do niewielkiego przewodnictwa elektrycznego. Półprzewodniki cechuje duża czułość na temperaturę: gdy temperatura rośnie, coraz większa liczba elektronów z pasma walencyjnego zyskuje energię pozwalającą na przekroczenie przerwy energetycznej i znalezienie się w paśmie przewodnictwa (wzbudzenia termiczne).
25. a. German ma cztery elektrony walencyjne. Jeśli jest on domieszkowany arsenem (pięć elektronów walencyjnych), wówczas cztery elektrony tworzą wiązania, a jeden pozostaje słabo związany (i wnosi wkład do przewodnictwa). Powstaje w ten sposób półprzewodnik typu n; b. Jeśli german jest domieszkowany galem (trzy elektrony walencyjne), wszystkie trzy elektrony tworzą wiązania, ale brak jednego elektronu powoduje powstanie dziury (wnoszącej wkład do przewodnictwa elektrycznego). W ten sposób powstaje półprzewodnik typu p.
27. Efekt Halla to powstawanie różnicy potencjałów na skutek przepływu prądu przez przewodnik (półprzewodnik) umieszczony w odpowiednio skierowanym polu magnetycznym. Może być wykorzystany do wyznaczenia prędkości unoszenia nośników ładunku (elektronów lub dziur). Jeśli zmierzona jest gęstość prądu, efekt ten może posłużyć także do wyznaczenia koncentracji nośników ładunku.
29. Powstają nowe nieobsadzone poziomy energetyczne tuż powyżej pasma walencyjnego. Poziomy te mogą być łatwo obsadzane elektronami z pasma walencyjnego.
31. Pole elektryczne wytwarzane przez „odsłonięte” jony w obszarze zubożonym redukuje dalszą dyfuzję. W równowadze prąd dyfuzji i unoszenia znoszą się, tak że prąd wypadkowy jest zerowy. Rezystancja obszaru zubożonego jest duża.
33. Biegun dodatni zewnętrznego źródła napięcia przyłączony jest do obszaru n, co powoduje „odsłonięcie” większej liczby jonów (obszar zubożony poszerza się), zwiększa się różnica potencjałów na złączu i dlatego zmniejsza się dyfuzja dziur przez złącze.
35. Fala dźwiękowa porusza membranę mikrofonu w przód i w tył, co powoduje zmianę napięcia na bazie i prądu bazy w obwodzie tranzystora. Tranzystor wzmacnia sygnał (układ półprzewodników p–n–p). Prąd wyjścia (kolektora) zasila głośnik.
37. Teoria BCS wyjaśnia nadprzewodnictwo na podstawie elektronów w parach Coopera. Jeden z elektronów oddziałuje z siecią, która z kolei oddziałuje z drugim elektronem. To złożone oddziaływanie elektron–sieć–elektron wiąże elektrony w pary mimo odpychającego oddziaływania samych elektronów.
39. Gdy wartość pola magnetycznego rośnie, temperatura krytyczna obniża się.

ZADANIA

41. $E_\mathrm{p} = -5{,}16\,\mathrm{eV}$.
43. $-4{,}43\,\mathrm{eV} = -4{,}17\,\mathrm{eV} + E_\mathrm{odpychania}$, $E_\mathrm{odpychania} = 0{,}28\,\mathrm{eV}$.
45. Zmierzona wartość to $0{,}484\,\mathrm{nm}$, a rzeczywista $0{,}127\,\mathrm{nm}$. Wartość zmierzona jest tego samego rzędu, co wartość rzeczywista, ale około czterokrotnie większa.
47. $0{,}11\,\mathrm{nm}$.
49. a. $E = 2{,}2 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$; b. $E = 4{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{eV}$.
51. $0{,}65\,\mathrm{nm}$.
53. $r_0 = 0{,}24\,\mathrm{nm}$.
55. $2196\,\mathrm{kcal}$.
57. $11{,}5$.
59. a. 4% , $4{,}2 \cdot 10^{-4}\,\%$; b. Dla bardzo dużych liczb kwantowych odległość energetyczna między sąsiadującymi poziomami jest bardzo mała („jak w kontinuum”). Jest to zgodne z przewidywaniem, że dla dużych liczb kwantowych mechanika kwantowa i klasyczna prowadzą do niemal takich samych wyników.
61. $10\,\mathrm{eV}$.
63. $4{,}55 \cdot 10^9$.
65. Energia Fermiego: $E_\mathrm{F} = 7{,}03\,\mathrm{eV}$, temperatura Fermiego: $T_\mathrm{F} = 8{,}2 \cdot 10^4\,\mathrm{K}$.
67. W izolatorze przerwa energetyczna między pasmem walencyjnym a pasmem przewodnictwa jest większa niż w półprzewodniku.
69. $4{,}13\,\mathrm{keV}$.
71. $n = 1{,}56 \cdot 10^{19}\,\mathrm{dziur} / \mathrm{m}^3$.
73. $5\,\mathrm{T}$.
75. $U_\mathrm{b} = 0{,}458\,\mathrm{V}$.
77. $T = 829\,\mathrm{K}$.
79. $T = 0{,}707 T_\mathrm{c}$.
81. $61\,\mathrm{kV}$.

ZADANIA DODATKOWE

83. $E_\mathrm{Coul} = -5{,}65\,\mathrm{eV}$, $E_\mathrm{tworzenia} = -4{,}71\,\mathrm{eV}$, $E_\mathrm{dysocjacji} = 4{,}71\,\mathrm{eV}$.

85. $E_{0r} = 7{,}43 \cdot 10^{-3}$ eV .
87. $E_{0r} = 7{,}43 \cdot 10^{-3}$ eV ; $l = 0$, $E_r = 0$ eV (brak rotacji); $l = 1$, $E_r = 1{,}49 \cdot 10^{-2}$ eV ; $l = 2$, $E_r = 4{,}46 \cdot 10^{-2}$ eV .
89. (1) Są dość twarde i stabilne. (2) Parują w stosunkowo wysokich temperaturach (1000 K do 2000 K). (3) Są przezroczyste dla światła, ponieważ fotony z widzialnego zakresu nie mają wystarczającej energii, aby przenieść elektron ze stanu podstawowego do wzbudzonego. (4) Są słabymi przewodnikami prądu elektrycznego, ponieważ efektywnie nie ma w nich swobodnych elektronów. (5) Zwykle rozpuszczają się w wodzie, gdyż cząsteczki wody mają duży moment dipolowy, którego pole elektryczne jest wystarczająco silne, by rozerwać elektrostatyczne wiązanie między jonami.
91. Nie, atom He nie zawiera elektronów walencyjnych, które mogłyby być uwspólnione przy tworzeniu wiązań chemicznych.
93. $\sum_1^{N/2} n^2 = (N \,/\, 2)^3 \Big/ 3$, więc $\overline{E} = E_F \,/\, 3$.
95. Poziom domieszkowy powstanie, jeśli koncentracja donorów jest na tyle duża, by orbity dodatkowych elektronów nakładały się. Dowiedzieliśmy się wcześniej, że promień takiej orbity wynosi ok. 50 Å , czyli maksymalna odległość między atomami domieszki, przy której uformuje się poziom, to 100 Å . Tak więc jeśli przyjmiemy 1 Å jako odległość między sąsiadującymi atomami Si, to 1 na 100 atomów Si musi być atomem donoru, a w krysztale trójwymiarowym 1 na 10^6 atomów Si musi być zamieniony na donor. Powstanie wtedy poziom domieszkowy.
97. a. $E_F = 7{,}11$ eV ; b. $E_F = 3{,}24$ eV ; c. $E_F = 9{,}46$ eV .
99. $9{,}15 \approx 9$.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

101. W trzech wymiarach energia elektronu dana jest przez: $E = R^2 E_1$, gdzie $R^2 = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2$. Każdy dozwolony stan energetyczny odpowiada węzłowi w przestrzeni $N\,(n_1, n_2, n_3)$. Liczba cząstek odpowiada liczbie stanów (węzłów) w pierwszej ósmej części przestrzeni, wewnątrz sfery o promieniu R . Liczba ta dana jest przez: $N = 2 \cdot (1 \,/\, 8) \cdot (4 \,/\, 3) \cdot \pi R^3$, gdzie czynnik 2 bierze się z konieczności uwzględnienia dwóch stanów spinowych. Gęstość stanów uzyskamy przez obliczenie pochodnej tego wyrażenia po energii: $g(E) = \pi V \,/\, 2 \cdot \left(8 m_e \Big/ h^2\right)^{3/2} \cdot E^{1/2}$. Wycałkowanie prowadzi do: $\overline{E} = 3E_F \,/\, 5$.

ROZDZIAŁ 10

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

10.1. 8 .
10.2. Trudniejsze.
10.3. Okres połowicznego rozpadu jest odwrotnie proporcjonalny do szybkości rozpadu, więc jest krótki. Aktywność zależy od liczby cząstek ulegających rozpadowi, a nie tylko od szybkości rozpadu, więc może być duża lub mała.
10.4. Nie rośnie i nie maleje – pozostaje taka sama.
10.5. Jest identyczny.
10.6. Z konwersji masy w energię.
10.7. Do mocy.

PYTANIA

1. Jądro atomu składa się z co najmniej jednego nukleonu. Nukleon oznacza proton albo neutron. Pojęcie nuklidu oznacza jądro o danej liczbie neutronów i protonów.
3. Układ związany powinien mieć mniejszą masę niż jego składniki ze względu na równoważność masy i energii ($E = mc^2$). Jeśli energia układu zmniejsza się, całkowita masa staje się mniejsza. Jeśli dwie cegły są umieszczone obok siebie, przyciąganie między nimi jest czysto grawitacyjne, jeśli założyć, że cegły są elektrycznie obojętne. Pole grawitacyjne między cegłami jest stosunkowo niewielkie (w porównaniu z siłą jądrową), więc defekt masy jest zbyt mały, by można go było zaobserwować. Jeżeli cegły są połączone zaprawą, defekt masy również jest mały, ponieważ oddziaływania elektryczne między elektronami biorącymi udział w wiązaniach chemicznych są nadal stosunkowo małe.
5. Nukleony na powierzchni jądra oddziałują z mniejszą liczbą innych nukleonów. Zmniejsza to energię wiązania na nukleon, która jest wartością uśrednioną po wszystkich nukleonach w jądrze.
7. Zakłada się, że intensywność jest stała.
9. Promieniowanie gamma (γ) powstaje w wyniku procesów jądrowych, a promieniowanie rentgenowskie i światło pochodzą z procesów atomowych. Promieniowanie gamma ma zazwyczaj mniejsze długości fali niż promieniowanie rentgenowskie, a to z kolei ma mniejsze długości fali niż w przypadku światła.
11. Wprowadźmy prostokątny układ współrzędnych z płaszczyzną xy odpowiadającą płaszczyźnie papieru. Promienie α zakrzywiają się do kartki (trajektoria paraboliczna w płaszczyźnie xz); promienie β^+ także zakrzywiają się do kartki (trajektoria paraboliczna w płaszczyźnie xz); a promienie γ się nie zakrzywiają.
13. Tak. W bombie atomowej wykorzystuje się rozszczepienie, które polega na podziale jądra atomowego.
15. Siły bliskiego zasięgu między nukleonami znajdującymi się w jądrze mają podobny charakter do sił przyciągania pomiędzy cząsteczkami wody w kropli. W szczególności siły między nukleonami na powierzchni jądra powodują powstanie napięcia powierzchniowego, podobnego do występującego w kropli wody.
17. Powstające w procesie syntezy jądra mają większe energie wiązania na nukleon niż jądra, które uległy połączeniu. Oznacza to, że w procesie syntezy jądrowej maleje średnia energia na nukleon w układzie. Różnica energii emitowana jest jako promieniowanie.
19. Cząstki alfa nie przenikają łatwo materiałów takich jak skóra czy ubranie (przypomnijmy, że promieniowanie alfa z

trudem jest w stanie przejść przez cienki arkusz papieru). Gdy jednak dostają się do wnętrza lub powstają wewnątrz ciała, zagrażają pobliskim komórkom.

ZADANIA

21. Użyj reguły $A = Z + N$.

	Liczba atomowa (Z)	Liczba neutronowa (N)	Liczba masowa (A)
a.	29	29	58
b.	11	13	24
c.	84	126	210
d.	20	25	45
e.	82	124	206

23. a. $r = r_0 A^{1/3}$, $\rho = 3\text{u} \,/\, \left(4\pi r_0^3\right)$; b. $\rho = 2{,}3 \cdot 10^{17}\,\text{kg} \,/\, \text{m}^3$.
25. 1,6 μm .
27. 92,4 MeV .
29. 8,79 MeV co w przybliżeniu zgadza się z wartością odczytaną z wykresu.
31. a. 7,57 MeV ; b. 7,591 MeV .
33. Stała rozpadu jest równa wartości bezwzględnej nachylenia, czyli $10^{-9}\,\text{s}^{-1}$. Okres połowicznego rozpadu jąder, a więc i pobranego materiału, jest równy $T_{1/2} = 693$ mln lat .
35. a. Stała rozpadu wynosi $\lambda = 1{,}99 \cdot 10^{-5}\,\text{s}^{-1}$; b. Ponieważ masa molowa ^{91}Sr wynosi 90,9 g , liczba jąder w próbce o masie 1 g wynosi początkowo $N_0 = 6{,}63 \cdot 10^{21}$ jąder. Początkowa aktywność strontu jest równa $A_0 = \lambda N_0 = 1{,}32 \cdot 10^{17}\,\text{s}^{-1}$. Aktywność w chwili $t = 15\,\text{h} = 5{,}4 \cdot 10^4\,\text{s}$ jest równa $A = 4{,}51 \cdot 10^{16}\,\text{s}^{-1}$.
37. a. $1{,}2 \cdot 10^{-2}$ mol ; b. $6 \cdot 10^{-3}$ mol ; c. $3{,}75 \cdot 10^{-4}$ mol .
39. a. 0,988 Ci ; b. Okres połowicznego rozpadu ^{226}Ra jest obecnie znany z większą dokładnością niż wtedy, gdy definiowano jednostkę kiur.
41. a. 2,73 μg ; b. $9{,}76 \cdot 10^4$ Bq .
43. a. $7{,}46 \cdot 10^5$ Bq ; b. $7{,}75 \cdot 10^5$ Bq .
45. a. 4,273 MeV ; b. $1{,}927 \cdot 10^{-5}$; c. Ponieważ rozpad ^{238}U jest powolny, tylko bardzo niewielka liczba jąder rozpada się w okresie porównywalnym z czasem ludzkiego życia; w związku z tym choć te jądra, które ulegają rozpadowi, tracą zauważalny ułamek swojej masy, to zmiana całkowitej masy uranu nie jest wykrywalna dla makroskopowej próbki.
47. a. ${}^{90}_{38}\text{Sr}_{52} \longrightarrow {}^{90}_{39}\text{Y}_{51} + {}^{0}_{-1}\text{e}_0 + \bar{\nu}$; b. 0,546 MeV .
49. ${}^{3}_{1}\text{H}_2 \longrightarrow {}^{3}_{2}\text{He}_1 + {}^{0}_{-1}\text{e}_0 + \bar{\nu}$.
51. a. ${}^{7}_{4}\text{Be}_3 + {}^{0}_{-1}\text{e}_0 \longrightarrow {}^{7}_{3}\text{Li}_4 + \nu$; b. 0,862 MeV .
53. a. ${}^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$; b. 33,05 MeV .
55. a. 177,1 MeV ; b. Wartość ta jest w przybliżeniu równa średniej EWN dla ciężkich jąder; c. ${}^{1}_{0}\text{n}_1 + {}^{238}_{92}\text{U}_{146} \longrightarrow {}^{96}_{38}\text{Sr}_{58} + {}^{140}_{54}\text{Xe}_{86} + 3{}^{1}_{0}\text{n}_1$, z tego $A_\text{p} = 1 + 238 = 239 = 96 + 140 + 3 \cdot 1 = A_\text{k}$ oraz $Z_\text{p} = 0 + 92 = 92 = 38 + 54 + 3 \cdot 0 = Z_\text{k}$.
57. a. $2{,}57 \cdot 10^3$ MW ; b. $8{,}04 \cdot 10^{19}\,\text{s}^{-1}$; c. 991 kg .
59. a. ${}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H} \longrightarrow {}^{2}_{1}\text{H} + {}^{0}_{1}\text{e} + \nu$, $A_\text{p} = 1 + 1 = 2 = 2 + 0 = A_\text{k}$, $Z_\text{p} = 1 + 1 = 2 = 1 + 1 = Z_\text{k}$; b. ${}^{1}_{1}\text{H} + {}^{2}_{1}\text{H} \longrightarrow {}^{3}_{2}\text{He} + \gamma$, $A_\text{p} = 1 + 2 = 3 = A_\text{k}$, $Z_\text{p} = 1 + 1 = 2 = Z_\text{k}$; c. ${}^{3}_{2}\text{He} + {}^{3}_{2}\text{He} \longrightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{1}_{1}\text{H} + {}^{1}_{1}\text{H}$, $A_\text{p} = 3 + 3 = 6 = 4 + 1 + 1 = A_\text{k}$, $Z_\text{p} = 2 + 2 = 4 = 2 + 1 + 1 = Z_\text{k}$.
61. 26,73 MeV .
63. a. $3 \cdot 10^{38}$ protonów/s ; b. $6 \cdot 10^{14}$ neutrin/m$^2 \cdot$ s. Ta ogromna liczba wskazuje, jak rzadko neutrino oddziałuje z materią, ponieważ duże detektory wykrywają tylko pojedyncze neutrina w ciągu doby.
65. a. Masa atomowa deuteru (^{2}H) wynosi 2,014 102 u , podczas gdy dla trytu (^{3}H) wynosi ona 3,016 049 u , co daje w sumie 5,032 151 u na reakcję. Tak więc mol substratów ma masę 5,03 g , a w 1 kg , jest 1000 g / (5,03 g / mol) = 198,8 mol substratów. Dlatego też liczba zachodzących reakcji wynosi $198{,}8\,\text{mol} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}\,\text{mol}^{-1} = 1{,}2 \cdot 10^{26}$. Wytworzona energia równa jest liczbie reakcji razy energia na reakcję: $E = 3{,}37 \cdot 10^{14}\,\text{J}$; b. Moc równa jest energii na jednostkę czasu. Jeden rok ma $3{,}16 \cdot 10^7$ s , więc $P = 10{,}7\,\text{MW}$. Spodziewamy się, że proces jądrowy będzie generował duże ilości energii, i z pewnością tak jest w tym przypadku. Energia $3{,}37 \cdot 10^{14}$ J wytworzona w wyniku fuzji 1 kg deuteru i trytu jest odpowiednikiem 9,8 miliona litrów benzyny i jest osiem razy większa od energii wybuchu bomby, która zniszczyła Hiroszimę. Nawet średniej wielkości basen ogrodowy zawiera około 6 kg deuteru, więc zasoby paliwa są obfite, gdyby tylko udało się je wykorzystać w sposób kontrolowany.
67. 1 Gy = 1 Sv / WSB , a. 0,01 Gy ; b. 0,0025 Gy ; c. 0,16 Gy .
69. 1,24 MeV .
71. 1,69 mm .
73. Nowotwór: $0{,}02\,\text{Sv} \cdot 1 \,/\, \left(10^3\ \text{Sv rok}\right) = 20 \,/\, \left(10^6\ \text{rok}\right)$. Ryzyko zgonu z powodu nowotworu wywołanego

napromieniowaniem w każdym roku wynosi 20 na milion. Wada genetyczna: $0{,}02\,\mathrm{Sv} \cdot 0{,}33 \,/\, \left(10^3\ \mathrm{Sv\ rok}\right) = 6{,}6 \,/\, \left(10^6\ \mathrm{rok}\right)$. Prawdopodobieństwo wystąpienia wady genetycznej wywołanej napromieniowaniem w każdym roku wynosi 6,6 na milion.

ZADANIA DODATKOWE

75. $M_{\mathrm{Cl}} = 35{,}5\,\mathrm{g} \,/\, \mathrm{mol}$.
77. a. $1{,}1 \cdot 10^{854\,731}\ \mathrm{kg}$; b. masa całego obserwowalnego Wszechświata jest rzędu $10^{53}\ \mathrm{kg}$, a jeśli uwzględnimy ciemną materię i energię, to co najwyżej rzędu $10^{55}\ \mathrm{kg}$; c. rad ^{226}Ra cały czas powstaje w wyniku rozpadu uranu ^{238}U (ustala się tzw. równowaga wiekowa, w której ilość radu tak się ma do ilości uranu, jak ich okresy połowicznego rozpadu).
79. Jeśli 10% promieniowania pozostaje po przejściu przez $2\,\mathrm{cm}$ materiału, to po przejściu $4\,\mathrm{cm}$ materiału pozostanie $(0{,}1)^2 = 0{,}01 = 1\%$ promieniowania. To jest o wiele mniej niż przewidział kolega z laboratorium (5%).
81. a. $6{,}22 \cdot 10^5\ \mathrm{Bq}$; b. Z danych w Dodatku B wynika, że energia uwalniana w jednym rozpadzie wynosi $4{,}27\ \mathrm{MeV}$, stąd całkowita energia równa jest $8{,}65 \cdot 10^{10}\ \mathrm{J}$; c. Wartość ekonomiczna tej energii wynosi $12\,000\,\mathrm{zł}$.
83. Wiemy, że $\lambda = 3{,}84\,\mathrm{s}^{-1}$ i $A_0 = 0{,}25\,\mathrm{s}^{-1}\ \mathrm{g}^{-1} = 15\,\mathrm{min}^{-1}\ \mathrm{g}^{-1}$. Stąd wiek grobowca wynosi $t = \ln\left(10\,\mathrm{min}^{-1}\ \mathrm{g}^{-1} \,/\, 15\,\mathrm{min}^{-1}\ \mathrm{g}^{-1}\right) / \left(3{,}84 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{s}^{-1}\right) = 1{,}06 \cdot 10^{11}\ \mathrm{s} = 3350\ \mathrm{lat}$.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

85. a. $6{,}97 \cdot 10^{15}\ \mathrm{Bq}$; b. $6{,}24\ \mathrm{kW}$; c. $5{,}67\ \mathrm{kW}$.
87. a. Z powodu wycieku ciśnienie w komorze turbiny znacznie spadło. Różnica ciśnień pomiędzy komorą turbiny a skraplaczem pary jest teraz bardzo niska; b. Aby para przepływała przez komorę turbiny i napędzała ją, niezbędna jest duża różnica ciśnień.
89. Energie wynoszą $E_\gamma = 20{,}6\,\mathrm{MeV}$, $E_{^4\mathrm{He}} = 5{,}68 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{MeV}$. Zauważ, że większość energii przekazywana jest promieniowaniu γ.

ROZDZIAŁ 11

SPRAWDŹ, CZY ROZUMIESZ

11.1. 1.
11.2. 0.
11.3. 0.
11.4. 0.
11.5. $1\,\mathrm{eV}$.
11.6. Promień łuku zmniejszy się o połowę.
11.7. Zderzające się cząstki mają identyczne masy spoczynkowe i przeciwne pędy.
11.8. Jest przesunięta ku niebieskiemu (mówimy też: przesunięcie ku fioletowi).
11.9. Jest mniej więcej taka sama.

PYTANIA

1. Silne oddziaływanie jądrowe: oddziaływanie między kwarkami, którego nośnikami są gluony, jest przyciągające, ale ma mały zasięg. Oddziaływanie elektromagnetyczne: występuje między cząstkami obdarzonymi ładunkiem elektrycznym, może być odpychające lub przyciągające, nośnikami są fotony. Słabe oddziaływanie jądrowe: zachodzi między fermionami, nośnikami są ciężkie bozony pośredniczące W i Z. Oddziaływanie grawitacyjne: oddziaływanie cząstek materialnych (masowych), którego nośnikami są grawitony.
3. Elektron, mion, taon; neutrino elektronowe, mionowe i taonowe; kwark dolny, dziwny i piękny (niski); kwark górny, powabny i prawdziwy (wysoki).
5. Zasada zachowania energii, pędu, ładunku (znane z mechaniki klasycznej i relatywistycznej). Dodatkowo zasady zachowania liczb: barionowej, leptonowej i dziwności – liczby te nie mogą się zmienić przed zderzeniem lub rozpadem ani po nich.
7. Występowanie przypadków łamania zasad zachowania oznacza, że teoria, która je wykorzystuje, nie jest w pełni poprawna. Obalanie dotychczas obowiązujących teorii często prowadzi do głębszego poznania natury zjawisk fizycznych.
9. Bariony: 3 kwarki, mezony: 2 kwarki (para kwark–antykwark).
11. Bariony o tej samej budowie kwarkowej różnią się masą spoczynkową, bo zależy ona od energii poszczególnych kwarków wchodzących w ich skład ($m = E \,/\, c^2$). W takiej sytuacji barion, który zawiera kwark o dużym momencie pędu (spinie), powinien mieć większą masę niż taki, w którego skład wchodzi kwark o mniejszym momencie pędu.
13. Akcelerator liniowy do wstępnego przyspieszania cząstek na prostoliniowym odcinku; synchrotron do przyspieszenia cząstek do docelowej energii i przechowywania rozpędzonych cząstek w pierścieniu akumulacyjnym; detektor do pomiaru produktów zderzenia.
15. W eksperymencie zderzeniowym, gdzie dwie przeciwbieżne wiązki zderzają się w jednym punkcie, cała energia zderzenia przekształca się w energię spoczynkową wytwarzanych cząstek. W eksperymencie ze stałą tarczą część energii traci się na nadanie pędu nowym cząstkom, ponieważ środek masy zderzających się cząstek nie pozostaje w spoczynku.
17. Model standardowy jest modelem oddziaływań cząstek elementarnych. Składają się na niego teoria oddziaływań elektrosłabych i chromodynamika kwantowa. W ramach modelu standardowego opisujemy oddziaływanie leptonów i kwarków zachodzące z wymianą fotonów (elektromagnetyzm) i bozonów (teoria oddziaływań słabych) oraz oddziaływania między kwarkami za pośrednictwem gluonów (chromodynamika kwantowa). W modelu nie występuje oddziaływanie

grawitacyjne.
19. Chcemy wyjaśnić różne rodzaje oddziaływań (silne, słabe i elektromagnetyczne) w jednolity sposób za pomocą zunifikowanej siły.
21. Nie. Istnienie bozonu Higgsa wyjaśnia, dlaczego bozony pośredniczące W i Z mają masy (bozon Higgsa nadaje im ją) i w ten sposób, pośrednio, wyjaśnia niewielki zasięg oddziaływań słabych.
23. Rozszerzanie się Wszechświata należy rozumieć jako ekspansję przestrzeni. Nie jest ona podobna do wybuchu bomby, kiedy odłamki przechodzą przez przestrzeń, ale raczej do pompowania balonu, gdzie sama przestrzeń się rozszerza i dlatego zwiększają się odległości między ciałami. Wykres zależności prędkości ucieczki galaktyk jest proporcjonalny do ich odległości od nas. Miarą prędkości ucieczki jest wielkość kosmologicznego przesunięcia ku czerwieni światła docierającego do nas z odległych galaktyk, wynikającego z relatywistycznego efektu Dopplera.
25. Jasności absolutne są stałe niezależnie od odległości, natomiast mierzone jasności pozorne są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości (lub prędkości ucieczki, zgodnie w prawem Hubble’a).
27. Potwierdzona w obserwacjach ekspansja Wszechświata i występowanie promieniowania reliktowego.
29. Gdyby docierające do Ziemi światło było spowolnione, czas jego podróży byłby dłuższy niż spodziewany. W efekcie ocenialibyśmy, że źródło światła jest bliżej niż w rzeczywistości. Zatem dla danej prędkości ucieczki (obliczonej na podstawie częstotliwości światła, o której zakładamy, że jest niezmienna) odległość byłaby mniejsza niż prawdziwa, a więc stała Hubble’a miałaby większą niż prawdziwa wartość. Wszechświat wydawałby się młodszy niż naprawdę jest.

ZADANIA

31. $1{,}022\,\mathrm{MeV}$.
33. $0{,}511\,\mathrm{MeV}$, $2{,}73 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{kg m / s}$, $1{,}23 \cdot 10^{20}\,\mathrm{Hz}$.
35. (a), (b) i (c).
37. a. $\overline{\mathrm{p}}\mathrm{e}^{+}\nu_{\mathrm{e}}$; b. $\overline{\mathrm{p}}\pi^{+}$ albo $\overline{\mathrm{p}}\pi^{0}$; c. $\overline{\Xi^{0}}\pi^{0}$ albo $\overline{\Lambda^{0}}K^{+}$; d. $\mu^{-}\overline{\nu}_{\mu}$ albo $\pi^{-}\pi^{0}$; e. $\overline{\mathrm{p}}\pi^{0}$ albo $\overline{\mathrm{n}}\pi^{-}$.
39. Proton składa się z dwóch kwarków górnych i jednego dolnego. Całkowity ładunek protonu wynosi więc: $+2/3 + 2/3 + (-1/3) = +1$.
41. Mezon K^{+} składa się z kwarka górnego i antykwarka dziwnego ($\mathrm{u}\overline{\mathrm{s}}$). Ponieważ ładunki tych kwarków wynoszą $2/3e$ oraz $1/3e$, to całkowity ładunek kaonu wynosi e. Dwa spiny o wartości $1/2$ mogą w sumie dać wartość wypadkową 0 lub 1, zatem wartość spinu 0 znana dla K^{+} jest dobrze przewidziana na podstawie budowy kwarkowej. Dziwności kwarków dodają się jak $0 + 1 = 1$, co też zgadza się z wartością znaną dla mezonu K^{+}.
43. a. Kolor; b. Para kwark–antykwark.
45. $\mathrm{d} \longrightarrow \mathrm{u} + \mathrm{e}^{-} + \overline{\nu_{\mathrm{e}}}$, $\mathrm{u} \longrightarrow \mathrm{d} + \mathrm{e}^{+} + \nu_{\mathrm{e}}$.
47. $965\,\mathrm{MeV}$.
49. Postępujemy podobnie jak w Przykładzie 11.7: $W = 2E_{\text{wiązki}} = 9{,}46\,\mathrm{GeV}$, $M = 9{,}46\,\mathrm{GeV}/c^{2}$. Jest to masa mezonu ypsilon w stanie spinowym $1s$, po raz pierwszy zaobserwowano go w Fermilabie w 1977 roku. Mezon ten składa się z kwarka i antykwarka niskiego ($\mathrm{b}\overline{\mathrm{b}}$).
51. $0{,}135\,\mathrm{fm}$. Ponieważ na tak krótkiej drodze nie jest możliwe zostawienie śladu w detektorze, obecność bozonu W^{-} w eksperymencie stwierdza się na podstawie obserwacji produktów jego rozpadu.
53. $3{,}33\,\mathrm{MV}$.
55. Grawiton jest cząstką bezmasową, podobnie jak foton, dlatego zasięg oddziaływań przenoszonych przez grawiton jest nieskończony.
57. $67{,}5\,\mathrm{MeV}$.
59. a. $33{,}9\,\mathrm{MeV}$; b. Z zasady zachowania pędu otrzymujemy $|p_{\mu}| = |p_{\nu}| = p$, z zasady zachowania energii wynika: $E_{\nu} = 30{,}6\,\mathrm{MeV}$, $E_{\mu} = 3{,}3\,\mathrm{MeV}$.
61. $0{,}99 \cdot 299\,792\,\mathrm{km/s} = 70\,\mathrm{km/(s\,Mpc)} \cdot d$, $d = 4240\,\mathrm{Mpc}$.
63. $10^{4}\,\mathrm{km/s}$ w kierunku od nas.
65. $2{,}26 \cdot 10^{8}$ lat.
67. a. $1{,}5 \cdot 10^{10}\,\text{lat} = 15\,\text{miliardów lat}$; b. Wiek Wszechświata byłby większy, bo skoro Wszechświat rozszerzał się wolniej w przeszłości, to pokonanie danego dystansu zajęłoby mu więcej czasu.
69. $v = \sqrt{GM/r}$.

ZADANIA DODATKOWE

71. a. $\overline{\mathrm{n}}$; b. K^{+}; c. K^{+}; d. π^{-}; e. $\overline{\nu}_{\tau}$; f. e^{+}.
73. $14{,}002\,\mathrm{TeV} \approx 14\,\mathrm{TeV}$.
75. $964\,\mathrm{Hz}$.
77. a. $H_0 = (30\,\mathrm{km/s}) / 10^{6}\,\mathrm{ly} = 3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{km/(s\,ly)}$; b. $H_0 = (15\,\mathrm{km/s}) / 10^{6}\,\mathrm{ly} = 1{,}5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{km/(s\,ly)}$.

ZADANIA TRUDNIEJSZE

79. a. $5 \cdot 10^{11}$; b. Podziel liczbę cząstek przez pole powierzchni, na jaką padają: $5 \cdot 10^{5}\,\text{cząstek}/\mathrm{m}^{2}$.
81. a. $2{,}01$; b. $2{,}5 \cdot 10^{-8}\,\mathrm{s}$; c. $6{,}5\,\mathrm{m}$.
83. $mv^{2}/r = GMm/r^{2}$, stąd $v = \sqrt{GM/r} = \sqrt{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N m^2/kg^2} \cdot 3 \cdot 10^{41}\,\mathrm{kg}) / (30\,000\,\mathrm{ly} \cdot 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{ly/s})} = 2{,}7 \cdot 10^{5}\,\mathrm{m/s}$.
85. a. $938{,}27\,\mathrm{MeV}$; b. 1840 (jest to stosunek mas protonu i elektronu).

87. a. Korzystamy z zasady Heisenberga $\Delta E \cdot \Delta t = \hbar \ / \ 2$. $3{,}29 \cdot 10^{18}\,\text{GeV} \approx 3 \cdot 10^{18}\,\text{GeV}$; b. $0{,}3$. Unifikacja trzech oddziaływań (silnego, słabego i elektromagnetycznego) załamuje się wkrótce po oddzieleniu się grawitacji od supersiły (po upływie czasu Plancka). Rośnie więc nieoznaczoność czasu. Dostępna energia staje się zatem mniejsza niż wymagana do unifikacji oddziaływań.

SKOROWIDZ NAZWISK

SKOROWIDZ RZECZOWY

P

R

S

T

U

W

Z

SKOROWIDZ TERMINÓW OBCOJĘZYCZNYCH

S

T

U

V

W

X

Z